L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'Ecole
polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université
de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

TREIZIÈME ANNÉE

1911

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LEIPZIG
B. G. TEUBNER

1911

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KÜNDIG

ESQUISSE D'UNE TRIGONOMÉTRIE
DÉBARRASSÉE DE L'INTRUSION DES ARCS DE CERCLE

---

1. — L'attribution d'un caractère obligatoire à l'intervention du cercle dans l'assiette des principes de la Trigonométrie est une vue très ancienne, puisque les noms de *sinus*, *tangente*, *sécante*, ... d'ARC SIN, ... sont portés depuis un temps immémorial par les « *lignes* trigonométriques », par leurs fonctions inverses, et ce sentiment semble toujours fortement enraciné, car l'exhibition minutieuse du « *cercle* trigonométrique » inaugure tous les livres, tous les cours sur la matière, et, plus haut, le nombre π, rapport de la circonférence au diamètre, reste mêlé intimement aux considérations conduisant d'une manière ou d'une autre à la construction des Tables.

Cependant, il ne s'agit en réalité que des angles *rectilignes* et des *rapports* mutuels de segments *rectilignes* rattachés à ceux-ci par des constructions employant la *règle* et l'*équerre* seulement, rapports dont les valeurs numériques sont déterminées ainsi par celles des angles qu'elles déterminent inversement (sauf ambiguïté à lever), et rien de tout cela ne touche évidemment à la notion d'une figure *courbe* quelconque. L'opinion dont il s'agit est donc une pure illusion[1], voilant comme toujours le fond des choses, ajoutant des complications inutiles à leur exposition. D'autre part, la

---

[1] Le préjugé a dû naître du fait, que tous les instruments destinés à la mesure *physique* des angles ont pour principe la substitution à ceux-ci, d'arcs proportionnels sur un même cercle matériel, procédé indirect qui apporte des facilités extraordinaires à la construction de ces instruments, comme à la lecture de leurs indications. Mais les besoins de la *pratique* n'ont rien à voir à l'économie des *théories*. A cette occasion, d'ailleurs, il n'est pas hors de propos de rappeler que cette application du cercle est une simple commodité, *nullement une nécessité :* à la rigueur, on pourrait fort bien, par exemple, rapporter les angles à des échelles *rectilignes* (dont les divisions seraient espacées suivant des lois convenables).

Géométrie classique s'obstinait à éviter comme une souillure la moindre allusion aux considérations trigonométriques, se privant par là des moyens expéditifs et puissants qu'elle y aurait souvent trouvés, et sa pruderie, son exclusivisme archaïque, étaient à demi couverts, en cette circonstance, par ce qu'il y a de laborieux et d'encombrant dans le déchiffrage du « cercle trigonométrique », par la confusion que son emploi provoque et entretient longtemps parfois, entre ses arcs et des angles, entre des segments rectilignes en dépendance avec lui et des rapports numériques.

Ces réflexions m'ont amené jadis à la conviction qu'il était possible d'arracher la Trigonométrie à ce parasitisme du cercle, par simple retour à la considération directe des angles et des rapports précités, et qu'il importait de le faire pour la simplifier et mettre ainsi ses ressources à la portée de la Géométrie élémentaire. C'est la réforme que j'ai amorcée dans mon livre de 1874, que j'ai tant soit peu élargie dans son édition de 1903[1] et poussée dans celle de 1906[2], jusqu'aux formules pour la résolution logarithmique des triangles, obtenues par les moyens les plus vulgaires.

Sur cette voie, où je n'ai eu à faire encore que des pas petits et peu nombreux, on peut marcher avec la même aisance jusqu'au bout. Je vais le montrer sommairement, présenter notamment une démonstration puisée à la même source, pour les formules générales concernant l'addition et la soustraction des angles, d'où, une fois établies, le reste de la Trigonométrie (courante) se déduit rapidement, sans difficultés spéciales.

La rectification préalable des arcs de cercle ne s'impose pas plus impérieusement dans la recherche des relations analytiques existant entre les angles *eux-mêmes* et leurs rapports trigonométriques, relations dont quelques-unes jouent déjà un très grand rôle en Mathématiques spéciales (dérivées de $\sin x$, ... , discussion des figures rapportées à des coordon-

---

[1] Cette innovation, je le rappelle en passant, figure parmi celles de mon ouvrage, que les Programmes officiels de 1905 se sont appropriées. (V. *Revue scientifique*, n° du 24 août 1907.)

[2] *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Dijon, Paul Jobard. Mes renvois à cette édition se feront ici par des numéros affectés d'un astérisque.

nées polaires, etc.), où le calcul pratique des Tables a trouvé sa base rationnelle. Mais la question est d'un ordre plus élevé qui jurerait avec le terre à terre des considérations suivantes. Je la traiterai donc séparément dans un article qui suivra bientôt celui-ci.

2. — Je raisonnerai sur des figures tracées toutes dans un même plan: comme pour des segments rectilignes, la même notation sera affectée à un angle (figure) et à la mesure de son amplitude rapportée à quelque unité choisie à volonté; jusqu'au n° 9, VI *(inf.)*, je ne considérerai que des angles *absolus*, c'est-à-dire sans qualification positive ou négative. Je continuerai à représenter par $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$, l'angle neutre, le replet[1] et le droit, liés les uns aux autres par les égalités

$$(1) \qquad 2\mathcal{N} = \mathcal{R} = 4\mathcal{D} \, .$$

Et je commencerai par approprier à des amplitudes quelconques, les définitions d'où je suis parti en traitant des angles aigus ou droits seulement, au point de vue où je reste placé (250* *et suiv.*).

I. Pour tout angle AOB, de côtés $\overline{\mathrm{O}}$A, $\overline{\mathrm{O}}$B quelconques ainsi que son amplitude x, je nommerai *directeur* relatif à l'un $\overline{\mathrm{O}}$A de ceux-ci, le demi-plan $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}\mathfrak{b}$ qui a pour arête la droite OA de ce côté et contient, soit la totalité de l'angle s'il est saillant (133*), soit, au cas que son amplitude atteigne ou surpasse celle du neutre, le premier A$\mathrm{O}b_1$ (au moins) des angles saillants A$\mathrm{O}b_1$, $b_1\mathrm{O}b_2$, ... , b_iOB qui ont concouru à sa composition (136*, IV).

Nous désignerons ensuite par m un point indéterminé de l'autre côté $\overline{\mathrm{O}}$B, pris toutefois ailleurs qu'au sommet O, par a le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur la droite OA du premier, puis nous considérerons les nombres $am : \mathrm{O}m$, $\mathrm{O}a : \mathrm{O}m$, rapports des segments am, $\mathrm{O}a$ à $\mathrm{O}m$, qui sont

[1] Ces deux noms que j'ai donnés aux plus petits des angles ayant pour côtés des demi-droites opposées dans le premier cas, confondues dans le second (l'angle nul étant excepté pour celui-ci), ont été parfois taxés de fantaisies néologiques. Je n'en persiste pas moins à croire tout à fait irrationnelle l'habitude courante de rapporter à l'angle droit ces amplitudes angulaires aux rôles si importants, *dont la notion est tout ce qu'il y a de plus étranger à celle de perpendicularité.*

toujours déterminés parce que leur dénominateur commun Om est supposé $\neq 0$, en outre visiblement indépendants de la position de m sur $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{B}$.

II. Quand le côté $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ ne se trouve pas appliqué sur la droite OA, le premier rapport am : Om n'est pas nul, et, en le revêtant de la qualification positive ou négative selon que ce côté tombe ou non dans le demi-plan directeur mentionné ci-dessus (I), on obtient une quantité (algébrique) qui est, par définition, le *sinus* de l'angle considéré, se notant sin AOB. En cas d'application, le même nombre a pour valeur 0, qui (considéré algébriquement toujours) est encore celle de sin AOB.

III. Le second rapport Oa : Om revêtu, soit de la qualification positive ou négative selon que le point a se trouve sur le côté $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ ou sur son prolongement, soit du caractère du zéro algébrique, quand a est en O, définit semblablement le cosinus de notre angle et se représente par cos AOB.

IV. La mobilisation d'un dédoublement ... *AOB* ... du plan de nos figures, emportant tout ce que nous y avons tracé, puis sa réapplication sur ce plan, faite de manière à amener $\overline{O}A$, $\overline{O}B$ en $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ respectivement, conduisent aux égalités sin BOA = sin AOB, cos BOA = cos AOB montrant que les quantités visées par les définitions précédentes ne sont modifiées en rien par la transposition des côtés de l'angle et qu'on peut, en conséquence, les noter plus simplement sin x, cos x.

V. Si l'on considère la demi-droite $\overline{\mathrm{O}}\mathfrak{A}$ perpendiculaire à $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ dans le directeur de l'angle AOB relatif à $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ (I) et un angle $\mathfrak{A}$OB ayant le demi-plan $\overline{\mathrm{O}}\mathfrak{A}$A pour directeur relatif à $\overline{\mathrm{O}}\mathfrak{A}$, on apercevra immédiatement la réciprocité exprimée par les égalités

$$\sin \mathrm{AOB} = \cos \mathfrak{A}\mathrm{OB}\ , \quad \cos \mathrm{AOB} = \sin \mathfrak{A}\mathrm{OB}\ . \tag{2}$$

3. — Jusqu'au n° 9, VI *inf.*, la lettre k représentera un entier absolu en complète indétermination (s'étendant à la valeur 0), sous la seule condition que sa grandeur rende possibles les soustractions éventuelles.

Pour toutes les valeurs de x, *on a les relations alternatives*

(3) $\sin(x + k\omega) = \quad \cos x\ , \quad -\sin x\ , \quad -\cos x\ , \quad \sin x\ ,$

(4) $\cos(x + k\omega) = -\sin x\ , \quad -\cos x\ , \quad \sin x\ , \quad \cos x\ ,$

quand la division de k *par* 4 *donne les restes* 1, 2, 3, 0 *respectivement, et*

(5) $\sin(x - k\omega) = -\cos x\ , \quad -\sin x\ , \quad \cos x\ , \quad \sin x\ ,$

(6) $\cos(x - k\omega) = \quad \sin x\ , \quad -\cos x\ , \quad -\sin x\ , \quad \cos x\ ,$

en correspondance respective avec les mêmes restes.

I. Si l'on construit un angle droit $\mathrm{AO}\mathcal{A}$, puis un angle $\overline{\mathcal{A}\mathrm{OB}}$ d'amplitude x, en contiguïté extérieure avec lui par le côté commun $\bar{\mathrm{O}}\mathcal{A}$, un certain autre AOB, de directeur $\bar{\mathrm{O}}\mathrm{A}\mathcal{A}$ relativement à $\bar{\mathrm{O}}\mathrm{A}$, sera d'amplitude $\omega + x$ (136', V), et l'on aura (2, II, III)

$$\sin(x + \omega) = \sin \mathrm{AOB}\ , \quad \cos(x + \omega) = \cos \mathrm{AOB}\ .$$

Les égalités (2)

$$\sin \mathrm{AOB} = \cos \mathcal{A}\mathrm{OB}\ , \quad \cos \mathrm{AOB} = \sin \mathcal{A}\mathrm{OB}$$

peuvent être récrites pour cet angle AOB et l'angle annexe $\mathcal{A}\mathrm{OB}$ défini au n° 2, V, de mêmes notations et relation graphique que ceux du lieu cité, et l'on a d'autre part

$$\cos \mathcal{A}\mathrm{OB} = \cos \overline{\mathcal{A}\mathrm{OB}} = \cos x\ , \quad \sin \mathcal{A}\mathrm{OB} = -\sin \overline{\mathcal{A}\mathrm{OB}} = -\sin x\ ,$$

parce que les angles $\mathcal{A}\mathrm{OB}$, $\overline{\mathcal{A}\mathrm{OB}}$ sont de mêmes côtés $\bar{\mathrm{O}}\mathcal{A}$, $\bar{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, avec des directeurs relatifs à $\bar{\mathrm{O}}\mathcal{A}$ qui sont visiblement opposés.

De tout quoi, on conclut immédiatement

(7) $\sin(x + \omega) = \cos x\ , \quad \cos(x + \omega) = -\sin x\ ,$

conformément à ce que donnent pour $k = 1$, les relations (3), (4) en question.

II. L'addition successive de ω, 2ω, ... , $(k-1)\omega$ aux angles des premiers membres de (7), puis des combinaisons immédiatement visibles des équations ainsi obtenues, conduisent aux formes générales de (3), (4).

III. Finalement (I), on a $\sin x = \sin[(x - \mathcal{D}) + \mathcal{D}] = \cos(x - \mathcal{D})$ et, de même, $\cos x = -\sin(x - \mathcal{D})$, c'est-à-dire

$$\sin(x - \mathcal{D}) = -\cos x \;, \quad \cos(x - \mathcal{D}) = \sin x \;,$$

relations d'où l'on passera à (5), (6) comme nous l'avons fait à l'instant (II) de (7) à (3), (4), sauf à substituer ici la soustraction de $\mathcal{D}$, $2\mathcal{D}$, ... aux additions de tout à l'heure.

4. — On notera les cas particuliers de (3), (4), (5), (6),

$$(8) \quad \sin(x \pm k\mathcal{P}\ell) = (-1)^k \sin x \;, \quad \cos(x \pm k\mathcal{P}\ell) = (-1)^k \cos x \;,$$

$$(9) \quad \sin(x \pm k\mathcal{R}) = \sin x \;, \quad \cos(x \pm k\mathcal{R}) = \cos x \;,$$

que donnent le doublement et le quadruplement de l'entier k (1).

5. — Il faut encore remarquer les égalités

$$(10) \quad \begin{cases} \sin(k\mathcal{P}\ell) = \cos(\mathcal{D} + k\mathcal{P}\ell) = 0 \;, \\ \cos(k\mathcal{P}\ell) = \sin(\mathcal{D} + k\mathcal{P}\ell) = (-1)^k \;, \end{cases}$$

conséquences de $\sin 0 = \cos \mathcal{D} = 0$ (**2**, II, III), de $\sin \mathcal{D} = \cos 0 = 1$, évidemment, et des relations (8).

6. — *On a ces autres relations alternatives*

$$(11) \quad \sin(k\mathcal{D} - x) = \cos x \;, \quad \sin x \;, \quad -\cos x \;, \quad -\sin x \;,$$

$$(12) \quad \cos(k\mathcal{D} - x) = \sin x \;, \quad -\cos x \;, \quad -\sin x \;, \quad \cos x \;,$$

quand la division de k *par* 4 *donne les restes* 1, 2, 3, 0.

I. Un angle d'amplitude $(4\chi + 1)\mathcal{D} = \chi\mathcal{R} + \mathcal{D}$ a pour côtés deux demi-droites $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$, $\overline{\mathrm{O}}\mathcal{A}$ en perpendicularité mutuelle, et son directeur relatif au premier est le demi-plan $\overline{\mathrm{OA}\mathcal{A}}$. Si, en contiguïté intérieure avec cet angle par le côté $\overline{\mathrm{O}}\mathcal{A}$, on place en $\mathcal{A}$OB un second angle d'amplitude x, quelque troisième angle AOB, de directeur $\overline{\mathrm{OA}\mathcal{A}}$ relatif à son côté $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{A}$, sera l'excès du premier des précédents sur l'autre (**136***, V), savoir $(4\chi + 1)\mathcal{D} - x$. On en conclut

$$(13) \quad \sin[(4\chi + 1)\mathcal{D} - x] = \cos x \;, \quad \cos[(4\chi + 1)\mathcal{D} - x] = \sin x \;,$$

à cause des égalités (2) entre des angles notés et placés relativement comme AOB, $\mathcal{A}$OB ici.

II. De (13) on passe à (11), (12) aussi facilement que de (7) à (3), (4) plus haut (3, II).

7. — Les cas particuliers des formules (11), (12) qui correspondent aux restes 1, 2, 0 sont intéressants et peuvent s'écrire

(14) $\sin(k\mathcal{R} + \mathcal{D} - x) = \cos x\ , \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{D} - x) = \sin x\ ,$

(15) $\sin(k\mathcal{R} + \mathcal{N} - x) = \sin x\ , \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{N} - x) = -\cos x\ ,$

(16) $\sin(k\mathcal{R} + \mathcal{R} - x) = -\sin x\ , \quad \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{R} - x) = \cos x\ .$

8. — *La considération de deux angles quelconques* x, y *conduit à*

(17) $$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y\ ,$$

(18) $$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\ ,$$

où les signes supérieurs doivent être pris ensemble, ainsi que les inférieurs.

I. 1° Quand chacun des angles x, y, $x + y$ est compris entre 0 et $\mathcal{N}$ exclusivement, la première des relations (17) s'obtient facilement. Il existe effectivement (230*) quelque triangle déchevêtré, d'angles x, y, $z = \mathcal{N} - (x + y)$, avec des côtés respectivement opposés a, b, c, pour lequel nos définitions (2, II, III) mises en jeu par les moyens les plus élémentaires donnent

$$c = a \cos y + b \cos x\ ,$$

$$\frac{c}{\sin z} = \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y}\ ,$$

puis, par des combinaisons évidentes,

$$\sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x\ ,$$

finalement, la formule en question

(19) $$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x\ ,$$

à cause de $\sin z = \sin[\mathcal{N} - (x + y)] = \sin(x + y)$ (15).

2° *Pour les mêmes valeurs de* x, y, *la validité de la formule* (19) *s'étend à toutes celles* $> \mathcal{N}$ *de leur somme correspondante.*

Les angles $\mathcal{N} - x$, $\mathcal{N} - y$ et leur somme $\mathcal{R} - (x + y)$ remplissant toutes les conditions ci-dessus (1°), on trouvera successivement et facilement

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= -\sin[\mathcal{R} - (x+y)] = -\sin[(\mathcal{N} - x) + (\mathcal{N} - y)] \\ &= -[\sin(\mathcal{N} - x)\cos(\mathcal{N} - y) + \cos(\mathcal{N} - x)\sin(\mathcal{N} - y)] \\ &= -[\sin x\,(-\cos y) + (-\cos x)\sin y] \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad (16),\ (19),\ (15).\end{aligned}$$

3° *La même formule* (19) *reste exacte pour* $x = 0$ *quel que soit* y, *ou pour* $y = 0$ *quel que soit* x, *ou bien encore pour* $x + y = \mathcal{N}$ *quels que soient* x, y. C'est ce que montre immédiatement la réalisation successive de ces trois hypothèses numériques, avec prise en considération des égalités (10) donnant $\sin 0 = \sin \mathcal{N} = 0$, $\cos 0 = 1$ et des relations (15) comprenant, quand $x + y = \mathcal{N}$, $\sin y = \sin(\mathcal{N} - x) = \sin x$, $\cos y = \cos(\mathcal{N} - x) = -\cos x$.

4° *Elle subsiste pour* $x = x_0 + k\mathcal{N}$, $y = y_0 + l\mathcal{N}$, *quand elle a lieu pour* $x = x_0$, $y = y_0$. Car ces substitutions conduisent à

$$(-1)^{k+l}\sin(x_0 + y_0) = (-1)^k \sin x_0 (-1)^l \cos y_0 + (-1)^k \cos x_0 (-1)^l \sin y_0 \qquad (8)$$

ce qui est exact par hypothèse.

5° *Elle s'étend à toutes les valeurs de* x, y. Car, si k, l et ξ, η sont les quotients et les restes des divisions de x, y par $\mathcal{N}$, opérées par défaut, elle est vraie pour $x = \xi$, $y = \eta$ à cause de $\xi < \mathcal{N}$, $\eta < \mathcal{N}$ (1°), (2°), (3°), puis, par suite (4°), pour $x = \xi + k\mathcal{N}$, $y = \eta + k\mathcal{N}$.

II. La relation (17) avec les signes inférieurs se déduit de l'autre reproduite séparément en (19), par l'intervention d'un multiple de $\mathcal{R}$, savoir $k\mathcal{R}$, pris $> y$. On trouvera effectivement

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin(x - y + k\mathcal{R}) = \sin[x + (k\mathcal{R} - y)] \\ &= \sin x \cos(k\mathcal{R} - y) + \cos x \sin(k\mathcal{R} - y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \qquad (9),\ (19),\ (16)\end{aligned}$$

III. En recourant enfin à un angle auxiliaire d'amplitude $k\mathcal{R} + \mathcal{D}$, pris $> (x + y)$, les formules (17), maintenant établies dans tous les cas, donneront facilement

$$\cos(x \pm y) = \sin[k\mathcal{R} + \mathcal{D} - (x \pm y)] = \sin[(k\mathcal{R} + \mathcal{D} - x) \mp y]$$
$$= \sin(k\mathcal{R} + \mathcal{D} - x)\cos y \mp \cos(k\mathcal{R} + \mathcal{D} - x)\sin y$$
$$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad (14), (17),$$

c'est-à-dire les relations (18) restant à établir.

9. — Les indications suivantes résument ce qui me resté à dire.

I. Les diverses formules revues précédemment procurent l'extension à toutes les valeurs du nombre x, des propriétés de $\sin x$, $\cos x$ mentionnées aux nos 251* et suivants, pour les angles non $> \mathcal{D}$, celle notamment des résultats de leur discussion limitée à ce premier intervalle.

II. De ces résultats combinés avec les égalités (10), on conclut que les seules racines des équations

$$\sin x = 0, \quad \sin x = +1, \quad \sin x = -1,$$
$$\cos x = 0, \quad \cos x = +1, \quad \cos x = -1,$$

sont les nombres inscrits dans les cases correspondantes du Tableau semblable

$$(20) \qquad \begin{cases} k\mathcal{N}, & \mathcal{D} + k\mathcal{R}, & \mathcal{D} + \mathcal{N} + k\mathcal{R}, \\ \mathcal{D} + k\mathcal{N}, & k\mathcal{R}, & \mathcal{N} + k\mathcal{R}. \end{cases}$$

III. On discutera et résoudra comme il suit les équations numériques

$$(21) \qquad \sin x = \mathfrak{s}, \quad \cos x = \mathfrak{c},$$

dont les seconds membres sont des quantités algébriques données.

1° $|\mathfrak{s}| > 1$. La discussion de $\sin x$ (I) montre que la première est impossible.

2° $\mathfrak{s} = 0, +1, -1$. Les racines de la même équation ont été données dans les cases correspondantes du Tableau (20).

3° $0 < |\mathfrak{s}| < 1$. La construction graphique d'un triangle

rectangle Oam (2, I, II) où le rapport d'un côté am de l'angle droit à l'hypoténuse $Om = |\mathfrak{s}|$ est possible (**244***, III) et procure, par l'angle opposé à ce côté am, ou par cet angle augmenté de $\mathfrak{N}$, selon que $s \gtreqless 0$ (8), une racine σ de cette équation, dont l'intervention amène celle-ci sous la forme

$$(\sin x - \sin \sigma =)\ 2\sin \frac{x-\sigma}{2} \cos \frac{x+\sigma}{2} = 0 \qquad (17), (18),$$

la décompose ainsi en ces deux autres

$$\sin \frac{x-\sigma}{2} = 0\ , \quad \cot \frac{x+\sigma}{2} = 0\ ,$$

qui viennent d'être résolues (II).

4° Et pareillement pour la seconde des équations (21).

IV. On fera la théorie de $\operatorname{tang} x$, $\cos x$ dans le même ordre d'idées, en prenant pour définitions les formules

$$(22) \qquad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}\ , \quad \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}\ ,$$

qui trouvent dans la figure expliquée au n° **2** des représentations géométriques évidentes; et, par de simples calculs, on développera les conséquences de leurs combinaisons variées avec celles qui expriment les propriétés de $\sin x$, $\cos x$ (**3** *et suiv.*).

V. Les signes $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$ ne sont à mentionner qu'en passant, par la commodité accidentelle, mais bien rare et minime, de leur substitution à $1 : \cos x$, $1 : \sin x$.

VI. Les quantités $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, considérées comme des fonctions du nombre x, se trouvent actuellement définies pour toutes les valeurs (absolues) de celui-ci. Ces définitions s'étendent immédiatement aux valeurs *qualifiées* de x (positives, négatives), par les conventions suivantes. Après avoir représenté par $+\xi$, $-\xi$ comme d'habitude, la quantité absolue quelconque ξ revêtue successivement du caractère positif et du négatif, il suffira de poser

$$\sin(\pm\xi) = \pm \sin \xi\ , \quad \cos(\pm\xi) = \cos \xi\ ,$$

d'où (22)

$$\operatorname{tang}(\pm\xi) = \pm \operatorname{tang} \xi\ , \quad \cot(\pm\xi) = \pm \cot \xi\ .$$

Par une revue rapide de toutes nos formules antérieures, on constatera bien facilement la persistance de leur validité dans ces circonstances comportant même des valeurs et qualifications quelconques données aux multiplicateurs entiers tels que k.

Et l'occasion sera particulièrement convenable pour faire ressortir les commodités procurées par l'imposition de la qualification positive ou négative aux mesures des angles qui, dans un plan commun, sont *dirigés*, soit dans quelque même sens giratoire, soit dans le sens opposé (155).

(On peut opérer cette extension dès le début et la poursuivre au fur et à mesure de l'entrée de nos formules en scène, et ceci les simplifierait un peu, en les généralisant du coup. Mais il n'y aurait pas d'inconvénients à la passer sous silence, car elle ne commence qu'en mathématiques spéciales à être réellement utile, les signes sin, cos, ... qui concourent à la solution des équations élémentaires (figures *algébriques*) ne portent pour ainsi dire jamais que sur des angles absolus, même saillants.)

VII. Comme pour le calcul de π et des logarithmes auparavant, les détails donnés dans l'enseignement *secondaire* sur la construction des Tables trigonométriques, sont inutiles à tous les points de vue, éducatif et autres, autant qu'ils sont arides et fastidieux, même trompeurs. Car les procédés sur lesquels les élèves sont ainsi condamnés à pâlir sont de pures fantaisies, sans intérêt historique, et ils ne donnent pas la moindre idée de la méthode rationnelle qui a été réellement appliquée, qu'approfondiront, avec fruit cette fois, les sujets appelés à des études mathématiques un peu plus élevées. Ce serait bien assez de montrer *en très peu de mots, chose des plus faciles*, la possibilité de calculs de ce genre, en théorie seulement, c'est-à-dire abstraction faite de leur valeur pratique et de la manière de les conduire pour s'assurer une approximation de degré donné.

Ici, l'emploi des formules

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

réitéré à partir de $x = \varpi$ (cas où $\cos \varpi = 0$ est connu) jusqu'à $x = \varpi : 2^n$ et complété par des considérations très simples, ne ferait intervenir que des extractions de racines carrées (avec des opérations entières) dans la construction théorique, pour des angles échelonnés entre 0 et ϖ de $\varpi : 2^n$ en $\varpi : 2^n$, c'est-à-dire par degrés de petitesse arbitraire, d'une Table de sinus et cosinus naturels, immédiatement extensible aux tangentes et cotangentes des mêmes angles. A quoi, l'on ajouterait l'indication des *parties proportionnelles* pour le passage à d'autres angles, à ceux en particulier qui proviennent de la division sexagésimale ou décimale de l'angle droit.

Cet expédient didactique n'a pas pour principe, comme celui des cours, une idée aussi étrange que celle de rattacher le calcul préalable des rapports trigonométriques d'un angle très petit à la métrique des *lignes courbes*, parfois des *aires*, et, tout compte fait, son exposition se ferait en quelques minutes, le monceau des calculs nécessaires à sa mise en nombres (si l'on pouvait y songer) serait sans doute bien moins pesant. Mais il serait infiniment plus sage d'émonder l'enseignement de toutes les questions aussi oiseuses et rebutantes que celle-ci.

Ch. Méray (Dijon).

LE PROBLÈME DE PAPPUS

Une question récente de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (Question 3667, R-C. ARCHIBALD), ramène l'attention sur ce célèbre problème :

Rhombo dato, et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

Pappus, et après lui un certain nombre de mathématiciens, parmi lesquels Newton, Huygens, Gergonne, ont donné une solution algébrique et géométrique qui dépend de la construction de deux lignes de différence et de produit connus[1].

Le problème plus général : *Mener par un point donné dans un angle une sécante de longueur donnée*, a été à son tour l'objet d'un certain nombre de recherches, auxquelles je crois devoir apporter ici ma contribution. La solution complète de ce problème général est donnée algébriquement par une équation du troisième ou du quatrième degré, graphiquement par l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole. Outre le rhombe, il y a d'autres cas particuliers dans lesquels le degré s'abaisse au deuxième. Il existe également un cas particulier qui conduit à une trisection d'angle.

Le point donné A étant supposé placé dans l'angle XOY, soit BAC (fig. 1), la sécante demandée de longueur l ; menons la sécante DAE dont A est le milieu, puis OA′ équipollent à AD, et OM équipollent à CB ; le point M est à l'intersection du cercle qui a O pour centre et l pour rayon avec l'hyperbole qui a pour centre A′, les asymptotes parallèles à OX et OY, et qui passe aussi par O. Le point M étant construit, il ne restera qu'à tirer la droite BAC parallèle à OM.

[1] Consulter, par exemple, E. PRUVOST, *Géométrie Analytique*, t. I, p. 18-28.

Bien des méthodes s'offrent pour la recherche du point M, car on peut prendre par exemple pour inconnues soit les sécantes communes au cercle et à l'hyperbole, soit un angle fixant la direction de OM, soit encore un rapport ou une coordonnée homographique, telle que $\frac{CO}{CE}$, etc... Chaque méthode vaut d'ailleurs la peine d'être suivie, car elle révèle un fait intéressant.

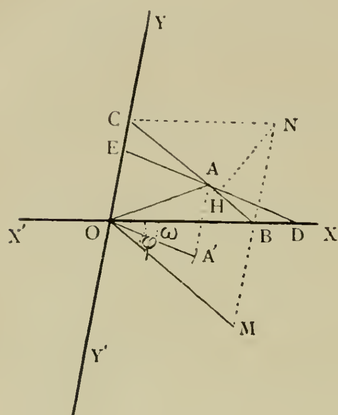


Fig. 1.

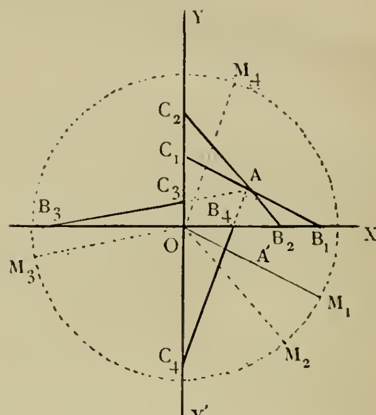


Fig. 2.

Prenons les côtés de l'angle XOY $= \theta$ pour axes de coordonnées ; en désignant par x_1 et y_1 les coordonnées de A, x_1 et $-y_1$ sont celles de A′, le cercle et l'hyperbole ont respectivement pour équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta - l^2 = 0 ,$$

$$(2) \qquad \frac{x_1}{x} - \frac{y_1}{y} - 1 = 0 .$$

Pour que la conique du faisceau linéaire

$$2xy + 2y_1x - 2x_1y + \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - l^2) = 0$$

dégénère en deux droites, il faut que λ soit racine de l'équation du troisième degré

$$(3) \quad l^2 \sin^2\theta\lambda^3 - 2l^2\cos\theta\lambda^2 + (x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta - l^2)\lambda + 2x_1y_1 = 0 ,$$

qui a ses trois racines réelles quand on a la condition

$$(4)\qquad \left\{ 3(\overline{OA}^2 \sin^2\theta - l^2) - l^2\cos^2\theta \right\}^3 + l^2 \left\{ 8l^2\cos^3\theta - 9\overline{OA}^2 \sin^2\theta \cos\theta - 27x_1y_1 \sin^4\theta \right\}^2 < 0 \, .$$

Cette condition exprime que le point donné A est à l'intérieur d'une sextique à quatre rebroussements, tangente deux fois à chacun des axes.

Lorsque $\theta = 90°$, cette sextique n'est autre que l'hypocycloïde à quatre rebroussements, ou *astroïde*,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - l^{\frac{2}{3}} = 0 \, .$$

Lorsque θ est quelconque, la sextique (4) est aussi l'enveloppe de toute corde BAC égale à l limitée par l'angle, en même temps que le lieu géométrique de la projection H sur cette corde du quatrième sommet N du parallélogramme OBNC. Mais elle jouit encore d'une autre propriété curieuse (Joachimstal, Salmon, Merlieux, — consulter, par exemple, Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales*, vol. I, p. 332-338).

Soient oz bissectrice de l'angle XOY, OX′ et OY′ les deux droites qui font avec oz de part et d'autre des angles de 45°, R le rayon constant du cercle circonscrit au triangle OBC; si l'on détermine l'astroïde enveloppe des cordes de longueur 2R inscrites dans l'angle droit X′OY′, la sextique (4) est une courbe parallèle à cette astroïde, à la distance $R\cos\theta$, les rebroussements des deux courbes se correspondant mutuellement.

Pour déterminer le point M par un angle, nous cherchons l'angle $XoM = \varphi$. En désignant par ω l'angle xoA', l'équation à résoudre est alors

$$(5)\qquad \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin(\theta - \varphi)} + \frac{\sin\omega}{\sin\varphi} - \frac{l}{OA'} = 0 \, .$$

Dans le cas particulier où $l = 2OA'$, elle se décompose en

$$\sin\frac{\varphi - \omega}{2} = 0 \, , \qquad \text{et} \qquad \sin\left[\frac{3\varphi + \omega}{2} - \theta\right] + \sin\frac{\varphi - \omega}{2}\cos\theta = 0 \, .$$

Par conséquent, si l'angle XOY est droit, l' étant égal à $2OA' = 2OA$, les quatre points communs au cercle et à l'hyperbole sont M_1 situé sur le prolongement de OA', M_2 tel que $XOM_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} XOM_1$, et les deux autres sommets M_3, M_4 du triangle équilatéral inscrit à partir de OM_2. De là les quatre sécantes B_1AC_1, B_2AC_2, B_3C_3 et B_4C_4, dont la première a pour milieu A (fig. 2).

Soit enfin dans la figure 1 le rapport $\frac{CO}{CE} = t$. Les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{2tx_1}{1+t}, \qquad y = \frac{2ty_1}{1-t},$$

et en les substituant dans l'équation (1) on calculera t par l'équation du quatrième degré

$$(6) \qquad 4 \left\{ x_1^2(t-1)^2 + y_1^2(t+1)^2 - 2x_1y_1 \cos \theta (t^2-1) \right\} t^2 - l^2(t-1)^2 = 0 .$$

En y faisant

$$\theta = 2\alpha, \quad l = 2l', \quad A = (x_1 - y_1)\cos\alpha, \quad B = (x_1 + y_1)\sin\alpha,$$

$$t_1 = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}, \quad t_2 = \frac{x_1 - y_1}{x_1 + y_1},$$

cette équation pourrait s'écrire sous la forme

$$(6') \qquad \left\{ A^2(t-t_1)^2 + B^2(t-t_2)^2 \right\} t^2 - l'^2(t^2 - t_1t_2)^2 = 0 ,$$

qui se prête assez bien à la discussion. On voit, par exemple, qu'elle a toujours au moins deux racines réelles, une positive, une négative, entre -1 et $+1$. Quand OA' est inférieur ou égal à l', les deux autres racines sont aussi réelles, l'une étant inférieure à -1 et la quatrième supérieure à 1. Il n'y a donc vraiment incertitude que lorsque OA' est plus grand que l'.

Or, l'équation (6) développée a la forme

$$(7) \qquad Mt^4 + 2Nt^3 + Pt^2 - l'^2 = 0 ,$$

en posant, pour abréger,

$$M = \overline{OA'}^2 - l'^2 \ , \quad N = y_1^2 - x_1^2 = - OA \ . \ OA' \cos AOA' \ ,$$
$$P = \overline{OA}^2 + 2l'^2 \ ,$$

et si l'on calcule le résultant Δ de cette équation avec l'équation dérivée,

$$2Mt^2 + 3Nt + P = 0 \ ,$$

la condition de réalité de ses quatre racines, qui s'exprime par

$$\Delta \leqslant 0 \ ,$$

revient, tous calculs développés, à l'inéquation (4).

Il faut maintenant examiner les cas particuliers que peut offrir l'équation (7), c'est-à-dire ceux où elle est quadratique. Le premier est celui, évident, où $N = 0$, A étant situé sur la bissectrice interne de l'angle XOY, et A′ sur celle de l'angle adjacent. L'équation (7) est alors bicarrée en t, et donne

$$2 \text{ solutions si } l' < OAtq\alpha \ ,$$
$$4 \quad \text{»} \quad \text{ si } l' > OAtq\alpha \ .$$

Pour les construire aisément, traçons (fig. 3) $BC = l$, et le segment capable de l'angle aigu θ sur BC; E étant le milieu de l'arc mineur sous-tendu, construisons deux lignes de différence égale à OA et de produit égal à $\overline{EB}^2$; puis de E comme centre avec chacune de ces lignes pour rayon décri-

Fig. 3.

Fig. 4.

vons deux arcs de cercle; le premier coupe toujours BC en A_1, le second la coupe en A si $l > 2OA \operatorname{tg} \alpha$; alors, les droites EA_1 et EA rencontrant le cercle en O_1 et O, les longueurs OB, OC, prises sur les côtés de l'angle déjà donné θ, les longueurs O_1B, O_1C, prises sur les côtés de son supplément déterminent les extrémités des sécantes de longueur l qui passent par le point donné.

L'équation (7) devient quadratique dans une autre circonstance intéressante, celle où

$$N^2 - PM = 0 .$$

Elle se décompose alors en deux équations du second degré,

$$(8) \qquad Nt^2 + Pt + l'\sqrt{P} = 0 ,$$

$$(9) \qquad Nt^2 + Pt - l'\sqrt{P} = 0 .$$

Pour fixer les idées, soit $x_1 > y_1$; l'équation (8) a deux racines réelles de signe contraire comprises entre -1 et $+1$; elles correspondent aux points d'intersection réels de la branche d'hyperbole qui passe par le centre du cercle, et donnent, ainsi que l'indique la figure 4, les sécantes B_3C_3 et B_4C_4.

L'équation (9) n'a de racines réelles que si l'on a

$$P^{\frac{3}{2}} + 4l'N \geqslant 0 ,$$

et ces deux racines, qui sont alors supérieures à 1, correspondent aux deux sécantes B_1C_1 et B_2C_2.

La condition de décomposition $N^2 - PM = 0$ exprime que le point donné A appartient à une courbe du quatrième degré ayant pour équation cartésienne

$$(10) \qquad 4x^2y^2 \sin^2 \theta + l'^2(x^2 + y^2 - 6xy \cos \theta) - 2l'^4 = 0 .$$

Cette courbe a pour axes les bissectrices des angles XOY et XOY', la longueur du premier étant $l' \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$, et celle du second $l' \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$: elle est donc tangente en ces points à la sextique enveloppe (4); ses points de rencontre avec OX et OY sont à la distance $l'\sqrt{2}$ du point O.

Si l'angle XOY est droit, la courbe (10) a pour équation polaire

$$\rho = \frac{(\sqrt{1 + 8\sin^2 2\omega} - 1)l'^2}{2\sin^2 2\omega},$$

sa forme, aisée à construire, montre qu'elle est toute intérieure à l'astroïde, ainsi que sur la figure 5; donc les sécantes qui passent par les points de cette courbe sont toutes réelles. On peut lui donner une définition géométrique assez simple, car si on projette chacun de ses points en m et m' sur des parallèles aux côtés de l'angle à la distance $\frac{l'}{2}$, le produit $Om \times Om'$ est constant et égal à $\frac{3}{4}l'^2$.

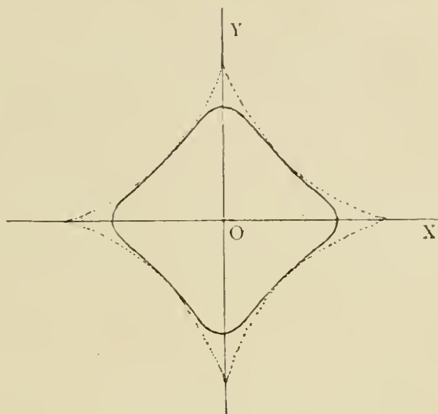


Fig 5.

Quand l'angle XOY n'est pas droit, la courbe (10) conserve une forme analogue.

Il ne reste plus qu'à construire les quatre sécantes, en faisant

$$t = \frac{-\sqrt{P}}{N}z,$$

si z est une ligne à déterminer, de même signe que t; alors, par l'équation (8), on trouve deux lignes de différence $\sqrt{P}$ et de produit $\frac{-l'N}{\sqrt{P}}$; par l'équation (9) deux lignes de somme $\sqrt{P}$ et de produit $\frac{-l'N}{\sqrt{P}}$. Enfin, par

$$\frac{CO}{CE} = \frac{-\sqrt{P}z}{N},$$

on fixe le point C qu'il n'y a plus qu'à joindre au point A.

P. Barbarin (Paris).

SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE, D'APRÈS A. MANNHEIM, DE L'ÉQUATION INTRINSÈQUE D'UNE COURBE PLANE

L'équation intrinsèque d'une courbe plane est susceptible d'une élégante interprétation géométrique donnée par A. Mannheim pour la première fois[1] : *soit*

$$\rho = f(s),$$

l'équation intrinsèque d'une courbe plane (C) ; *lorsque cette courbe roule sans glisser sur une droite fixe* Ox, *le centre de courbure correspondant au point de contact décrit la courbe* (Γ) *d'équation*

$$y = f(x),$$

par rapport à des axes rectangulaires dont l'un est Ox.

Dans un grand nombre de cas, on peut associer ainsi des courbes (C) et (Γ) remarquables. Mannheim établit géométriquement que (Γ) est une droite lorsque (C) est une spirale logarithmique, une parabole lorsque (C) est une développante de cercle, une circonférence lorsque (C) est une cycloïde, une ellipse lorsque (C) est une épicycloïde ordinaire et, enfin, une parabole lorsque (C) est une chaînette. Le résultat relatif à l'épicycloïde se trouve aussi dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1896 (p. 102 et 245), et celui qui est relatif à la chaînette a été étendu par Cesaro (*Nou-*

---

[1] *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2e série, t. IV, 1859, p. 93-104).

velles Annales, 1886, p. 75) aux courbes d'équation intrinsèque

$$c\rho = s^2 + a^2$$

auxquelles il a donné le nom de *courbes alysoïdes*. Mais ce ne sont pas là les seuls exemples dignes d'intérêt. Lorsque (C) est la clothoïde

$$x = \int_0^s \cos s^2 \, ds \,, \qquad y = \int_0^s \sin s^2 \, ds \,,$$

la courbe (Γ) est une hyperbole équilatère. Lorsque (C) est la chaînette d'égale résistance de Coriolis, d'équation intrinsèque (MINCHIN, *Treatise on Statics*, 1877)

$$\rho = \rho_0 \operatorname{ch} \frac{s}{\rho_0} \,,$$

la courbe (Γ) est la chaînette. Plus généralement, CIFARELLI (*Giornale di Matematiche*, t. XXXVI, 1898, p. 183) a considéré les courbes

$$\rho = 2b \operatorname{ch} \frac{s}{c} \,,$$

pour lesquelles les courbes (Γ) sont des transformées homographiques de la chaînette.

Je me suis proposé de généraliser cette interprétation géométrique devenue classique. Si on fait rouler la courbe (C) sur une courbe quelconque et non plus sur une droite, le lieu (Γ) des centres de courbure relatifs aux points de contacts se compose de deux courbes distinctes (Γ_1) et (Γ_2), qui correspondent aux deux positions relatives de (C) et de la courbe sur laquelle roule (C) par rapport à la tangente de contact.

L'étude des courbes (Γ_1) et (Γ_2) est, en général, compliquée et n'offre rien de remarquable, à moins que la courbe fixe sur laquelle roule (C) ne soit une circonférence. Dans ce cas, en effet, a étant le rayon de cette circonférence, les équations

$$r = a + f(a\theta) \,, \qquad r = a - f(a\theta) \,,$$

représentent respectivement, en coordonnées polaires, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) : le pôle est le centre de la circonférence.

Comme exemples simples, je signalerai celui de la spirale logarithmique pour laquelle les courbes (Γ_1) et (Γ_2) sont des spirales d'Archimède, et celui de la courbe de Delaunay. Considérons une courbe de Delaunay méridienne de la surface de révolution à courbure moyenne constante $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire une courbe intégrale de l'équation différentielle

$$(y^2 + b^2)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + 2ay = 0 ; \qquad (b^2 < a^2) .$$

De cette équation résulte l'équation intrinsèque de la courbe de Delaunay

$$\rho = \frac{a\left(a^2 - 2ac \cos \frac{s}{a} + c^2\right)}{c\left(c - a \cos \frac{s}{a}\right)}, \qquad (c^2 = a^2 - b^2) .$$

équation intrinsèque qui fut formée pour la première fois par Cesaro[1]. La courbe de Delaunay roulant sur une circonférence de rayon a, les courbes (Γ_1) et (Γ_2) ont pour équations polaires :

$$(\Gamma_1) \qquad r = 3a + \frac{a(a^2 - c^2)}{c(c - a \cos \theta)} ,$$

$$(\Gamma_2) \qquad r = -a - \frac{a(a^2 - c^2)}{c(c - a \cos \theta)} .$$

Ce sont donc deux conchoïdes focales de conique. Pour $a < c$, en posant $a = ce$, la courbe (Γ_2) d'équation polaire

$$r = a \cdot \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \theta} - a ,$$

est la conchoïde focale d'une ellipse de grand axe $2a$ et d'excentricité e, le rayon vecteur étant diminué du demi-grand axe : on reconnaît là une courbe remarquable qui a été étudiée par Jerabek dans *Mathésis* (1885, p. 110).

E. Turrière (Alençon).

[1] *Nouvelles Annales*, 1888, p. 219, et *Lezioni di Geometria intrinseca*, 1896, p. 69.

SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE DROITES

Dans cette Note, je détermine par un procédé élémentaire, quelles sont les congruences linéaires de droites qui peuvent se présenter.

1. — Soit Γ une congruence linéaire de droites. Par chaque droite de Γ, nous faisons passer deux plans π_1, π_2, déterminés par un procédé que nous ne spécifions pas. Les plans π_1, π_2, relatifs à toutes les droites de la congruence Γ forment respectivement des variétés V_1, V_2. Il peut se présenter les cas suivants :

1° Les variétés V_1, V_2 sont des développables et sont distinctes.

2° Les variétés V_1, V_2 se confondent en une seule développable V.

3° La variété V_1 est une développable et la variété V_2 une surface (enveloppe) proprement dite ne contenant pas V_1.

4° La surface (enveloppe) V_2 contient la développable V_1.

5° Les variétés V_1, V_2 sont des surfaces (enveloppes) distinctes.

6° Les variétés V_1, V_2 se confondent en une seule surface (enveloppe) V.

Nous allons examiner ces cas séparément.

2. — Lorsque les variétés V_1, V_2 sont des développables, toute droite, intersection de plans tangents à ces développables, est une droite de la congruence Γ. Par conséquent, pour que celle-ci soit d'ordre un, il faut et il suffit que V_1, V_2 se réduisent à des faisceaux de plans. Soient a_1, a_2 les droites, axes de ces faisceaux. Par un point de a_1 (ou de a_2) passent évidemment ∞^1 droites de Γ, par suite ces droites sont des

lignes singulières de la congruence. Il est évident qu'il n'existe pas d'autre ligne singulière.

Les droites s'appuyant sur deux droites fixes forment une congruence linéaire.

3. — Dans le cas où le lieu des plans π_1, π_2 est une seule développable, toute droite, intersection de deux plans de celle-ci, appartient à la congruence Γ. Par un point quelconque, il doit évidemment passer deux plans tangents à la développable : par suite, celle-ci est un cône du second ordre et toutes les droites de Γ passent par le sommet de ce cône.

Les droites issues d'un point fixe forment une congruence linéaire.

4. — Passons au troisième cas. La développable V_1 est nécessairement un faisceau de plans. En effet, chaque plan de V_1 contient une simple infinité de droites de Γ, donc si par un point P passaient plusieurs plans de V_1, chacun d'eux contiendrait au moins une droite de Γ passant par P, et la congruence ne serait pas linéaire. Le même raisonnement montre que les droites de Γ situées dans un plan de V_1 forment nécessairement un faisceau.

Ces faisceaux sont déterminés dans chaque plan de V_1 par des faisceaux de plans appartenant à V_2. On en conclut que V_2 est une surface réglée et qu'à un plan de V_1 correspond une droite de V_2. Inversement, supposons qu'à une droite de V_2 correspondent α plans de V_1; c'est-à-dire que les plans du faisceau V_1 se distribuent en des groupes de α plans et que les faisceaux de droites de Γ situés dans les plans d'un de ces groupes sont déterminés par le même faisceau de plans de V_2.

Par un point de l'axe a du faisceau V_1 passent évidemment une infinité de droites de Γ, donc a est une droite singulière de la congruence.

Sur chaque droite de la réglée V_2, il existe α points communs à une infinité de droites de Γ, ce sont les sommets des faisceaux situés dans les plans de V_1. La seconde ligne singulière c de Γ sera donc le lieu des intersections des droites[1]

[1] Il faut remarquer que a ne se trouve pas sur la réglée V_2, par hypothèse; ce cas est examiné dans le § suivant.

de V_2 et des plans de V_1 correspondants. Soit n l'ordre de la réglée V_2. Les points de rencontre de a avec la réglée V_2 sont évidemment des points multiples d'ordre α de c. Un plan de V_1 rencontre donc la courbe c en n points α^{uples} sur a et en un point simple extérieur à a, par suite c est d'ordre $\alpha n + 1$.

Les droites qui s'appuient sur une droite a *et sur une courbe d'ordre* αn + 1 *ayant* n *points multiples d'indice* α *sur* a, *forment une congruence linéaire.*

5. — Supposons actuellement que V_2 (doublement infinie) contienne V_1 (simplement infinie). On démontre comme précédemment que V_1 est nécessairement un faisceau de plans et que les droites de Γ situées dans un plan de ce faisceau forment elles-mêmes un faisceau. De tels faisceaux sont marqués par des faisceaux de plans d'axes d de V_2, de sorte que V_2 est encore une surface réglée.

La surface réglée V_2 contient la droite a, axe du faisceau de plans V_1, par hypothèse. Deux cas peuvent se présenter : Ou bien toute droite d rencontre la droite a, ou bien le contraire a lieu.

Dans le premier cas, supposons qu'à une droite d de V_2 correspondent n plans passant par a, alors tout point de a est le sommet de n faisceaux de droites de la congruence et cette droite est singulière.

Si l'on établit une correspondance (1, n) *entre les points d'une droite* a *et les plans passant par cette droite, les faisceaux de rayons dont les sommets sont sur* a *et dont les plans correspondent aux sommets, engendrent une congruence linéaire.*

Dans le second cas, supposons que n droites d s'appuient sur a et qu'à une droite d correspondent α plans de V_1; la congruence obtenue est la même que celle qui fait l'objet du § précédent.

6. — Supposons que V_1 et V_2 soient des surfaces (enveloppes) distinctes. Tout plan tangent à V_1 (ou à V_2) contient généralement un nombre fini α_1 (ou α_2) de droites de Γ; cette congruence est donc engendrée par les intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α_2, α_1). Supposons que n_1, n_2 soient les classes de V_1, V_2.

Soit P un point générique de l'espace. Par P_1 menons les plans tangents à V_1 ; les plans correspondants de V_2 forment une développable d'une certaine classe c_2. Les droites de Γ passant par P sont donc au nombre de $n_1 c_2$. Par suite $n_1 = c_2 = 1$ et par symétrie, $n_2 = c_1 = 1$. V_1 et V_2 sont donc des gerbes de plans.

Aux plans d'un faisceau de la gerbe V_1 correspondent les plans d'un faisceau de la gerbe V_2 et réciproquement ; par suite, les α_1 plans correspondants à un plan de V_1 sont situés dans un faisceau. On en conclut que $\alpha_1 = 1$ et de même que $\alpha_2 = 1$.

La congruence Γ est donc le lieu des intersections des plans correspondants de deux gerbes collinéaires.

Un point sera singulier pour la congruence Γ si les plans des gerbes V_1, V_2 passant par ce point se correspondent dans la collinéation. On sait qu'il y a une infinité de pareils points et que leur lieu est une cubique gauche passant par les sommets des gerbes V_1, V_2.

Soient π_1 un plan de V_1, π_2 son correspondant dans V_2. Désignons par P_1, P_2 les points de rencontre du plan π_1 avec la cubique gauche singulière en dehors du sommet de la gerbe V_1. Aux plans de V_1 passant par P_1 correspondent des plans de V_2 passant aussi par ce point, donc π_2 passe par P_1. De même, ce plan passe par P_2 et Γ est le lieu des bisécantes de la cubique singulière.

Les bisécantes d'une cubique gauche forment une congruence linéaire.

Nous avons supposé implicitement, dans le raisonnement précédent, que le faisceau de plans commun aux gerbes V_1, V_2 n'est pas son propre correspondant dans la collinéation. S'il en était autrement, l'axe de ce faisceau serait une droite singulière. La cubique singulière se décomposerait en cette droite et en une conique la rencontrant. La congruence Γ serait alors un cas particulier de la congruence étudiée au § 4.

7. — Supposons que les surfaces (enveloppes) V_1, V_2 coïncident en une surface V de classe n.

Tout plan tangent à V contient généralement un nombre

fini α de droites de Γ, cette congruence est donc le lieu des intersections des plans correspondants dans une transformation d'indices (α, α) d'une surface en elle-même.

Soit P un point quelconque de l'espace. Aux plans tangents à V passant par ce point correspondent les plans d'une développable de classe v, par suite Γ est d'ordre nv. On a donc $n = v = 1$ et Γ est une gerbe de droites.

Lucien GODEAUX (Liège).

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS D'UN THÉORÈME RELATIF AU CERCLE DES NEUF POINTS

---

1. — THÉORÈME. — *Le cercle des neuf points d'un triangle est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

En étudiant depuis quelques années le théorème que je viens d'énoncer, j'ai trouvé neuf démonstrations différentes qui me semblent encore nouvelles. La *première* de ces démonstrations a déjà été publiée dans *l'Enseignement mathématique* (VII[e] année, 1905, n° 6, p. 479-482) ; j'exposerai donc ici les huit autres à partir de la deuxième.

La 2[e] et la 3[e] démonstrations ne dépendent ni des théorèmes des aires, ni de ceux de la proportion ; les quatre autres, depuis la 4[e] jusqu'à la 7[e] sont encore indépendantes des théorèmes relatifs à la proportion.

Dans ce qui suit, je désigne toujours par A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par X, Y, Z les points de contact du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits avec les côtés BC, CA, AB. Il s'agit alors de démontrer que le cercle A' B' C' est tangent au cercle XYZ.

2[e] Démonstration.

Je suppose, pour fixer les idées, que le cercle XYZ soit le cercle inscrit.

Si le triangle était isocèle, les deux cercles A' B' C', XYZ se

toucheraient évidemment, je fais donc la démonstration dans le cas où le triangle est quelconque et je suppose, pour plus de commodité, que l'angle A soit plus petit que chacun des angles B et C.

Soient P, Q, R, les orthocentres des triangles AYZ, BZX, CXY. Décrivons les cercles circonscrits aux triangles PYR, PZQ et qui se coupent de nouveau au point L (fig. 1).

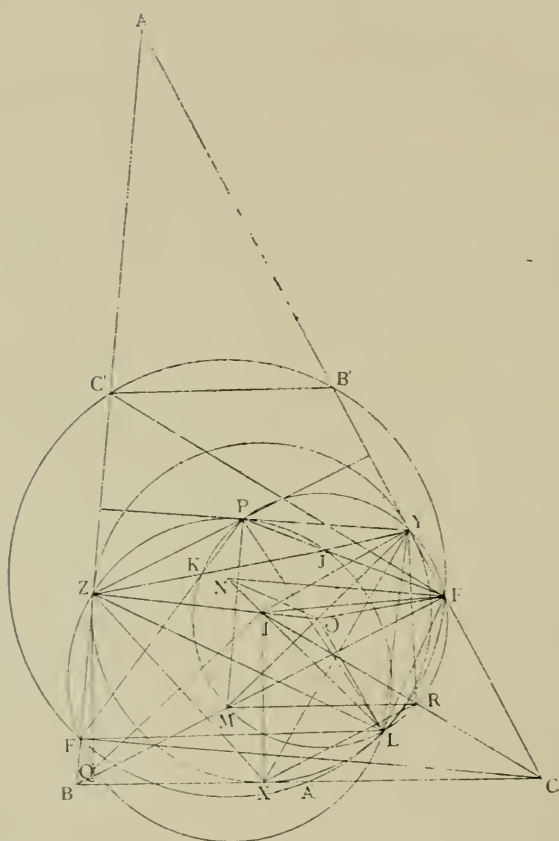


Fig. 1.

Je veux d'abord démontrer que ce point L est situé sur le cercle A′ B′ C′.

Désignons par I le centre du cercle XYZ et par E et F les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C du triangle ABC sur les côtés opposés ; menons par le point Y la parallèle

YM à la droite IB et soit M le point de rencontre de cette parallèle avec la droite BE.

YPZI, YRXI, YMBI étant tous des parallélogrammes, les deux quadrilatères YPMR, IZBX sont égaux, et par suite les angles YPM, YRM qui sont respectivement égaux aux angles IZB, IXB sont droits ; la droite YM est donc le diamètre du cercle PYR et ce cercle passe par le point E. Je remarque en plus que l'angle PMY inscrit dans le segment de cercle PRY est égal à l'angle ZBI.

On peut démontrer de la même façon que le cercle PZQ passe par le point F et que l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ est égal à l'angle YCI.

Si j'appelle J le point de rencontre de la droite PE avec YZ,

$$\widehat{PJZ} = \widehat{EJY} = (2 \text{ droits} - \widehat{CYZ}) - \widehat{JEY} = (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{PMY}$$

$$= (\widehat{ZBI} + \widehat{YCI}) - \widehat{ZBI} = \widehat{YCI} .$$

Ce dernier angle YCI étant égal à l'angle inscrit dans le segment de cercle PQZ, on voit que le point J est sur le cercle PZQ.

De même en appelant K le point de rencontre de PF avec YZ, on peut voir que ce point K est sur le cercle PYR.

Or, il est clair que le point J se trouve entre P et E et que le point K entre P et F, il s'en suit que deux points J et F situés sur le cercle PZQ se trouvent l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle PYR, le point de rencontre L est donc dans l'intérieur de l'angle EPF, et l'on a :

$$\widehat{ELF} = \widehat{PLE} + \widehat{PLF} ;$$

mais

$$\widehat{PLE} = \widehat{AYP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ABE} ,$$

et de même

$$\widehat{PLF} = \widehat{AZP} = 1 \text{ droit} - \widehat{A} = \widehat{ACF} ,$$

donc

$$\widehat{ELF} = \widehat{ABE} + \widehat{ACF} = 2 \,.\, \widehat{ABE} .$$

D'un autre côté, les quatre points B, C, E, F étant sur la même circonférence dont le centre est en A' :

$$\widehat{EA'F} = 2 \,.\, \widehat{ABE} , \quad \text{donc} \quad \widehat{ELF} = \widehat{EA'F} ,$$

ce qui montre bien que le point L est sur le cercle A' B' C'.

Je démontrerai ensuite que si le même point L est à l'intérieur de

l'angle EPF, il sera aussi à l'intérieur de l'angle YPZ ; donc $\widehat{YLZ}$ = [angle inscrit dans seg. PRY + angle inscrit dans seg. PQZ] $= \widehat{YCI} + \widehat{XBI} = \widehat{YXI} + \widehat{ZXI} = \widehat{YXZ}$.

Le point L est donc aussi sur le cercle XYZ.

Enfin, les deux cercles A′ B′ C′, XYZ qui ont un point commun L, comme on vient de voir, se toucheront en ce même point.

En effet, soient N le centre du cercle A′ B′ C′ et O celui du cercle PYR c'est-à-dire le point milieu de YM ; je joins chacun de ces points aux points E et L, j'aurai :

$$\widehat{OEM} = \widehat{OME} \ , \quad \text{OM est parallèle à IB} \ ,$$

donc

$$\widehat{OEB} = \widehat{IBE} \quad \text{et} \quad \widehat{IBE} = \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{A}) \ ,$$

mais

$$\widehat{C} = \widehat{AB'C'} \ , \quad \widehat{A} = \widehat{B'EC'} \ .$$

par suite

$$\widehat{IBE} = \frac{1}{2}\,\widehat{B'C'E} = \frac{1}{2}\,\widehat{NEB} \ .$$

Donc, la droite OE divise l'angle NEB en deux parties égales et on a la suite d'égalités :

$$\widehat{NLO} = \widehat{NEO} = \widehat{OEB} = \widehat{IBE} = \widehat{IYO} = \widehat{ILO} \ .$$

La dernière égalité $\widehat{NLO} = \widehat{ILO}$ qui montre que les trois points N, I, L sont en ligne droite prouve en même temps que les deux cercles A′B′C′, XYZ sont bien tangents au point L.

Je viens de démontrer le théorème dans le cas du cercle inscrit, en supposant que l'angle A soit plus petit que les angles B et C. Mais, en supprimant cette hypothèse et en prenant pour cercle XYZ le cercle exinscrit, on pourra faire la démonstration d'une façon presque entièrement analogue ; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Les trois cercles QXR, RYP, PZQ se coupent en un même point.

3e Démonstration.

III. — Soient D, E, F les pieds des perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C du triangle aux côtés opposés (fig. 2).

Prenons sur le côté AC de l'angle A, AK = AB et appelons J le point de rencontre avec BK de la bissectrice de l'angle A.

Les points C′, J, A′ étant respectivement les milieux de BA, BK, BC sont situés sur une même droite parallèle à AC.

Les deux points E, F se trouvent sur une même circonférence qui a BC pour diamètre, les deux cordes A′E, A′F du cercle A′B′C′ sont donc égales ; par suite C′J divise l'angle BC′E en deux parties égales.

Il en résulte que le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E, compris dans l'angle A et que le second point de

Fig. 2.

rencontre α de EJ avec le cercle A′B′C′ est le milieu de l'arc B′A′C′.

Supposons pour le moment que le cercle XYZ soit le cercle inscrit et que les grandeurs de trois angles du triangle soient dans l'ordre suivant :

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}.$$

Soient M le milieu de l'arc EA′C′ et L le second point de rencontre de MJ avec la circonférence A′B′C′.

Puisque

$$\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C},$$

on a

$$\widehat{B} > \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{A}) > \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$$

et comme

$$\widehat{C'B'A'} = \widehat{B} ,$$

$$\widehat{C'LM} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{EB'C'}) = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C}) = \frac{1}{2} (\widehat{A} + \widehat{B}) ,$$

$$\widehat{C'E\alpha} = \frac{1}{2} (2 \text{ droits} - \widehat{C'A'B'}) = \frac{1}{2} (\widehat{B} + \widehat{C})$$

on a :

$$\widehat{C'B'A'} > \widehat{C'LM} > \widehat{C'E\alpha} .$$

Donc le point M se trouve sur l'axe $A'\alpha$ et par suite L se trouve sur l'arc C'E.

Soient β le milieu de l'arc conjugué de l'arc B'A'E et γ le milieu de l'arc conjugué de l'arc C'A'F et soient Y' et Z' les points de rencontre respectifs de $L\beta$, $L\gamma$ avec AC, AB, on a :

$$\widehat{JLY'} = \widehat{JLE} - \widehat{\beta LE} ,$$

par suite l'angle JLY' est mesuré par

$$\frac{1}{2} \text{ arc } EA'C' - \frac{1}{2} \text{ arc } E\beta B' = \frac{1}{2} \text{ arc } B'A'C' ,$$

c'est-à-dire est égal à l'angle JEY' ; ce qui prouve que le quadrilatère JLEY' est inscriptible à un cercle.

De même, le quadrilatère JLC'Z' est inscriptible.

Donc

$$\widehat{JY'C} = \widehat{JLE} , \quad \widehat{JLC'} = \widehat{JZ'B} ,$$

les deux triangles AJY', AJZ' sont par suite égaux ; d'où l'on a :

$$AY' = AZ' .$$

Si donc on décrivait un cercle ayant son centre I sur AJ et tangent en Y' à AC, ce cercle serait nécessairement tangent en Z' à AB.

Or, puisque la différence des angles inscrits qui interceptent les arcs $\beta A'\gamma$ et $\beta L\gamma$ est égal à la différence des angles qui interceptent les arcs FA'B' et C'LE c'est-à-dire à l'angle A et que la somme des premiers angles est égale à deux droits, on a :

$$\beta L\gamma = 1 \text{ droit} + \frac{A}{2} ;$$

ce qui montre que le cercle I passe par le point L.

Le point de contact Y' du cercle I avec la sécante EB' du cercle

A′B′C′, le point de rencontre de ces deux cercles et le milieu β de l'arc EB′ étant ainsi situés sur une même droite, ces deux cercles se touchent au point L.

Il nous reste à prouver que le cercle I est le cercle inscrit au triangle ABC.

Or, chacun des angles IY′K, IJK étant droit, le quadrilatère JIY′K est inscriptible, on a donc :

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IJY'} = \widehat{EJY'} + \widehat{AJE} ;$$

mais les quatre points E, L, J, Y′ étant sur une même circonférence, on a :

$$\widehat{EJY'} = \widehat{ELY'} = \widehat{EL\beta} = \frac{1}{2}\,\widehat{EC'B'}$$

et J étant le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E :

$$\widehat{AJE} = \frac{1}{2}\,\widehat{AC'E} ,$$

donc

$$\widehat{IKY'} = \frac{1}{2}\,(\widehat{EC'B'} + \widehat{AC'E}) = \frac{1}{2}\,\widehat{AC'B'} = \frac{1}{2}\,\widehat{B} .$$

D'ailleurs,

$$\widehat{IKY'} = \widehat{IBA} , \qquad \text{donc} \qquad \widehat{IBA} = \frac{1}{2}\,\widehat{B} ,$$

Le point I est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

On a pu ainsi démontrer que le cercle des neuf points d'un triangle est tangent au cercle inscrit.

Si, au lieu de supposer $\widehat{B} > \widehat{A} > \widehat{C}$ comme je viens de faire, on suppose seulement $\widehat{B} > \widehat{C}$ et qu'à la place de M, β, γ, on mette les points diamétralement opposés, on pourra démontrer d'une façon presque analogue que le cercle A′B′C′ est tangent au cercle exinscrit dans l'angle A.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire. — Le point J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E.

4ᵉ Démonstration.

IV. — Appelons O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H l'orthocentre de ce triangle, N le centre du cercle A′B′C′ et I le centre du cercle XYZ. (Si le cercle XYZ est le cercle exins-

crit, ce cercle sera dans la suite celui qui est situé dans l'angle BAC à moins qu'on n'indique le contraire). (Fig. 3).

Soient α le second point d'intersection de la droite AI avec le cercle ABC, P le second point d'intersection de la droite αO avec le même cercle, D le pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite AC et E le point d'intersection de la droite A'D avec la droite AP.

Soient encore L le milieu de la droite AH et F, K, M les points où la droite menée par le point L perpendiculairement à la droite AI coupent respectivement les droites αA, αP, A'E.

Les deux points D et A' étant situés sur la même circonférence de diamètre CP et les deux angles A'PC, αAC dans le cercle O interceptant le même arc Cα, on a :

$$\widehat{A'DC} = \widehat{A'PC} = \widehat{\alpha AC} .$$

Donc A'D est parallèle à αA et est par suite perpendiculaire à LK.

Or, les deux quadrilatères A'LAO et LKPA sont des parallélogrammes (si l'angle A était droit, les deux droites A'L et LK coïn-

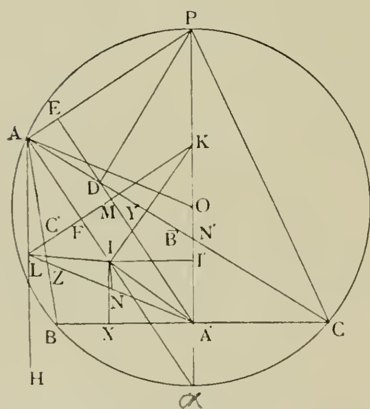


Fig. 3.

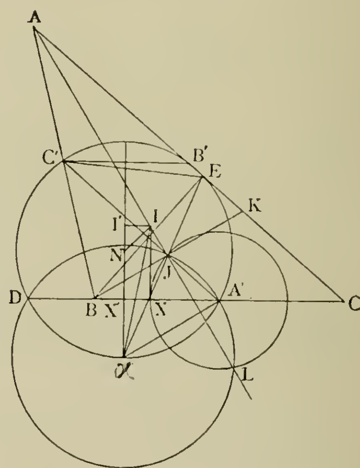


Fig. 4.

cideraient respectivement avec OA et AP), le triangle A'LK est donc un triangle isoscèle, égal au triangle OAP ; donc la base LK de ce triangle sera divisée en M en deux parties égales par la droite A'M.

En supposant maintenant $\widehat{B} > \widehat{C}$, on a dans le triangle ILK :

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2LK \,.\, FM = 2\,AP \,.\, AE\ ;$$

mais dans le triangle rectangle ADP, on a :

$$AP \,.\, AE = \overline{AD}^2,$$

et en appelant I' le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur A'P et N' le milieu de A'K, on aura :

$$AD = \frac{1}{2}(AC - AB) = NA' = II',$$

donc

$$\overline{IK}^2 - \overline{IL}^2 = 2\,.\,\overline{NA'}^2 = \overline{NA'}^2 + \overline{II'}^2.$$

D'où

$$\overline{IL}^2 + \overline{NA'}^2 = \overline{IK}^2 - \overline{II'}^2 = \overline{I'K}^2,$$

donc

$$\overline{IL}^2 + (\overline{NA'}^2 + \overline{IN}^2) = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2$$

donc encore :

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = \overline{I'K}^2 + \overline{I'A'}^2 = 2\,.\,\overline{I'N'}^2 + 2\,.\,\overline{N'A'}^2 = 2\,.\,\overline{I'N'}^2 + 2\,.\,\overline{NA'}^2.$$

D'un autre côté, on a dans le triangle ILA' ;

$$\overline{IL}^2 + \overline{IA'}^2 = 2\,.\,\overline{IN}^2 + 2\,.\,\overline{NA'}^2.$$

Des deux dernières égalités, on tire :

$$2\,.\,\overline{IN}^2 = 2\,.\,\overline{I'N'}^2.$$

Donc

$$IN = I'N' = N'A' \mp I'A' = NA' \mp IX$$

(les doubles signes correspondant, le premier au cas où I est le cercle inscrit et le second au cas où I est un cercle exinscrit. Il en sera de même dans la suite).

Ainsi donc la distance du centre des neuf points et du centre du cercle inscrit ou exinscrit étant égale à la différence ou à la somme des rayons de ces deux cercles, on voit alors que ces deux cercles se touchent.

5e Démonstration.

V. — Soient D et E les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des sommets A et B du triangle ABC sur leurs

côtés opposés, I le centre du cercle XYZ, J et K les points de rencontre respectifs avec les droites AI et AC de la droite menée de B perpendiculairement à AI, et enfin α le second point de rencontre de la droite EJ avec le cercle A′B′C′. (Fig. 4.)

On voit sur la figure que les quatre points α, A′, E, C′ sont sur la même circonférence, que le point J est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BEK, que C′A′ et AC sont parallèles et que J est le centre du cercle exinscrit au triangle AC′E comme j'ai indiqué dans la 3ᵉ démonstration ; et d'après ces quatre conditions on doit avoir :

$$\widehat{\alpha A' J} = \widehat{\alpha E C'} = \widehat{\alpha E K} = \widehat{JKE} = \widehat{BJC'} . \qquad (1)$$

Donc αA′ est parallèle à BK et par suite perpendiculaire à AI. Le second point de rencontre des cercles dont les centres sont respectivement en α et A′ et qui se coupent d'abord en J est donc sur la droite AI ; j'appelle L ce second point de rencontre.

Le parallélisme des droites C′A′ et AC donne :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha E K} , \qquad \text{mais} \qquad \widehat{\alpha E K} = \widehat{\alpha A' J}$$

d'après (1), donc :

$$\widehat{\alpha J A'} = \widehat{\alpha A' J} , \qquad \text{par suite} \qquad \alpha A' = \alpha J .$$

D'ailleurs, comme le point α est le milieu de l'arc B′A′C′ et que B′C′ et A′D sont parallèles, ce point α est aussi le milieu de l'arc A′D.

Il s'en suit que le cercle dont le centre est en α et ayant αJ pour rayon passe par les deux points A′ et D.

Ensuite les deux longueurs A′X et A′J étant chacune égale à la demi-différence de AC et AB sont égales entre elles.

Donc, le point X est sur la circonférence de centre A′ et de rayon A′J.

Or, dans le cercle JA′L, on a :

$$\overline{\alpha I}^2 - \overline{\alpha A'}^2 = IJ . IL ,$$

mais IX étant tangent au cercle JX′L,

$$IJ . IL = \overline{IX}^2 , \qquad \text{donc :} \qquad \overline{\alpha I}^2 = \overline{IX}^2 + \overline{\alpha A'}^2 . \qquad (2)$$

Maintenant, en désignant par N le centre du cercle A′B′C′, par I′ le pied de la perpendiculaire abaissée du point I à la droite

αN et par X′ le point de rencontre de αN et de A′D, on a dans le triangle αIN

$$\begin{aligned} \overline{IN}^2 &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N\,.\,(I'X' \pm \alpha X') \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N\,.\,I'X' - 2\,.\,\alpha N\,.\,\alpha X' \\ &= \overline{\alpha N}^2 + \overline{\alpha I}^2 \mp 2\alpha N\,.\,IX - \overline{\alpha A'}^2\,. \qquad (3) \end{aligned}$$

D'après les deux égalités (2) et (3), on aura :

$$\overline{IN}^2 = \overline{\alpha N}^2 + \overline{IX}^2 \mp 2\alpha N\,.\,IX = (\alpha N \mp IX)^2\,,$$

on a donc :

$$IN = \alpha N \mp IX\,,$$

ce qui montre que les deux cercles N, I se touchent.

Corollaire. — J est également distant des trois côtés du triangle A′ED.

6e Démonstration.

VI. — En désignant les différents points de la figure par les mêmes lettres que dans la 5e démonstration, menons la droite passant par les points X et J. (Fig. 5.)

Puisque A′J et A′X sont égaux et que A′J et CY sont parallèles, les deux triangles A′XJ et CXY sont des triangles isocèles et équiangulaires; donc XY et XJ coïncident entre eux.

Menons la droite qui passe par deux points α et X et qui rencontre de nouveau en L le cercle A′B′C′.

Fig. 5.

Les deux angles αLA′ et αA′X étant égaux, le cercle qui passe par les trois points A′, X, L touche la droite αA′ au point A′ ; donc

$$\alpha X\,.\,\alpha L = \overline{\alpha A'}^2\,.$$

Mais $\alpha J = \alpha A'$ comme on a indiqué dans la 5e démonstration, donc :

$$\alpha X\,.\,\alpha L = \overline{\alpha J}^2\,.$$

ce qui montre que la droite αJ touche le cercle passant par les trois points X, J, L et que par suite les deux angles αLJ, αJX sont égaux.

Si maintenant on mène par le point B′ deux droites respectivement parallèles aux deux droites XY et CB et coupant de nouveau le cercle A′B′C′ en M et C′, la droite XY faisant des angles égaux avec deux droites BC et AC, B′M divise en deux parties égales un des angles que font entre elles deux droites B′C′ et B′E; donc l'arc C′M est la moitié de l'arc C′E. De plus, comme l'arc C′α est la moitié de l'arc C′B′, l'arc αM est égal à la moitié de l'arc B′E (si le cercle XYZ était le cercle inscrit, l'arc αM aurait le même sens que l'arc B′E intercepté par l'angle inscrit B′C′E, et si le même cercle était exinscrit, l'arc Mα aurait le même sens que l'arc B′A′C′).

Si donc on mène du point α la droite parallèle à la droite XY, cette droite passera par le milieu β de l'arc B′E.

Les deux angles αJX et EJY sont égaux ou supplémentaires suivant que le cercle XYZ était inscrit ou exinscrit.

Dans ce qui suit, je suppose, pour plus de commodité, que l'angle B soit plus grand que l'angle C si XYZ était le cercle inscrit et plus petit que C si ce cercle était exinscrit.

Or, l'angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant $\frac{1}{2}$ arc B′E = arc αM suivant que ce cercle XYZ est inscrit ou exinscrit; donc l'angle αLJ est égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc αM et par suite la droite LJ passe par le point M.

Donc :

$$2 \text{ droits} - \widehat{JLE} = \widehat{MBE} = \widehat{JYE}$$

et le quadrilatère EYJL est inscriptible.

Donc :

$$\widehat{ELY} = \widehat{EJY} = 2 \text{ droits} - \widehat{J\alpha\beta} .$$

Ce dernier angle J$\alpha\beta$ est égal ou supplémentaire à l'angle inscrit interceptant la moitié de l'arc B′E, suivant que le cercle XYZ est inscrit ou exinscrit; donc la droite LY passe par le point β.

Les deux arcs αM et βE étant égaux, les deux arcs $\alpha\beta$ et ME seront aussi égaux, d'où :

$$\widehat{XLY} = \widehat{JLE} = 2 \text{ droits} - \widehat{XYE} ,$$

donc le point L est situé sur le cercle XYZ.

Si ensuite on mène au point L la tangente au cercle A′B′C′ et qu'on prenne sur cette tangente un point P de façon que les deux

points P et α soient de part et d'autre de la droite $L\beta$, on aura :

$$\widehat{PL\beta} = \widehat{L\alpha\beta} = \widehat{LXY} ,$$

donc la droite LP est tangente au cercle XYZ.

Ainsi donc les deux cercles A′B′C′ et XYZ, ayant une tangente commune à leur point de rencontre sont tangents entre eux.

7e Démonstration.

VII. — J'emploie encore les mêmes lettres que dans la 5e démonstration pour désigner les différents points de la figure ; de plus j'appelle J′ le point de rencontre des deux droites XY et αB′. (Fig. 6.)

Pour la commodité de la démonstration, je suppose l'angle B plus petit que l'angle C, si le cercle XYZ était le cercle inscrit et plus grand que l'angle C si ce cercle était le cercle exinscrit.

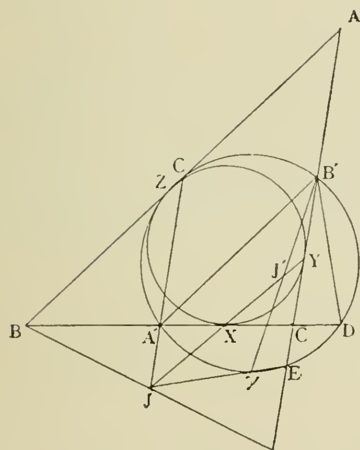


Fig. 6.

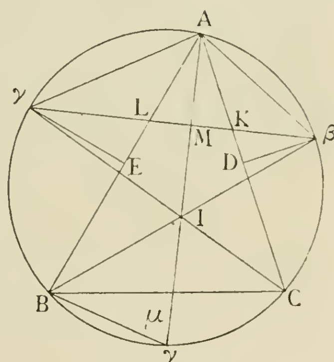


Fig. 7.

Alors, comme on a montré au commencement de la 6e démonstration, la corde de contact XY du cercle XYZ passe par le point J.

J'ai prouvé ensuite au courant de la même démonstration que l'angle aigu que font entre elles les deux droites αE et XY est égal à l'angle inscrit qui intercepte le demi-arc conjugué de l'arc B′A′E si le cercle XYZ est inscrit et à l'angle inscrit qui intercepte la moitié de l'arc B′A′E si le cercle est exinscrit. Or dans cette démonstration, la seule condition que doit remplir le point E

est que ce point soit le point d'intersection de la droite AC et du cercle $A'B'C'$; donc les angles que fait la droite XY avec chacune des deux droites αE et $\alpha B'$ sont égaux entre eux.

Donc :

$$\alpha J' = \alpha J = \alpha A' .$$

D'où, en suivant la même marche que dans la 6e démonstration, on pourra prouver que les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ se touchent entre eux.

8e Démonstration.

VIII. — *Lemme.* — En désignant par a, b, c les trois côtés d'un triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit, par r et I le rayon et le centre du cercle XYZ, on a

$$\overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2r^2 \mp 4Rr .$$

(Pour cette démonstration, on pourra choisir un quelconque des trois cercles exinscrits pour le cercle XYZ.)

Soient β, γ les points où deux droites BI et CI coupent à nouveau la circonférence ABC. Soient encore D, E les pieds respectifs des perpendiculaires abaissées de β sur AC et de γ sur AB ; et K, L, M les points de rencontre de $\beta\gamma$ avec AC, AB, AI. (Fig. 7.)

Les droites βA et γA étant respectivement égales aux droites βI et γI, la droite $\beta\gamma$ est perpendiculaire à la droite AI et divise cette droite en deux parties égales ; donc les deux triangles βAM et $A\gamma E$ sont semblables et l'on a :

$$\frac{AM}{\gamma E} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

De plus, la similitude des deux triangles βDA et $AM\gamma$ donne :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{\beta A}{A\gamma} .$$

Des deux propositions précédentes, on tire [1] :

$$\frac{\beta D}{AM} = \frac{AM}{\gamma E} , \quad \text{d'où} \quad \beta D \,.\, \gamma E = \overline{AM}^2 .$$

Donc, on a :

$$4\beta D \,.\, \gamma E = \overline{AI}^2 \tag{1}$$

[1] Quand I est le centre du cercle inscrit, cette relation (1) a déjà été donnée par l'un des mathématiciens de notre pays, nommé SHIRAISHI NAGATADA dans son ouvrage publié en 1827 sous le titre de *Shaméi Sampu*.

Maintenant soit α le nouveau point de rencontre de la droite AI et du cercle ABC et appelons respectivement μ, μ', μ'' la distance de α à la corde BC et les distances βD et γE. D'après les résultats précédents :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = 4\Sigma\mu'\mu'' .$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma\mu^2 = (\Sigma\mu)^2 - \Sigma(\overline{\alpha B}^2 - \frac{1}{4}a^2)$$

$$= \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu)^2 - 2R\Sigma\mu = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (\Sigma\mu - R)^2 - R^2 .$$

Mais, on a :

$$\Sigma\mu = 2R \mp r . \qquad (2)$$

D'où

$$\frac{1}{2}\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + (R \mp r)^2 - R^2 = \frac{1}{4}\Sigma a^2 + r^2 \mp 2Rr .$$

Donc [1] :

$$\Sigma\overline{AI}^2 = \frac{1}{2}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Cela étant, passons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, N le centre du cercle des neuf points et G le centre de gravité. (Fig. 8.)

Les trois points O, G, N sont en ligne droite et GO est égal au double de GN. Donc :

$$2\overline{IN}^2 + \overline{IO}^2 = 3\overline{IG}^2 + \overline{OG}^2 + 2\overline{NG}^2 = 3\overline{IG}^2 + \frac{3}{2}\overline{OG}^2 .$$

Mais, comme on sait :

$$\overline{IO}^2 = R^2 \mp 2Rr ,$$

$$3\overline{OG}^2 = \Sigma\overline{AO}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 ,$$

$$3\overline{IG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \Sigma\overline{AG}^2 = \Sigma\overline{AI}^2 - \frac{1}{3}\Sigma a^2 .$$

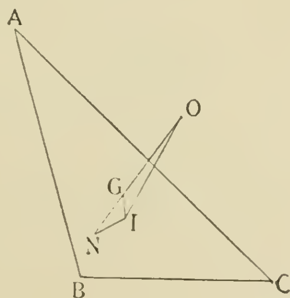


Fig. 8.

[1] Lorsque r représente le rayon du cercle inscrit, la formule (2) est donnée dans le traité de géométrie de ROUCHÉ et de COMBEROUSSE, 7e édition, 1re partie, p. 383.

Si dans la dernière égalité on met à la place de $\Sigma\overline{AI}^2$ l'expression donnée par le lemme précédent, on a

$$3\overline{IG}^2 = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr .$$

Donc :

$$2\overline{IN}^2 + R^2 \mp 2Rr = \frac{1}{6}\Sigma a^2 + 2r^2 \mp 4Rr + \frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{6}\Sigma a^2 .$$

D'où : $\overline{IN}^2 = \left(\frac{1}{2}R \mp r\right)^2$, par suite $IN = \frac{1}{2}R \mp r$.

Donc les deux cercles $A'B'C'$ et XYZ se touchent, c. q. f. d.

Corollaire. — En considérant le cercle inscrit dans l'angle A, on a :

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 \pm 4Rr = \frac{1}{4}(b + c \pm a)^2 .$$

Pour le voir, il suffit de comparer le résultat obtenu dans le lemme précédent avec la formule suivante :

$$\Sigma AI^2 = 3r^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + (p - a)^2 \quad \text{ou} \quad p^2 .$$

9e Démonstration.

IX. — Dans cette démonstration, nous supposons que les segments des droites AC et AB soient affectés de signes et soient AC, AB les sens positifs des segments.

Fig. 9.

Représentons respectivement par a, b, c les trois côtés BC, AC et AB du triangle ABC; soient E le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet B sur le côté opposé et, Q et R les points de

rencontre respectifs de l'axe radical des deux cercles ABC et XYZ avec AC et AB. (Fig. 9.)

On a alors d'après une propriété de l'axe radical :

$$QB' . QE = \overline{QY}^2 \quad \text{ou} \quad QB' . (QB' - EB') = (QB' - YB')^2 ,$$

d'où

$$QB' . (2YB' - EB') = \overline{YB'}^2 .$$

Par suite

$$\frac{QB'}{YB'} = \frac{YB'}{2YB' - EB'} \qquad (1)$$

mais

$$YB' = \frac{1}{2}(\mp a\ c) \qquad (2)$$

De plus :

$$2b . EB' = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) = 2(\pm a + c) . YB'$$

d'où

$$\frac{YB'}{EB'} = \frac{b}{\mp a + c}$$

donc :

$$\frac{YB'}{2YB' - EB'} = \frac{b}{\mp a + 2b - c} . \qquad (3)$$

Des relations (1), (2), (3), on tire :

$$\frac{QB'}{\frac{1}{2}(\mp a - c)} = \frac{\frac{1}{2}b \text{ ou } AB'}{\frac{1}{2}(\mp a + 2b - c)}$$

d'où

$$\frac{QB'}{AB'} = \frac{\pm a - c}{\mp a + 2b - c} .$$

Donc :

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB' - QB'}{-(QB' + AB')} = \frac{\mp a - b}{b - c} . \qquad (4)$$

En échangeant les segments de la droite AC et les segments correspondants de la droite AB, on aura :

$$\frac{AR}{BR} = \frac{\mp a - c}{c - b} = \frac{c \mp a}{b - c} . \qquad (5)$$

Appelons maintenant Q' le conjugué isotomique du point Q par rapport au côté AC du triangle ABC et R' le conjugué isotomique du point R par rapport aux côtés AB du même triangle ; soit K le

point où la droite Q′R′ coupe la droite BQ ; on a d'après le théorème de Ménélaüs :

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{QQ'}{AQ'} \cdot \frac{AR'}{BR'} = 1$$

et comme

$$\frac{QQ'}{AQ'} = \frac{-CQ + CQ'}{-CQ} = \frac{CQ + AQ}{CQ}, \quad \frac{AR'}{BR'} = \frac{BR}{AR}.$$

On tire des relations (4) et (5)

$$\frac{BK}{QK} \cdot \frac{\mp a - c}{b - c} \cdot \frac{b - c}{\mp a + c} = 1,$$

d'où :

$$\frac{BK}{QK} = -1.$$

Donc K est le milieu du segment BQ.

De même la droite Q′R′ rencontre le segment CR en son milieu.

Si ensuite on affecte de signes les perpendiculaires abaissées des trois points A, B et C sur la droite Q′R′ et qu'on les représente par L, M et N, on a en remarquant (4) et (5) :

$$\frac{L}{b - c} = \frac{M}{c \mp a} = \frac{N}{\pm a - b}.$$

Mais

$$\pm a \cdot (b - c) + b \cdot (c \mp a) + c \cdot (\pm a - b) = 0,$$

d'où

$$\pm a \cdot L + b \cdot M + c \cdot N = 0.$$

Donc la droite Q′R′ passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour multiples $\pm a$, b, c, c'est-à-dire par le centre I du cercle XYZ.

Donc, la droite QR est tangente au cercle XYZ, car si l'on suppose que QR ne soit pas tangente au cercle XYZ et que la tangente (autre que AC) menée du point Q au cercle XYZ rencontre la droite AB en un point R″, les milieux des deux segments BQ et CR″ et le point I seront, comme on sait, en ligne droite ; de plus, puisque, comme on vient de le démontrer, le milieu du segment BQ, celui de CR et le point I sont aussi en ligne droite et que le milieu du segment BQ et le point I ne coïncident pas, ces deux points déterminent une droite et le point I sera situé sur la droite passant par le milieu des deux segments CR et CR″, c'est-à-dire sur A′B′, ce qui est évidemment contraire à la vérité.

Corollaire I. — P, Q, R étant les points où la tangente commune au cercle des neuf points A'B'C' d'un triangle ABC et au cercle inscrit ou exinscrit XYZ, coupe les trois côtés de ce triangle et P', Q', R' les conjugués isotomiques de P, Q, R par rapport à ces côtés, la droite qui passe par P', Q', R' passe aussi par les milieux des diagonales du quadrilatère complet que forment les trois côtés du triangle et la tangente commune précédente et par l'un des points de Nagel du triangle.

Démonstration : On a déjà démontré que la droite Q'R' passe par les milieux des segments BQ, CR et le centre I du cercle XYZ ; et puisque l'anti-complémentaire du point I est un des points de Nagel, il suffit de prouver ici que Q'R' passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Or, de

$$(b - c) + (c \mp a) + (\pm a - b) = 0 ,$$

on tire

$$L + M + N = 0 .$$

Donc la droite Q'R' passe par le centre moyen des sommets du triangle ABC pour les multiples (chacun vaut 1), c'est-à-dire par le point G.

Corollaire II. — Les rapports des segments portés sur le côté AC du triangle ABC sont :

$$\frac{QC}{b - c} = \frac{Q'Q}{c \mp a} = \frac{QA}{\pm a - b} .$$

Y. Sawayama (Tokio).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La prochaine réunion de la Commission aura lieu à Milan, au commencement d'octobre 1911. La date et le programme seront publiés dans un prochain numéro.

Etats-Unis. — La sous-commission américaine vient de publier le 3me fascicule de son *Bulletin*. Il est consacré à un rapport préparatoire concernant la préparation du corps enseignant des collèges et des universités : N° 3. *Provisional Report of the Sub-*

Committee on the preparation of instructors for Colleges and Universities. (24 pages, extrait du *Bull. of the American Mathematical Society*, vol. XVII, n° 2).

Nous en donnerons un aperçu dans notre *Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales,* sous la rubrique « Notes et Documents ». (Voir, dans le présent fascicule, une première série de résumés).

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés et prix proposés.

La séance publique annuelle consacrée aux prix de l'Académie a eu lieu le 19 décembre 1910. M. Emile Picard, président, a ouvert la séance, par un très beau discours dans lequel il a rappelé la mémoire des membres disparus dans l'année. L'Académie a perdu MM. Bouquet de la Grye, Maurice Lévy, Gernez parmi les membres titulaires, deux membres libres MM. Rouché et Tannery, trois associés étrangers MM. Agassiz, Robert Koch et Schiaparelli, et sept correspondants étrangers.

La parole a ensuite été donnée à M. le Secrétaire perpétuel, pour la proclamation des prix.

PRIX DÉCERNÉS

Géométrie. — *Grand prix des sciences mathématiques* (3000 fr.). Aucun mémoire ne lui étant parvenu, l'Académie remet la question au concours pour l'année 1912. (V. plus loin, prix proposés).

Géométrie. — *Prix Francœur* (1000 fr.). — Le prix est décerné à M. Emile Lemoine.

Prix Poncelet (2000 fr.). — Le prix est décerné à M. Riquier, professeur à la Faculté des Sciences de Caen, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Mécanique. — *Prix Montyon* (700 fr.). — Le prix est décerné à M. J. Gaultier pour les perfectionnements qu'il a apportés aux appareils et aux méthodes des levers de plans.

Navigation. — *Prix extraordinaire de la marine* (6000 fr.), destiné à récompenser tout progrès de nature à accroître l'efficacité de nos forces navales. — Le prix est réparti de la manière suivante :

Un prix de *trois mille francs* à M. G. Hilleret, pour les services qu'il a rendus à la Marine, tant par son enseignement à l'Ecole Navale que par les progrès qu'il a fait faire à l'Astronomie nautique ;

Un prix de *quinze cents francs* à M. J.-L.-H. Lafrogne, lieutenant de vaisseau, qui a imaginé un indicateur continu de la distance, qui tient automatiquement compte de la vitesse relative du but et du tireur ;

Un prix de *quinze cents francs* à M. J. Lecomte, lieutenant de vaisseau, qui a inventé divers instruments destinés à résoudre, dans toutes ses parties, le problème du réglage de tir à bord d'un navire en marche, contre un but également mobile.

Astronomie. — *Prix Guzman.* — Le prix n'est pas décerné. Sur la proposition de la Commission, l'Académie décide d'attribuer sur les arrérages un prix de 12,000 fr. à feu Maurice Lœwy, de son vivant membre de l'Académie et du Bureau des Longitudes, directeur de l'Observatoire, pour l'ensemble de ses travaux scientifiques.

Le *Prix Lalande* est partagé entre MM. Cowell et Crommelin pour leurs belles recherches sur la comète de Halley;

Le *Prix Valz* est décerné à M. St. Javelle, de l'Observatoire de Nice, pour l'ensemble de ses travaux.

La *Médaille Janssen* est offerte à M. le prof. William-Wallace Campbell, directeur de l'Observatoire Lick, pour ses travaux de spectroscopie stellaire.

Histoire des Sciences. — Le *Prix Binoux* est attribué à M. Ernest Lebon, pour l'ensemble de ses travaux relatifs à l'Histoire des Sciences et particulièrement à l'Histoire de l'Astronomie.

L'Académie attribue un encouragement de 500 fr. à MM. Anthiaume et Sottas pour leur travail intitulé : « L'Astrolabe à quadrant du Musée des Antiquités de Rouen.

Prix généraux. — *Prix Jérôme Ponti.* — Le prix est attribué à M. H. Andoyer, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, membre du Bureau des Longitudes, pour le travail considérable qu'il poursuit en ce moment par sa publication de Nouvelles tables trigonométriques fondamentales. Quelques extraits du Rapport de la commission permettront de donner un aperçu de cet important travail :

« Sous les auspices de l'Université de Paris et à l'aide des ressources fournies par la fondation Commercy, M. Andoyer a commencé à publier de *Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales* contenant les logarithmes des lignes trigonométriques de centième en centième du quadrant avec 17 décimales, de 9 minutes en 9 minutes avec 15 décimales et de 10 secondes en 10 secondes avec 14 décimales. Quelques mots suffiront à justifier l'intérêt et l'utilité de cette publication.

« On possède aujourd'hui un grand nombre de Tables de logarithmes trigonométriques; à quelques exceptions près, qui ne correspondent qu'à des Tables abrégées de très faible étendue, elles ne sont que des extraits des trois Ouvrages originaux suivants :

1° La *Trigonometria Britannica* de Henri Briggs, publiée par Gellibrand à Gouda en 1633. — 2° La *Trigonometria Artificialis* d'Adrien Vlacq, publiée la même année à Gouda. — 3° Les *Tables du Cadastre*, calculées en France sous la direction de Prony de 1794 à 1799, mais non publiées.

« Examinant dans le plus grand détail ces œuvres originales, M. Andoyer a rappelé que les deux premières, tout au moins, sont entachées d'erreurs,

qui en font des instruments peu sûrs. Elles répondent pourtant à des besoins incontestables, comme le prouvent les nouveaux tirages faits, depuis 1794, du célèbre *Thesaurus Logarithmorum Completus* de Vega, qui ne diffère pas essentiellement de l'œuvre de Vlacq. Il y aurait incontestablement grand intérêt à amener les Tables trigonométriques à un degré plus élevé de perfection; car, dans certaines recherches, il est nécessaire d'obtenir sans des calculs trop laborieux plus de 10 décimales exactes, et de plus l'Astronomie et la Géodésie ont un besoin chaque jour plus urgent de Tables à 8 ou 9 décimales qu'il serait impossible d'établir actuellement d'une façon commode avec une précision suffisante. Telles sont les raisons qui ont déterminé M. Andoyer à calculer de nouvelles Tables plus étendues, exemptes des erreurs et des imperfections diverses qu'on peut constater dans les anciennes. Son travail, qui l'a occupé pendant près de deux ans, est aujourd'hui terminé...

Tous les calculs nécessaires à ces Tables, pour lesquels il n'a été emprunté que les valeurs de π et du module M, ont été faits entièrement à nouveau par M. Andoyer, sans aucun auxiliaire, même mécanique, de juillet 1908 à mars 1910... L'impression, qui a été commencée au mois d'avril dernier, durera un an environ...

« Décrivons sommairement les Tables elles-mêmes.

« La Table I est une Table auxiliaire d'une seule page permettant le calcul relativement rapide des logarithmes des nombres avec 18 décimales.

« La Table II contient le développement numérique, calculé à nouveau (et cette précaution ne s'est pas trouvée inutile), des formules données par Euler pour le calcul des logarithmes des lignes trigonométriques, dans l'*Introductio in Analysin Infinitorum*.

« La Table III contient les log sin, log cos, log tang, de centième en centième du quadrant, calculés directement par les formules d'Euler avec 17 décimales exactes. De plus elle est préparée pour l'interpolation; car on y trouve, en même temps que les logarithmes trigonométriques, leurs *variations* des divers ordres, c'est-à-dire les coefficients tayloriens correspondants. Ces *variations* ont été calculées en partant des différences par application de la formule de Stirling.

« La Table IV résulte de la précédente et donne avec 15 décimales exactes les logarithmes trigonométriques de 9 minutes en 9 minutes sexagésimales. De plus, on y trouve les *variations*, pour l'intervalle de 10″, de la fonction log cos de 18′ en 18′.

« La Table V est la Table proprement dite; elle donne, en même temps que leurs premières différences, les logarithmes trigonométriques avec 14 décimales de 10 secondes en 10 secondes. Les logarithmes cosinus ont été calculés directement à l'aide des cinq premières différences successives jusqu'à 45°. Les log sinus et log tang en résultent par application des formules

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x\ , \qquad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot$$

« La Table V *bis*, qui terminera l'Ouvrage, contient de la même façon les fonctions connues S et T, calculées directement jusqu'à 3° ».

Fonds Bonaparte. — Au nombre des onze subventions accordées par le Fonds Bonaparte nous trouvons une somme de 5000 fr, attribuée à M. Hartmann, lieutenant-colonel d'Artillerie, en retraite,

lauréat de l'Institut (Prix de mécanique de la Fondation Montyon 1902). Cette subvention est destinée à lui permettre de poursuivre son étude expérimentale du développement et de la répartition des forces élastiques dans les corps déformés par des efforts extérieurs, pour toutes les valeurs de ces efforts.

PRIX PROPOSÉS

Programme des prix proposés pour les années 1912, 1913, 1914, 1915 et 1916.

Géométrie. *Grand Prix des sciences mathématiques* (3000 fr.; prix biennal à sujet variable).

1° Prix de 1910 prorogé à 1912. — L'Académie avait mis au concours, pour l'année 1910, la question suivante : *On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions méromorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique.* L'Académie demande, à défaut d'une solution complète du problème, d'indiquer des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Aucun Mémoire ne lui étant parvenu, l'Académie remet la question au concours pour l'année 1912.

2° Question de prix pour l'année 1912. — L'Académie rappelle qu'elle a mis au concours, pour l'année 1912, la question suivante : *Perfectionner la théorie des équations différentielles algébriques du deuxième ou du troisième ordre, dont l'intégrale générale est uniforme.*

Prix Francœur (1000 fr.). — Ce prix *annuel* sera décerné à l'auteur de découvertes ou de travaux utiles au progrès des *Sciences mathématiques pures ou appliquées.*

Prix Poncelet (2000 fr.). — Décerné alternativement à un ouvrage sur les mathématiques pures ou sur les mathématiques appliquées. Le prix Poncelet sera décerné en 1912 à un ouvrage sur les mathématiques pures et en 1913 à un ouvrage sur les mathématiques appliquées.

Prix Bordin (3000 fr.). Prix biennal à sujet variable. — L'Académie met au concours, pour l'année 1913, la question suivante : *Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques.*

Mécanique. *Prix Montyon* (700 fr.). Ce prix *annuel* est fondé en faveur de « celui qui, au jugement de l'Académie, s'en sera rendu « le plus digne, *en inventant ou en perfectionnant des instruments « utiles aux progrès de l'Agriculture, des Arts mécaniques ou des « Sciences* ».

Prix Fourneyron (1000 fr.). Prix biennal à sujet variable.

1° Prix de 1910 prorogé à 1912. — L'Académie avait mis au concours, pour l'année 1910, la question suivante : *Étude expérimentale et théorique des effets des coups de bélier dans les tuyaux élastiques.* — Le prix n'a pas été décerné. L'Académie a décidé de maintenir la question au concours et de proroger le prix de 1910 à l'année 1912.

2° Question de prix pour l'année 1912. — L'Académie rappelle qu'elle a mis au concours, pour l'année 1912, la question suivante : *Théorie et expériences sur la résistance de l'air, applicables à l'aviation.*

Prix Boileau (1300 fr.). — Ce prix *triennal* est destiné à récompenser les *recherches sur les mouvements des fluides, jugées suffisantes pour contribuer au progrès de l'Hydraulique.* A défaut, la rente triennale échue sera donnée, *à titre d'encouragement* à un savant estimé de l'Académie et choisi parmi ceux qui sont notoirement sans fortune. L'Académie décernera le prix Boileau, s'il y a lieu, en 1912.

Astronomie. — *Prix Pierre Guzman* (100,000 fr.). — Décerné à celui qui aura trouvé le moyen de communiquer avec un astre autre que la planète Mars. Prévoyant que le prix de cent mille francs ne serait pas décerné tout de suite, la fondatrice a voulu, jusqu'à ce que ce prix fût gagné, que les intérêts du capital, cumulés pendant cinq années, formassent un prix, toujours sous le nom de Pierre Guzman, qui serait décerné à un savant français, ou étranger, qui aurait fait faire un progrès important à l'Astronomie. Le prix quinquennal, représenté par les intérêts du capital, sera décerné, s'il y a lieu, en 1915.

Prix Lalande (540 fr.). — Ce prix annuel doit être attribué à la personne qui, en France ou ailleurs, aura fait l'observation la plus intéressante, le mémoire ou le travail le plus utile aux progrès de l'Astronomie.

Prix Valz (460 fr.). — Ce prix annuel est décerné à l'auteur de l'observation astronomique la plus intéressante qui aura été faite dans le courant de l'année.

Prix Janssen. — Ce prix biennal, qui consiste en une médaille d'or destinée à récompenser la découverte ou le travail faisant faire un progrès important à l'astronomie physique, sera décerné en 1912.

Prix G. de Pontécoulant (700 fr.). — Ce prix biennal, destiné à encourager les recherches de mécanique céleste, sera décerné, s'il y a lieu, dans la séance publique annuelle de 1913.

Histoire des Sciences. *Prix Binoux* (2000 fr.). — Ce prix annuel est destiné à récompenser l'auteur de travaux sur l'Histoire des Sciences.

Prix généraux. — *Prix Petit d'Ormoy.* (Deux prix de 10,000 fr.).

— L'Académie a décidé que, sur les fonds produits par le legs Petit d'Ormoy, elle décernera tous les deux ans un prix de dix mille francs pour les Sciences mathématiques pures ou appliquées, et un prix de dix mille francs pour les Sciences naturelles. Elle décernera les prix Petit d'Ormoy, s'il y a lieu, dans sa séance publique de 1913.

Prix Jérôme Ponti (3500 fr.). — Ce prix *biennal* sera décerné, en 1912, *à l'auteur d'un travail scientifique dont la continuation ou le développement seront jugés importants pour la Science.*

Prix Leconte (50,000 fr.). — Ce prix doit être donné, *en un seul prix, tous les trois ans, sans préférence de nationalité :* 1° Aux auteurs de découvertes nouvelles et capitales en *Mathématiques, Physique, Chimie, Histoire naturelle, Sciences médicales ;* 2° Aux auteurs d'applications nouvelles de ces sciences, applications qui devront donner des résultats de beaucoup supérieurs à ceux obtenus jusque-là. — L'Académie décernera le prix Leconte, s'il y a lieu, en 1914.

Les *conditions* communes à tous les concours sont indiquées dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences, du 19 décembre 1910, p. 1309.

Détermination mathématique des phénomènes psycho-biologiques et socio-biologiques.

Une *Commission permanente internationale de détermination mathématique des phénomènes psycho-biologiques et socio-biologiques* a été constituée sur la décision du Congrès international de Psychologie de Genève, et le siège en a été fixé à Paris, à l'Institut Général Psychologique.

Cette Commission est présidée par M. Henri Poincaré, membre de l'Institut. La première question mise à l'ordre du jour a été celle de la rédaction d'un *Manuel d'Interpolation* destiné aux savants qui ne sont pas particulièrement familiarisés avec les méthodes mathématiques.

On visera spécialement, dans ce Manuel, les procédés applicables aux calculs des résultats numériques recueillis dans les sciences biologiques, physiologiques, psychologiques et sociologiques.

Dans une récente circulaire, la Commission demande qu'on veuille bien lui indiquer les problèmes qu'il conviendrait principalement d'envisager dans ce travail, afin qu'il en soit tenu compte lors de l'élaboration du Manuel. Les réponses doivent être adressées au secrétaire-général, M. S. Yourіévitch, 14, rue de Condé, Paris (6e).

Société italienne pour l'avancement des sciences.

La réunion annuelle de la *Società italiana per il progresso delle scienze* a eu lieu à Naples, du 15 au 21 décembre 1910. Le président, M. Ciamician, a tenu le discours d'ouverture sur *La coopération des sciences*. Pour ce qui se rapporte aux mathématiques pures et appliquées, il y a lieu de signaler les communications suivantes :

E. Bompiani, Contribution à la Géométrie projective différentielle des hyperespaces.

M. O. Corbino, Un demi-siècle après la découverte de l'anneau de Pacinotti.

A. Garbasso, L'émission de la lumière.

A. De Nora, Quelques remarques sur la méthode Müller-Breslau pour le calcul des systèmes réticulaires dans l'espace.

L. Silberstein, Sur la masse mutuelle de deux électrons.

C. Somigliana, La constitution de la Terre au point de vue de l'élasticité

A. Tummarello, Types de systèmes homaloïdiques de surfaces.

G. Vacca, Sur l'histoire des mathématiques dans l'extrême Orient et sur les contributions de MM. T. Hayashi et Y. Mikami.

Jules Tannery.

Le 11 novembre dernier une attaque d'hémiplégie emportait en quelques heures M. J. Tannery, sous-directeur de l'Ecole Normale Supérieure. La mort l'a frappé debout : dans l'après-midi du 10, il avait fait une conférence à l'Ecole et avait assisté à une séance du Conseil de l'Université ; le soir il dut s'aliter, et le lendemain, à 3 heures du matin, il n'était plus. C'est une grande perte pour la science française, pour l'Ecole et pour toute l'Université.

M. Jules Tannery, après avoir été élève de l'Ecole Normale Supérieure de 1866 à 1869 et chargé de cours aux Lycées de Rennes, de Caen et au Lycée Saint-Louis, fut reçu docteur ès sciences en 1874. Il suppléa M. Bouquet dans la chaire de Mécanique-Physique d'octobre 1875 à juillet 1880. Il entra ensuite à l'Ecole Normale ; maître de conférences en 1881, il fut nommé sous-directeur en 1884 et occupa ce poste d'honneur jusqu'à son dernier jour. Il était en outre professeur à l'Ecole Normale Supérieure d'enseignement secondaire des jeunes filles à Sèvres depuis sa fondation et membre d'un grand nombre de commissions et comités : (Comité consultatif, Conseil de l'Université de Paris, Comité de patronage des hautes études, Conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique, des Ecoles de la Marine, etc.). Enfin, le 11 mars 1907, il fut élu membre libre de l'Académie des Sciences en remplacement de M. Brouardel.

Je n'ai pas qualité pour juger l'œuvre scientifique de M. J. Tannery, je vais me contenter d'indiquer ici ses principaux travaux et publications. Sa thèse de doctorat était un mémoire sur les équations différentielles linéaires (*Annales de l'E. N.*, 2[e] série, t. IV), il publia sur le même sujet et sur d'autres points de la théorie des fonctions, quelques notes et Mémoires (*C. R.*, Académie des Sciences, 1878, 1882 ; *Annales de l'E. N.*, t. VIII ; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1876, 77, 81, etc.). En collaboration avec M. Molk, il fit paraitre un important Traité sur la *Théorie des fonctions elliptiques* (Gauthier-Villars, éd., 1893-96-98-1901).

Mais, comme il l'a repété lui-même bien souvent, M. Tannery a cherché surtout « à divulguer et à coordonner les vérités acquises plutôt qu'à en découvrir de nouvelles ». C'est à cet ordre de préoccupations que l'on doit des livres renommés qui ont eu sur l'enseignement en France une influence exceptionnelle. Il faut mentionner tout particulièrement l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle* (Hermann, éd.), dont la 1[re] édition a paru en 1880 et dont la 2[me] édition, complètement modifiée, vient de paraître récemment (1[er] tome 1905, 2[me] tome 1910). L'importance de ce livre est incontestable ; il suffit, pour s'en faire une idée, de comparer les anciens et les nouveaux traités français de Calcul Différentiel ou même les éditions successives d'un même traité. M. Tannery a publié d'autres ouvrages plus directement destinés à l'Enseignement et très répandus : *Leçons d'Arithmétique* (Armand-Colin, 1894) ; *Leçons d'Algèbre et d'Analyse* (Gauthier-Villars, 1906) ; *Notions de Mathématiques* (Delagrave, 1903). Il a écrit aussi un assez grand nombre d'articles de pédagogie ou de philosophie scientifique (*Revue générale des Sciences, Revue de Métaphysique, Revue du Mois, Revue de Paris, Revue de l'Enseignement des Sciences, L'Enseignement Mathématique*, etc.), notamment sur l'Infini mathématique, la science livresque, la méthode en Mathématiques, la Psycho-physique, le rôle du Nombre dans les Sciences. Enfin, une grande partie de son temps fut consacrée depuis 34 ans à la rédaction du *Bulletin de Mathématiques* (en collaboration avec MM. Houel et Darboux, puis MM. Darboux et Picard). Il faudrait citer toutes les analyses qu'il y a publiées : en parlant des auteurs « avec la déférence que méritent, disait-il, ceux qui contribuent à augmenter le domaine scientifique », il savait mettre en évidence avec une rare justesse et une rare clarté le caractère propre de chaque livre et de chaque auteur.

Membre du Conseil Supérieur de l'Instruction publique et de nombreuses commissions, il s'occupait beaucoup de l'Enseignement secondaire scientifique, et il joua en particulier un grand rôle dans les réformes de 1902 et 1905. Par les conférences qu'il faisait à l'Ecole Normale, il contribuait pour une large part à l'éducation pédagogique des futurs professeurs et nombreux sont

ses anciens élèves qui, devenus depuis des mathématiciens distingués, se plaisent à reconnaître l'influence qu'il a exercée sur leur jeune talent.

M. Tannery n'était pas seulement pour ses élèves un guide et un maître, il avait l'habitude de les appeler ses amis et il fut réellement leur ami à tous. Il n'a laissé parmi eux que des regrets et sa mort est un véritable deuil de famille pour les anciens normaliens.

A. Chatelet (Paris)
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

Julius Petersen.

Le Danemark a perdu l'un de ses meilleurs mathématiciens, Julius Petersen, décédé le 5 août 1910. Né le 16 juin 1839, il était contemporain de M. Zeuthen et de Thiele et contribua avec eux au développement des mathématiques en Danemark pendant le dernier tiers du XIXe siècle. De 1871 à 1887 il enseigna à l'Ecole polytechnique de Copenhague, puis il devint professeur à l'Université en 1887 et y resta jusqu'en 1909.

Si son nom est bien connu en dehors des frontières du Danemark, cela tient beaucoup à ses excellents manuels, en particulier à son livre intitulé *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques, avec application à plus de 400 problèmes*, dont la première édition danoise parut en 1866. Les traductions ont paru, en plusieurs éditions, en allemand, français, anglais, italien, russe et hollandais. Malgré son caractère élémentaire, cet Ouvrage donne une idée des remarquables qualités pédagogiques de l'auteur. La systématisation des méthodes a sans doute une valeur didactique propre, mais il est certain qu'il faut également attacher un grand prix à la force stimulante que donne la résolution de problèmes isolés, que Petersen présente souvent d'une façon extrêmement élégante. Il cherche avant tout une vue d'ensemble de ce qui est essentiel sans se perdre dans les détails et les particularités ; aussi trouve-t-on rarement dans son Ouvrage la discussion des conditions de possibilité d'un problème. Ce que nous disons ici de son travail de jeunesse, peut encore être appliqué en grande partie à ses travaux ultérieurs, qui s'étendent presque sur toutes les branches des mathématiques, où il avait choisi souvent les problèmes les plus difficiles.

Mentionnons, à titre d'exemples, quelques-uns de ses travaux :

Sa *thèse* (1871) traite des équations résolubles à l'aide de racines carrées et des constructions résolubles à l'aide de la règle et du compas. Dans la *théorie des nombres*, dont il s'est occupé jusqu'à ces dernières années, il a donné une démonstration très simple du théorème de réciprocité (*Am. Journ. of Math.*, 2, p. 285, 1879).

Dans la *théorie des invariants*, en examinant les travaux de Cayley et de Sylvester, dont le but est de fournir à la théorie une nouvelle base élémentaire, il a découvert une erreur fondamentale (*M. A.*, 35, p. 110, 1890). Les *Acta mathematica* (t. 15, p. 193, 1891) contiennent un remarquable mémoire intitulé *Theorie der regulären Graphs*, dans lequel il expose avec beaucoup d'élégance des problèmes difficiles de Analysis Situs.

En dehors de ces manuels élémentaires qui ont été pendant longtemps les seuls des écoles danoises, Petersen a écrit plusieurs traités, qui ont été également traduits à l'étranger : *Theorie der algebr. Gleichungen (Théorie des équations algébriques)*; *Vorlesungen über Statik, Kinematik u. Dynamik*, et ses *Vorlesungen über Funktionstheorie*. Partout on retrouve les qualités caractéristiques de l'auteur et ce même effort d'atteindre toujours ce qui est essentiel, et cela sous une forme qui lui est personnelle. Il est possible que sa manière concise d'écrire embarrasse quelquefois les commençants, par contre elle permet le libre développement de l'individualité du maître.

Le talent mathématique de Petersen repose en grande partie sur une intuition mathématique très développée, en particulier dans le domaine géométrique. On peut dire qu'il resta étranger à la tendance arithmétisante, dont le but était d'obtenir une plus grande rigueur logique et d'atteindre un exposé plus complet au point de vue systématique. Aussi, malgré ses remarquables qualités dans des points de détails, sa *Théorie des équations algébriques* a déjà quelque peu vieilli, et ses Leçons sur la théorie des fonctions ne satisfont pas partout les idées modernes au point de vue de la rigueur.

Par sa manière franche, bien que parfois étroite d'exprimer son opinion, Petersen s'était acquis beaucoup d'amis. Une maladie le minait depuis longtemps et ébranla à tel point sa santé, que sa mort est considérée comme une délivrance par tous ses amis.

Poul Heegaard (Copenhague).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — La *Société mathématique de Berlin* vient d'organiser une séance solennelle en l'honneur de M. E. Lampe, à l'occasion du 70e anniversaire du savant professeur et directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et de l'*Archiv der Mathematik u. Physik*.

— M. Heffter, professeur à l'Université de Kiel, a accepté un appel de l'Université de Fribourg en Br.

M. Kœbbe, privat-docent à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur extraordinaire et assistant de l'Institut mathématique à l'Université de Leipzig.

M. Neumann, professeur à l'Université de Leipzig, prend sa retraite.

Privat-docents. — On été admis en qualité de privat-docents, M. Bieberbach, à l'Université de Königsberg et M. Neuendorff, à l'Université de Kiel.

Angleterre. — M. K. R. Hassé, M. A., est nommé Fellow de St-John's College, à Cambridge.

Société royale. — M. H. F. Baker, F. R. S., a obtenu la *Médaille Sylvester* pour ses recherches dans la Théorie des Fonctions abéliennes et pour son édition des œuvres complètes de Sylvester.

Belgique. — *Académie de Belgique.* La classe des sciences mathématiques et physiques a élu, en remplacement de feu les membres associés Canizzaro, de Rome, et Schiaparelli, de Milan : MM. Ed. Branly, professeur à l'Ecole des hautes études de Paris, et Emile Picard, président de l'Académie des sciences de Paris.

M. J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège, est admis à l'éméritat ; il continuera son enseignement jusqu'à la fin de l'année académique 1910-1911.

M. P. Mansion, professeur et inspecteur des études à l'Université de Gand, est admis à l'éméritat. Il est remplacé par MM. A. Demoulin (Analyse) et A. Claeys (Calcul des probabilités et Histoire des mathématiques).

M. J. van Rysselberghe, professeur à l'Université de Gand, est nommé inspecteur des études aux Ecoles du Génie civil et des Arts et Manufactures annexées à l'Université de Gand.

France. — *Faculté des Sciences de Paris :* M. Cahen, professeur au Collège Rollin, a été chargé d'un cours sur la Théorie des Nombres, institué par une fondation anonyme. — M. Lebesgue, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, est nommé maître de conférences d'Analyse à la Faculté des Sciences de Paris. — M. Vessiot, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, est chargé, pour l'année 1910-1911, d'un cours de Calcul différentiel et intégral.

Ecole normale supérieure : M. E. Borel, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, a été nommé sous-directeur, en remplacement de M. J. Tannery, décédé.

— M. Léon Lecornu, professeur à l'Ecole polytechnique, est nommé membre de l'Académie des Sciences, section de mécanique, en remplacement de M. Maurice Lévy.

— Le Jury international de l'Exposition universelle internationale de Bruxelles a décerné une *Médaille d'or* à M. Ernest Lebon pour ses publications en Mathématiques et en Histoire des Sciences.

— M. Dulac, professeur à la Faculté des Sciences d'Alger, est nommé à la Faculté des Sciences de Lyon.

— M. Husson, professeur de Mécanique rationnelle et appliquée à la Faculté des Sciences de Caen, est nommé à la chaire de Calcul différentiel et intégral.

— M. P. Boutroux, chargé de cours à la Faculté des Sciences de Nancy, est nommé professeur de Calcul différentiel à la Faculté des Sciences de Poitiers.

— M. Fréchet, chargé de cours, est nommé professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Poitiers.

Italie. — M. Max Abraham, professeur de Mécanique rationnelle à l'Institut Technique supérieur de Milan, a été nommé membre du Reale Istituto Lombardo.

MM. G. Castelnuovo, de l'Université de Rome, et U. Dini, de l'Université de Pise; ont été nommés membres correspondants du R. Institnto Veneto.

M. M. Cipolla, privat-docent à l'Université de Palerme, a été nommé professeur extraordinaire d'Analyse algébrique à l'Université de Messine.

M. B. Levi, professeur à l'Université de Cagliari, a été transféré en qualité de professeur ordinaire d'Analyse algébrique à l'Université de Parme.

M. A. Viterbi, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire de Géodésie théorique à l'Université de Pavie.

Suisse. — M. Alb. Einstein, professeur à l'Université de Zurich, est nommé professeur de Physique mathématique à l'Université allemande de Prague.

M. Mauderli a été admis en qualité de privat-docent pour l'Astronomie à l'Université de Berne.

Nécrologie.

M. v. Authenrieth, professeur de Mécanique technique à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart, est décédé à l'âge de 68 ans.

M. E. Hagenbach-Bischoff, professeur de Mathématiques, puis de Physique à l'Université de Bâle (1862-1906), est décédé à l'âge de 78 ans. Il fut, avec le philosophe genevois Ernest Naville, l'un des promoteurs de la *Représentation proportionnelle*. En 1875, il présenta au Grand Conseil bâlois le premier projet de Représentation proportionnelle.

— On annonce la mort de M. S. Gundelfinger, professeur à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt; il était né le 17 janvier 1846.

M. Th. N. Thiele, directeur émérite de l'Observatoire de Copenhague, est mort le 26 septembre 1910, à l'âge de 71 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales.
(1er article).

Sous le titre ci-dessus, nous publierons, en une série d'articles, de courts résumés des principaux rapports élaborés par les sous-commissions nationales et consacrés à l'enseignement mathématique dans les différents types.

En rendant compte de la réunion que la commission internationale a tenue à Bruxelles, en août 1910, (Voir *L'Ens. math.* du 15 sept.) nous avons donné une liste des publications entreprises par les sous-commissions nationales (p. 359-365). Dans plusieurs pays les rapports ne seront publiés qu'une fois qu'ils auront tous été réunis en un ou plusieurs volumes ; dans d'autres ils sont publiés au fur et à mesure. Au moment où nous écrivons ces lignes, fin décembre 1910, vingt-deux fascicules contenant 31 rapports ont été distribués aux membres de la commission ; ils se répartissent comme suit[1] :

Allemagne :	9	rapports en 9 fascicules.
Autriche :	11	» » 5 »
Etats-Unis :	1	» » 1 »
France :	1	(dans la suite les rapports ne seront publiés qu'en volume).
Russie :	3	rapports en 2 fascicules.
Suède :	6	» » 4 »

H. F.

ALLEMAGNE

Les écoles secondaires supérieures de garçons en Prusse.

Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen[2] von Dr W. Lietzmann. — C'est le second fascicule du tome I des *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* Il est destiné à donner un exposé de l'organisation actuelle tant extérieure qu'intérieure, de l'enseignement mathématique dans les écoles secondaires supérieures de garçons en Prusse.

Dans un précédent rapport, le fascicule I[3] du tome I, l'auteur s'était occupé des matières et de la méthode de l'enseignement mathématique dans les établissements secondaires supérieurs du Nord de l'Allemagne en se basant

[1] Nous ne comptons pas, dans ces chiffres, les communications ou rapports préparatoires des sous-commissions ayant pour objet l'organisation des travaux. Il y aurait à ajouter, pour l'Allemagne, 3 *Berichte u. Mitteilungen* dont le premier contient la traduction du *Rapport préliminaire* du Comité central ; pour le Danemark, 1 fasc. (traduction du *Rapport prél.*) ; pour l'Espagne, 1 fasc. ; pour les Etats-Unis, 3 fasc., dont l'un est consacré à la traduction du *Rapport prél.* ; pour la Hongrie, 1 fasc. (traduction du *Rapport prél.*) ; pour la Suisse, 1 fasc., consacré aux travaux préparatoires. Total : 10 fascicules.

[2] 1 fasc. de 204 p. ; 5 M. ; B. G. Teubner, Leipzig. — Nous devons ce compte rendu à M. J.-P. Dumur (Genève).

[3] *Stoff. u. Methode* im math. Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher, 102 p. ; 2 M.

sur une étude comparée des manuels. Nous en avons rendu compte dans l'*Ens. math.* du 15 mars 1909, p. 160-162. Ici par contre, il procède en se référant aux programmes et plans d'études parus jusqu'à Pâques 1909. Dans un voyage en Prusse, M. Lietzmann a pu étudier la question de près en visitant les principaux établissements scolaires, en assistant aux leçons et en prenant toutes les informations nécessaires.

Le travail est divisé en *trois parties*. La première traite de l'*organisation générale de l'enseignement dans les écoles supérieures de garçons :* la deuxième s'occupe des *plans d'études* et des sujets traités concernant l'enseignement mathématique dans les écoles supérieures de garçons en Prusse, et la troisième de l'*influence du mouvement de réforme sur les plans d'études.*

On distingue actuellement en Prusse trois sortes d'écoles supérieures : Les « Gymnasien », les « Realgymnasien » et les « Oberrealschulen ». A part ces établissements complets, comprenant neuf classes, on trouve aussi des établissements incomplets ne renfermant que les six premières classes : les « Progymnasien », les « Realprogymnasien » et les « Realschulen ».

Dans un aperçu historique, l'auteur indique les transformations progressives qu'ont subies les écoles de Prusse avant d'arriver à leur état actuel. Notons seulement un point important : la Conférence de juin 1900 (Junikonferenz) a décrété l'égalité des trois genres d'écoles en ce qui concerne les droits qu'elles accordent.

Le tableau suivant permettra de comparer le système de classes des écoles allemandes avec celui des autres pays.

Prusse.		Autriche.		France.		Italie.		Etats-Unis.	
3 classes préparat.		4 classes préparat.		Divis. préparat. Ire an.		Environ 3 an. prép.		Ier degré	Grades ou Commonschool.
				» » 2e an.				IIe »	
				Huitième.				IIIe »	
VI	Degrés inférieurs.			Septième.		I	Ginnasio.	IVe »	
V		I	Degrés inférieurs.	Sixième.	Premier cycle.	II		Ve »	
IV		II		Cinquième.		III		VIe »	
U III		III		Quatrième.		IV		VIIe »	
O III		IV		Troisième.		V		Ire année.	High School.
U II		V	Degrés supérieurs.	Seconde.	Second cycle.	I	Liceo.	2e »	
O II	Degrés sup.	VI		Première.		II		3e »	
U I		VII		Phil. ou Math.		III		4e »	
O I		VIII							

Les caractères qui distinguent les « Gymnasien », « Realgymnasien » et « Oberrealschulen » sont les suivants :

Le *Gymnase* est caractérisé par les langues mortes, latin et grec. Parmi les langues modernes, le français seul est obligatoire ; actuellement il est souvent remplacé dans les degrés supérieurs par l'anglais. A partir de O II, deux heures facultatives d'anglais (ou français lorsque l'anglais est obligatoire) et également d'hébreu.

Au *Realgymnasium* on ne conserve que le latin en fait de langues mortes.

c'est pourquoi deux nouvelles langues sont obligatoires, le français et l'anglais. Les mathématiques et les sciences naturelles sont mieux représentées qu'au « Gymnasium ». Le dessin linéaire est facultatif (deux heures par semaine dans les cinq dernières classes).

Dans les *Ecoles réales supérieures* le latin disparaît également — il est facultatif dans la plupart des établissements de ce genre à partir de O II. Par contre, les langues modernes, les mathématiques et les sciences naturelles sont plus approfondies qu'aux « Realgymnasien ». Comme dans ces derniers, le dessin linéaire est facultatif.

A côté des établissements énumérés ci-dessus, on rencontre également les écoles réformées *(Reformanstalten)* dans lesquelles la séparation en sections est retardée le plus haut possible.

Dans les chapitres suivants, l'auteur nous parle de l'organisation plus libre de l'enseignement dans les degrés supérieurs, en ce qui concerne le champ et les méthodes. Puis il passe en revue le matériel scolaire dont disposent les élèves dans leurs études mathématiques et arrive ensuite à l'enseiseignement mathématique proprement dit. Le maître de mathématiques enseigne souvent d'autres branches dans sa classe, spécialement les sciences naturelles. On a l'habitude de distinguer actuellement deux groupes dans les sciences mathématiques et naturelles : mathématique-physique et chimie-biologie. Déjà maintenant on confie presque toujours l'enseignement mathématique et physique au même maître, en tous cas dans les classes supérieures.

En ce qui concerne les méthodes d'enseignement, il faut distinguer la méthode heuristique et la méthode dogmatique. La méthode heuristique, dans son sens le plus général, consiste dans une assimilation progressive de la matière d'enseignement par un échange continuel de questions et de réponses entre le maître et l'élève. C'est le procédé qu'on emploie presque toujours. Dans un sens plus étroit, la méthode heuristique, appelée « méthode de redécouverte » en France, consiste à faire retrouver à l'élève lui-même tous les résultats de l'enseignement. En Allemagne on procède aussi beaucoup selon cette méthode. L'auteur nous donne comme exemple le compte rendu d'une leçon de mathématiques dans un « Gymnasium » (O III). Dans une brochure *Ist Mathematik Hexerei ?*[1] on trouvera des renseignements plus détaillés au sujet de la méthode suivie dans cette leçon.

Les travaux à faire à la maison ont moins d'importance relativement à ceux exécutés en classe que dans les autres pays. Ils ont simplement pour but la revision et les applications des sujets traités aux leçons.

A côté de ces tâches régulières il faut signaler des travaux plus considérables que les élèves ont à présenter à des intervalles de temps plus longs, toutes les quatre semaines, d'après les plans d'étude ; et également les travaux facultatifs. Ces derniers nécessiteraient une bibliothèque d'élèves qui manque souvent.

Rappelons enfin que l'année scolaire commence généralement à Pâques et que les élèves passent d'une classe à la suivante à condition de réussir leurs examens de promotion. Dans un chapitre spécial du rapport, on trouvera tous les détails voulus sur ces examens et les épreuves en général.

Dans la *seconde partie,* l'auteur s'occupe des plans d'études et de la matière d'enseignement. Dans un aperçu historique, il passe en revue les transformations successives de ces plans d'études jusqu'à ceux de 1901 qui

---

[1] *Von einem preussischen Schullehrer* (Schwering, *Réd.*), Herder, Stuttgart.

sont actuellement en vigueur[1]. Dans les chapitres suivants, on trouvera des renseignements détaillés sur ces derniers et sur les observations qui les accompagnent et concernant les méthodes d'enseignement (methodische Bemerkungen). Ces plans d'études de 1901 comprennent trois parties, la première renferme le programme des heures d'étude, la deuxième, qui s'occupe spécialement de chaque branche, indique aussi le champ respectif de chacune des trois sortes d'écoles ; cette partie donne également des observations méthodiques sur l'arithmétique et les mathématiques ; la troisième partie contient des remarques d'un ordre général.

Nous donnerons ici le schéma des plans d'études pour les trois genres d'écoles, ce qui permettra de comparer leurs attributions respectives.

« GYMNASIEN »

Classe.	Arithmétique et Algèbre.	Géométrie.
VI	Calcul : les opérations sur les nombres positifs, entiers et fractionnaires. Opérations usuelles de la vie pratique.	—
V		—
IV		Enseignement préparatoire. Etude des droites, angles et triangles.
U III	Calcul : opérations sur les nombres positifs et négatifs ; équations du premier degré.	Extension de l'étude du triangle. Quadrilatère. Cercle (cordes et angles).
O III	Proportions ; équations du premier degré à une et plusieurs inconnues. Puissances à exposants entiers positifs.	Mesure des aires
U II	Puissances, racines et logarithmes (à 4 ou 5 décimales). Equations simples du second degré à une inconnue.	Similitude. Calculs relatifs au cercle.
O II	Equations, principalement du second degré, à plusieurs inconnues.	Division et faisceaux harmoniques. Transversales. Géométrie algébrique. Goniométrie ; calculs trigonométriques simples.
I	Progressions arithmétiques et progressions géométriques ; calculs d'intérêts composés et de rentes. Analyse combinatoire (avec calcul des probabilités). Binôme à exposants entiers positifs. Revision de l'arithmétique. Equations de degré supérieur, qui se ramènent à celles du second degré.	Extension des constructions de géométrie plane et des calculs trigonométriques. Géométrie de l'espace et ses applications en cosmographie. Dessins perspectifs de formes de l'espace. Notion des coordonnées (avec application aux sections coniques).

[1] « Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen » parus à Berlin (Hertz). 1901.

Dans ce tableau et le suivant on n'a pas fait de distinction spéciale entre les classes U I et O I.

« REALGYMNASIEN » et « OBERREALSCHULEN »

Classe.	Arithmétique et Algèbre.	Géométrie.
VI	Calcul : nombres positifs entiers et fractionnaires, particulièrement nombres décimaux. Opérations de la vie pratique.	—
V		* Enseignement préparatoire.
IV	Continuation du programme précédent. * Principes du calcul algébrique.	Droites et angles; triangles, * quadrilatères.
U III	Opérations usuelles de la vie pratique et commerciale. Calcul algébrique; proportions. Equations du premier degré à une inconnue.	Quadrilatères; cercle. Mesure des aires.
O III	Puissances et racines. Equations du premier degré à plusieurs inconnues. Equations simples du second degré.	Similitude; problèmes du cercle.
U II	Logarithmes. Equations du second degré.	Eléments de trigonométrie. Eléments de géométrie de l'espace; projection parallèle oblique. Géométrie algébrique.
O II	Progressions arithmétiques et géométriques (intérêts composés et rentes). Nombres complexes. Equations réciproques et binômes; équations difficiles du second degré.	Division et faisceaux harmoniques; axe radical; centre de similitude, etc. Continuation de la trigonométrie. Géométrie de l'espace.
I	Analyse combinatoire (avec application au calcul des probabilités). Binôme pour exposants quelconques. Les séries les plus importantes de l'analyse algébrique. Revision de l'arithmétique. Equations du troisième degré. Maxima et minima.	Trigonométrie sphérique (cosmographie). Géométrie descriptive. Géométrie synthétique des sections coniques. Géométrie analytique plane.

Les chapitres que l'on traite dans les « Oberrealschulen » mais non dans les « Realgymnasien » ont été marqués d'un astérisque. En comparant ces deux tableaux, on se rendra compte qu'il n'y a guère de différence entre la

matière d'enseignement des « Gymnasien » et celle des « Realanstalten ». La différence consiste surtout dans la façon plus ou moins approfondie dont cette matière est traitée.

Dans la troisième partie de son travail, M. Lietzmann nous parle de l'influence du mouvement de réforme sur les plans d'études. En ce qui concerne l'enseignement mathématique, ce mouvement de réforme trouve sa meilleure expression dans les propositions de Meran et Stuttgart, de la commission d'enseignement instituée par la Société des naturalistes et médecins allemands. Dans ces propositions, on envisage comme buts principaux de l'enseignement dans les écoles supérieures les deux points suivants :

a) le renforcement de la conception de l'espace.

b) le développement de l'idée de fonction.

Pour se conformer à cette manière d'envisager les choses, on devra :

1. Ordonner l'enseignement de façon à mieux l'adapter au développement naturel de l'esprit. Ce principe psychologique concerne surtout l'enseignement préparatoire de l'arithmétique et de la géométrie et le passage progressif des procédés intuitifs aux procédés déductifs.

2. Développer autant que possible cette faculté d'observation mathématique des phénomènes qui nous entourent. Ce principe utilitaire se manifestera par le choix approprié des applications.

3. Arriver peu à peu à la conception de l'unité de la science. Ce principe didactique conduira à une concentration de tout l'enseignement autour d'une notion fondamentale, celle de fonction, aussi bien au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique.

On trouvera dans cette troisième partie de l'ouvrage de M. Lietzmann la place qu'occupe la notion de fonction dans les degrés inférieurs et supérieurs des différents établissements scolaires. Nous ne pouvons entrer ici dans aucun détail. Remarquons cependant que les décisions du 3 février 1910 concernant la nouvelle organisation des écoles moyennes en Prusse [1] sont favorables au développement de la notion de fonction.

Les derniers chapitres sont consacrés au rôle du calcul infinitésimal dans les écoles supérieures et des applications auxquelles il donne lieu. Ici, de même que pour la notion de fonction, ce rôle varie beaucoup d'un établissement à l'autre, et nous sommes obligés de renvoyer le lecteur à l'ouvrage même pour de plus amples renseignements. Actuellement, le nombre des Gymnases qui poussent la notion de fonction jusqu'à une étude détaillée du calcul infinitésimal est restreint. Dans ceux de ces établissements où l'on utilise la notion du quotient différentiel, on se borne à des fonctions algébriques très simples et à quelques fonctions transcendantes; le plus souvent on n'aborde pas le calcul intégral ou bien l'on se borne aux premiers débuts. Par contre, plus du 50 % des « Oberrealschulen » renferment dans leur programme le calcul différentiel, et le calcul intégral y est aussi beaucoup mieux représenté qu'aux Gymnases. Les « Realgymnasien » eux, tiennent une place intermédiaire entre les Gymnases et les Ecoles réales supérieures : ils se rapprochent cependant davantage des dernières.

Il n'est pas douteux, dit l'auteur en terminant, que les prochains plans d'études des écoles secondaires supérieures de garçons répondront encore plus favorablement aux tendances actuelles de réforme.

---

[1] Bestimmungen über die Neuordnung des Mittelschulwesens in Preussen, vom 3. Februar 1910. Berlin (Cotta) 1910.

Les écoles secondaires supérieures de garçons des Etats du centre et du sud de l'Allemagne.

Tandis que le Tome I des *Abhandlungen* est consacré aux établissements secondaires supérieurs de Prusse, le Tome II donne un tableau de l'enseignement mathématique dans les écoles des Etats du centre et du sud de l'Allemagne. Il débute par une *Préface* de M. Treutlein, qui dirige la publication de ce volume. Les cinq premiers fascicules ont été présentés à la réunion de la Commission internationale, à Bruxelles, en août 1910. Ce sont ceux de M. Wieleitner[1], pour la *Bavière*, de M. Witting[2], pour la *Saxe*, de M. Geck[3], pour le *Würtemberg*, de M. Cramer[4], pour le *Grand Duché de Bade* et de M. Schnell[5], pour la *Hesse*. Viendront ensuite un rapport de M. M. Hossfeld pour les Etats de la *Thuringe* et un rapport pour l'Alsace-Lorraine.

Les rapporteurs ont basé leur étude sur les réponses à un questionnaire adressé aux membres du corps enseignant; il a été reproduit dans la Préface. Nous n'entrerons pas dans le détail de ces rapports qui présentent nécessairement beaucoup d'analogies. Les auteurs examinent successivement l'organisation générale des écoles moyennes, l'enseignement mathématique dans les gymnases et les établissements réaux, puis la préparation scientifique et pédagogique des candidats à l'enseignement. Celle-ci peut se faire à l'Université ou à l'Ecole technique supérieure. Les réponses au questionnaire leur permettent de donner une idée de la position que prend le corps enseignant dans la question de la réforme de l'enseignement.

Pour la *Bavière*, nous signalerons le plan d'études de l'Ecole réale supérieure; il offre un intérêt tout particulier à l'heure actuelle, étant donné qu'il est récent (1907) et qu'il tient compte, dans une mesure appréciable, du mouvement de réforme. La préparation des candidats peut se faire aux Universités d'Erlangen, de Munich, de Würzbourg ou à l'Ecole technique supérieure de Munich.

Dans son exposé concernant la *Saxe*, M. Witting fait ressortir le développement historique des gymnases et des établissements réaux. Il fournit un tableau très complet de l'organisation des études mathématiques que les candidats à l'enseignement trouvent à l'Université de Leipzig ou à l'Ecole technique supérieure de Dresde.

En *Würtemberg* l'organisation des écoles présente des différences assez grandes avec celles des autres Etats allemands. L'auteur insiste sur le côté

---

[1] Wieleitner, H., *Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern.* [XIV u. 55 S.], 2 M. 40.

[2] Witting, A., *Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen.* [XII u. 78 S.]. M. 2,20.

[3] Geck, E., *Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg.* [IV u. 104 S.]. M. 2,60.

[4] Cramer, H., *Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden.* [IV u. 48 S.]. M. 1,60.

[5] Schnell, H., *Der matematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen.* [VI u. 51 S.] M. 1.60.

historique qui permet de mieux saisir l'organisation actuelle. De nouveaux plans d'études sont en préparation. Cet exposé comprend aussi les mathématiques dans les écoles supérieures de jeunes filles.

Le rapport concernant le *Grand Duché de Bade* traite des écoles de garçons et des écoles de jeunes filles. Nous signalons le plan d'études des écoles supérieures de jeunes filles à ceux qui s'intéressent à cette question; on constate que les mathématiques y tiennent une très bonne place. A mentionner aussi l'enseignement propédeutique de la Géométrie dans les classes inférieures de l'Ecole réale supérieure.

Comme dans le rapport précédent, celui qui est consacré à la *Hesse* comprend aussi les écoles de jeunes filles. L'auteur expose en détail ce que demandent les tendances modernes dans l'enseignement mathématique.

Les mathématiques dans les traités de Physique.

Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern [1], von Dr E. Timerding. L'apparition de ce livre sera saluée avec plaisir par tous ceux qu'intéressent les projets de réforme de l'enseignement mathématique dans les collèges. L'enseignement de la physique dans les établissements d'enseignement secondaire devient de plus en plus expérimental, de verbal qu'il était autrefois. On tend même à obtenir que l'élève prenne une part active aux expériences importantes du cours, en les montant ou les répétant. Il n'est donc pas inutile, peut-être, de dire immédiatement qu'il n'est nullement question, dans ce livre, d'aller à l'encontre de cette tendance expérimentale, ni d'augmenter la part de déductions mathématiques qui se trouve dans l'enseignement de la physique. Le but de M. Timerding est autre; il veut, par l'étude critique des cours de physique existants, arriver à déterminer les problèmes que les besoins de l'enseignement de la physique posent à l'enseignement des mathématiques. Les cours de physique visés ne sont donc ni les cours dans lesquels il n'est fait appel à aucune connaissance mathématique, ni les cours supérieurs dans lesquels il est fait libre usage de toutes les ressources de l'Analyse; ce sont uniquement les manuels en usage dans les classes supérieures des gymnases et des écoles réales et les cours destinés aux leçons universitaires que chimistes, médecins, etc., fréquentent. M. Timerding se borne naturellement à l'étude des ouvrages de langue allemande.

Les critériums qu'applique M. Timerding dans son étude se ramènent à des exigences de précision logique et d'économie de la pensée : « Nous exigeons une seule chose : lorsque la formation mathématique de l'élève remplit les conditions requises, il faut alors que tout ce que l'enseignement de la physique emprunte à la mathématique soit clair et précis. » Et il ajoute : « Il ne s'agit pas ici de défendre une opinion pédagogique personnelle ou un point de vue particulier, il s'agit de représenter les intérêts de l'enseignement mathématique. Cet enseignement, bien qu'ayant un but propre bien défini, doit encore tenir compte de la réalité et des applications; mais, c'est pour lui une condition nécessaire, que les exigences de rigueur scientifique qu'il pose ne soient pas contredites d'un autre côté. » « On ne doit pas, ici, rappeler l'élève à la rigueur et à l'exactitude, alors que là un laisser-

---

[1] Fasc. 2 du Tome III (VI et 112 p.), 2 M. 80. — Nous devons ce compte rendu à M. Plancherel (Genève). *Réd.*

aller commode dans l'expression et le raisonnement est non seulement permis, mais encore donné en exemple. »

La première partie du livre est destinée à nous donner une connaissance rapide de l'histoire du livre de physique. Elle contient deux chapitres : 1° Le développement des mathématiques dans son rapport avec la physique; 2° le développement mathématique du livre de physique. Elle montre d'une manière frappante la part considérable qu'ont la tradition et la routine dans les déductions mathématiques et jusque dans l'illustration des manuels Elle fait ressortir également le fait que le développement mathématique du livre de physique s'est arrêté au seuil du calcul infinitésimal, sans le franchir. Toutes les démonstrations ou notions mathématiques employées portent la trace d'idées se rattachant à la méthode des indivisibles de Cavalieri et à la méthode d'approximation d'Huyghens.

L'examen individuel de chaque manuel donnerait à la critique un caractère personnel que notre auteur veut éviter et risquerait surtout de faire manquer le but qu'il se propose : trouver où et comment l'enseignement mathématique doit agir pour collaborer utilement avec l'enseignement de la physique. Pour cela, M. Timerding trouve préférable de choisir un certain nombre de problèmes caractéristiques et de suivre dans les différents manuels la manière dont chacun est traité, cela sans se lier à aucun ordre systématique et sans viser à tout passer en revue. C'est ainsi que seront étudiés successivement, dans la seconde partie du livre : définition de la vitesse, lois de la chute des corps, pendule mathématique, centre de gravité et moment d'inertie, mesures barométriques d'altitude, théorie des ondes, influence des théories d'action à distance et d'action médiate sur les méthodes mathématiques. Tous ces problèmes sont caractérisés par le fait qu'ils font presque tous partie intégrante de tout enseignement de la physique et par le fait qu'ils nécessitent, pour leur compréhension exacte ou pour leur résolution la connaissance des principes du calcul infinitésimal. Or, la plupart des auteurs écartent systématiquement tout emploi des signes de différentiation. Ceux mêmes qui s'en servent n'ont encore osé faire usage du signe d'intégration. Si donc, ils ne veulent pas se borner à donner les formules finales de résolution sans démonstration, ils sont obligés d'employer des méthodes détournées. La plupart du temps ces méthodes sont celles qu'employaient les géomètres avant l'invention du calcul infinitésimal. Quelquefois, elles sont calquées sur les méthodes infinitésimales avec la différence que, ne pouvant faire usage de leurs symboles, elles remontent chaque fois à leurs définitions; on voit, alors, dans le corps d'un même volume, trois ou quatre problèmes de même nature être l'objet de trois ou quatre démonstrations artificielles successives qui masquent la connexion mathématique étroite de ces problèmes. Une telle manière de procéder est en contradiction avec le principe de l'économie de la pensée. De plus, certaines notions, celle de vitesse dans le mouvement non uniforme, par exemple, exigent pour être mathématiquement bien définies, la notion de dérivée et d'intégrale; en conséquence, la plupart des définitions qu'en donnent les manuels sont imprécises ou inexactes.

Dans la troisième partie de son ouvrage, l'auteur traite des points suivants : l'importance des illustrations, des diagrammes, concepts géométriques de l'infiniment petit, succédanés analytiques du calcul infinitésimal; l'essence d'une exposition élémentaire; l'exposé des méthodes infinitésimales dans les traités de physique; le calcul infinitésimal à l école.

Nous n'avons donné ici qu'un aperçu très superficiel du contenu et des tendances du livre, et n'avons guère pu indiquer l'originalité et l'intérêt qu'il présente dans toutes ses parties par la quantité de faits et de détails significatifs qu'il contient. La conclusion la plus importante qui se dégage de sa lecture est qu'il est urgent d'introduire les notions de dérivée et d'intégrale dans le programme de mathématiques des collèges, et cela assez tôt pour qu'elles puissent être utilisées et appliquées concrètement dans les leçons de physique des classes supérieures. Cette réforme est très possible lorsque l'enseignement de la physique est partagé en deux cycles. On déchargerait de cette manière l'enseignement de la physique et on lui permettrait en même temps de faire usage de notions mathématiques exactes et de se débarrasser ainsi des à peu près mathématiques qui l'encombrent encore.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

W. Ahrens. — **Mathematische Unterhaltungen und Spiele.** Zweite Auflage; Bd. I. — 1 vol. gr. in-8° de 400 pages et 200 figures; 7 M. 50; B. G. Teubner, Leipzig.

L'intérêt offert par cette collection d'amusements mathématiques est suffisamment prouvé par l'existence d'une seconde édition. L'auteur n'a pas pris à tâche de paraître très savant et de faire des choses compliquées en prenant pour points de départ des jeux bientôt noyés dans des problèmes cessant d'être récréatifs. Il prend au contraire des problèmes très simples et il s'efforce de les généraliser en conservant toujours le même appareil élémentaire. Ainsi la traversée d'une rivière par un loup, une chèvre et un chou qui ne doivent s'entredévorer, ou le passage d'époux jaloux qui ne consentent jamais à laisser leur femme sur la rive avec un autre homme, servent d'introduction.

Plus loin voici le problème des tonnelets où l'on s'efforce d'abord de partager en deux parties égales le contenu d'un tonnelet de 8 litres lorsqu'on n'en possède que deux autres pouvant contenir respectivement 5 litres et 3 litres. Que l'on généralise maintenant pour un nombre quelconque de tonnelets et l'on se trouvera en présence de curieuses questions d'analyse combinatoire.

Pour passer à un ordre d'idées différent, je signalerai les problèmes de carrelage dans les deux cas importants où l'on assemble des figures ayant isolément la symétrie de l'ensemble à obtenir, ou bien des polygones différents qui, pris deux à deux, ne donneraient que des figures dissymétriques conduisant cependant par leur répétition à des ensembles symétriques.

Au carrelage il faut rattacher les problèmes relatifs à la marche de certaines pièces sur l'échiquier et notamment ceux où l'on est astreint à

parcourir certains quadrillages suivant certaines lois et en s'interdisant de repasser plus d'une fois sur la même case ou sur le même ensemble de cases.

La théorie du *solitaire* est encore quelque chose d'analogue et, de même que l'on peut concevoir des solitaires ayant diverses formes polygonales, l'auteur étudie les généralisations des problèmes d'échecs sur certains échiquiers polygonaux.

Si j'ajoute que les combinaisons dues aux jeux de cartes n'ont pas été méprisées et que, d'autre part, la théorie des systèmes de numération se développe après la grandiose parole de Kronecker qui voulait que Dieu ait fait les nombres entiers pour laisser l'homme inventer le reste, j'aurais montré que les nombreux amusements recueillis dans ce volume ont été appuyés sur des idées irréprochables au point de vue de la philosophie scientifique.

A. Buhl (Toulouse).

P. Appell et S. Dautheville. — **Précis de Mécanique rationnelle.** Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée, à l'usage des candidats aux certificats de licence et des élèves des Ecoles techniques supérieures. — 1 vol. gr. in-8° de vi-716 pages et 220 figures; 25 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Ce Précis de Mécanique offre en raccourci tout ce que contient le grand Traité de M. Appell. Ce n'est pas, à proprement parler, un résumé de ce Traité, car on sait qu'en résumant des théories on risque souvent de leur faire perdre leur clarté; c'est un assemblage, fait avec une remarquable continuité, de tous les points essentiels développés dans un ouvrage trop étendu pour qu'on puisse, dans les Cours, en proposer l'étude en une année.

C'est avant tout un Précis de Mécanique bien plus au sens physique du mot qu'au sens analytique. Les équations de Lagrange y sont envisagées, mais elles n'ont ici qu'une place secondaire n'incitant pas l'étudiant à les substituer trop facilement aux théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes. Bien plus, ces théorèmes généraux ont été réexposés d'une manière nouvelle, brève et symétrique; les auteurs mettent notamment en évidence les sept équations universelles applicables aux mouvements de systèmes quelconques, de la même manière qu'on met en évidence les six équations de l'équilibre. Aux forces d'inertie près, on reconnaît facilement les secondes dans les premières. Les applications sont nombreuses et les exemples toujours élégants.

D'ailleurs, le souci d'être élémentaire et intuitif a porté les auteurs à ajouter bien des choses qu'on ne trouve pas dans le Traité de M. Appell, ce qui fait que ceux qui connaissent déjà la Mécanique pourront lire avec fruit le présent Précis.

Ainsi, au mouvement périodique simple, lié au mouvement circulaire et uniforme d'un rayon vecteur, s'ajoute le mouvement périodique amorti où les cercles de la représentation précédente sont à remplacer par des spirales logarithmiques.

Le calcul des centres et des moments d'inertie a été appliqué à des exemples détaillés et très simples.

Les considérations statiques et dynamiques concernant le frottement ont été réunies avec une très grande harmonie.

Les percussions donnent lieu à un chapitre élémentaire et court. Le principe des travaux virtuels fait, au fond, partie de la Mécanique analytique et il est assez difficile de l'appliquer si on ne s'habitue pas d'abord à résoudre sans lui quelques problèmes de Statique. Aussi les auteurs l'ont-il séparé et placé après la Dynamique, là où la notion de force d'inertie permettra de passer au Principe de d'Alembert et de conclure, du principe des travaux virtuels, la Dynamique aussi bien que la Statique.

Après un Chapitre sur l'attraction, la statique et la dynamique des milieux continus sont exposés en appliquant encore, à toutes les particules du milieu et par le moyen de la formule de Green, les équations générales de l'équilibre et du mouvement de systèmes quelconques.

Ce Précis présente donc une très grande homogénéité et une très grande simplicité. Il peut suffire à une solide étude de la Mécanique; quant aux perfectionnements plus éloignés des principes, il sera toujours temps de les étudier dans le grand Traité de M. Appell et sans aucune peine si, au préalable, le Précis a été bien compris.

Les deux auteurs, dont l'un enseigne à la Faculté des Sciences de Paris, l'autre à celle de Montpellier, ont une carrière déjà longue d'où résulte une grande habitude de l'enseignement. Ils ont recueilli de nombreux problèmes à résoudre, posés pour la plupart aux examens de licence et aux Concours d'Agrégation et qu'ils ont méthodiquement classés. Si bien qu'en lui-même le présent Précis est un instrument de travail absolument complet.

A. Buhl (Toulouse).

W. M. Baker and A. A. Bourne. — **The Student's Arithmetic.** — 1 vol. in-16; 328 et L p.; relié, avec ou sans réponses, 2 s. 6 d.; G. Bell and Son, Londres.

Ce volume est une édition abrégée du manuel que MM. Baker et Bourne ont publié sous le titre *Public School Arithmetic* et que nous avons analysé dans un précédent numéro (sept. 1910, p. 432). La différence n'est ni dans le choix des sujets, ni dans celui des exemples, mais dans le fait que le nombre des problèmes dont on donne une solution raisonnée complète est beaucoup plus restreint et cela afin de favoriser l'effort personnel.

Les auteurs préconisent l'emploi du *Student's Arithmetic* plus spécialement pour les élèves et celui du *Public School Arithmetic* pour les maîtres.

Max. Bôcher. — **An introduction to the study of integral equations,** (N° 10 des Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics). — 1 vol. p. in-8°, 71 p.; 2 s. 6 d.; C. F. Clay, Londres.

Comme son titre l'indique, ce petit livre est destiné à introduire l'étudiant dans le domaine désormais classique de la théorie des équations intégrales. Suivant le plus près possible le développement historique, l'auteur commence par exposer le problème de mécanique qui donna à Abel l'occasion de résoudre l'équation intégrale de première espèce qui porte son nom. Il s'arrête ensuite à la méthode des substitutions successives, employée par Liouville et Neumann à la résolution d'équations intégrales de seconde espèce particulières. L'introduction, d'après Volterra, des noyaux itérés et des fonctions résolvantes est ensuite rapidement traitée. Puis, vient l'exposé de la méthode de résolution de Fredholm, précédée de la démonstration d'après Wirtinger d'un théorème important d'Hadamard et d'un court exposé du procédé heu-

ristique qui a conduit Fredholm à sa solution et que Hilbert a transformé en méthode rigoureuse de démonstration. Enfin, les derniers paragraphes sont réservés au cas du noyau symétrique, aux résultats de Hilbert et de Schmidt sur les développements en séries de fonctions orthogonales et à quelques brèves notes sur l'équation de Volterra.

Ce livre, sans donc entrer dans des détails trop spéciaux, présente d'une manière très claire tout ce qu'il est nécessaire de connaître des équations intégrales pour être à même d'en comprendre les applications les plus importantes.

M. Plancherel (Genève).

J.-A. Decourdemanche. — **Traité pratique des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes.** — In-8° de VIII-144 p.; 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Dans cet ouvrage, l'auteur a réuni sous une forme brève et pratique, celle d'une série de tableaux, les systèmes des poids et mesures des peuples anciens et des Arabes. Il reprend, en les complétant, les systèmes métriques dont avait traité Vasquez Queipo dans son « Essai sur les systèmes métriques et monétaires des anciens peuples ».

Pour chaque mesure ou poids l'équivalence est donnée selon le système métrique français. Toutes les mesures anciennes sont relation directe avec les poids de trois talents : le babylonien, l'assyrien et l'égyptien. Ces talents ont entre eux des rapports arithmétiques très simples, aussi la métrologie ancienne, de laquelle dérive celle des Arabes, forme-t-elle un ensemble bien coordonné. L'auteur en donne un exposé très clair qui sera consulté avec fruit par tous ceux qui ont à s'occuper des mesures utilisées dans l'antiquité.

J. Horn. — **Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.** — 1 vol. in-8° de VIII-360 p. *(Collection Schubert)*; 10 Mk.; G. J. Göschen, Leipzig.

Le professeur J. Horn, ayant publié en 1905 un ouvrage sur les Equations différentielles ordinaires, nous en donne maintenant un second, relatif aux équations aux dérivées partielles.

Tous deux sont publiés dans la Collection Schubert sous des apparences matérielles complètement analogues ; tous deux paraissent animés du même esprit d'ordre et de clarté. Tout lecteur du premier aura donc sans doute beaucoup à gagner à la lecture du second. Le présent volume n'a pas la prétention de réunir tous les travaux si divers, relatifs aux équations partielles, mais elle a celle de donner beaucoup plus que les ordinaires traités d'Analyse.

Les équations du premier ordre ont été traitées brièvement, ce qui n'empêche pas qu'on trouve là tout ce qu'il y a d'essentiel sur l'intégration des systèmes complets et des systèmes jacobiens. Quant aux équations du second ordre, l'auteur se borne surtout au cas de deux variables, mais il sait présenter d'une manière extrêmement égale les méthodes d'intégration déjà un peu anciennes, telles celle de Riemann et la théorie des caractéristiques, puis les méthodes modernes issues des travaux de Fredholm.

Beaucoup de simplicité dans la définition de l'équation adjointe et dans l'emploi du théorème de Green. De là on passe sans peine aux méthodes d'approximations successives.

Quant à l'équation intégrale de Fredholm, elle est manifestement née de la nécessité d'étudier les équations aux dérivées partielles, mais bien des conséquences considérées d'abord comme accessoires ont rapidement pris l'aspect de théories fondamentales. En peu de pages l'auteur a su faire tenir tout cela; c'est ainsi qu'il montre comment naissent les nombreux développements en série issus des propriétés des noyaux des équations intégrales; c'est ainsi encore qu'il montre comment les équations différentielles *ordinaires* ont pu profiter des progrès faits dans les théories précédentes.

Les principales équations de la Physique mathématique servent à illustrer ces généralités. Les théorèmes d'existence eux-mêmes n'ont point été omis; mais ils ont été résumés avec une concision toujours jointe à la même clarté que celle qui règne en tous les points de cette œuvre remarquable.

A. Buhl (Toulouse).

L. Leseine et L. Suret. — **Introduction mathématique à l'Etude de l'Economie politique.** 1 vol. in-16, 3 fr.; Félix Alcan, Paris.

L'ouvrage de MM. Leseine et Suret vient combler une lacune dont a souffert jusqu'à aujourd'hui, en France, l'étude de l'économie politique : les auteurs se proposent de donner aux étudiants le moyen de comprendre, sans grands efforts, les formules mathématiques contenues dans les ouvrages de certains économistes : Cournot, Jevons, Walras, Pareto, Pantaleoni, Barone, Libelli, Auspitz et Lieben, Edgeworth, Marshall, Wicksteed, Cohen Stuart, Hermann Laurent, etc.

Dans une Introduction substantielle, MM. Leseine et Surey montrent l'utilité de la méthode mathématique en économie politique, au double point de vue de l'enseignement didactique et de l'investigation scientifique.

Au cours de leur livre, les auteurs exposent successivement, et dans une forme accessible à tous les lecteurs, les notions fondamentales d'algèbre supérieure, de trigonométrie, de géométrie analytique et de calcul infinitésimal.

Enfin, ce travail contient, à titre d'illustration, des formules mathématiques, de nombreux exemples économiques et financiers extraits de tous les auteurs précités.

Cet ouvrage vient à son heure, en raison du très grand développement actuel des théories d'économie politique mathématique.

P. Montel. — **Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe.** 1 vol. gr. in-8° de VIII-128 p. et 5 fig.; 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Ces leçons ne s'occupent que de parties choisies du sujet annoncé par le titre ci-dessus. Il ne faut nullement le regretter si l'on considère l'œuvre de M. P. Montel comme une initiation et, en matière de séries de polynômes, les résultats possédés jusqu'ici, tantôt épars, tantôt confus, ne permettent guère d'opérer encore un classement montrant clairement où se trouve la simplicité pédagogique.

Ce qui semble jouer un grand rôle dans ce livre, c'est l'intégrale de Cauchy à laquelle on applique non pas le procédé qui donne la série taylorienne, mais d'autres procédés donnant des développements plus compliqués mais d'une convergence plus étendue. Or c'est à un résultat de cette nature qu'arrive M. Mittag-Leffler après avoir vaincu bien des difficultés et essayé bien des chemins; il me semble ainsi apercevoir que plusieurs méthodes ici

exposées pourraient rentrer comme cas particuliers dans celles du grand géomètre suédois. Mais ceci n'est nullement une critique. Le présent ouvrage part des généralités élémentaires de la théorie des fonctions et, quant aux auteurs modernes, nous entretient de leurs recherches relatives aux trente dernières années ; il peut donc jouer le rôle d'une fort bonne introduction et préparer à l'étude des mémoires tout à fait récents.

Il se termine d'ailleurs par des considérations qui ne sont pas sans présenter de grosses difficultés. L'auteur essaie de rassembler quelques résultats et présente de fort jolies vues personnelles sur les séries de polynômes considérées en elle-même ; dans ces conditions la convergence est une question à peine effleurée donnant de pures merveilles qu'il faut chercher cependant au milieu du plus inextricable des fouillis. Je connais, pour ma part, des séries de polynômes qui convergent lorsque, dans la variable $z = x + iy$, x et y sont rationnels et qui coïncident alors avec une fonction bien déterminée ; mais ces mêmes séries représentent tout autre chose, ou même se mettent à diverger, si x et y sont considérés comme irrationnels.

Cet ordre d'idées n'est pas négligé par M. Montel qui a commencé toutefois par des choses moins paradoxales ; son dernier chapitre sur les séries de polynômes convergentes dans plusieurs domaines est plein d'un grand intérêt.

En résumé, cet ouvrage est fort consciencieux et fort clair ; s'il n'expose pas toutes les recherches se rapportant à son titre, ce qui d'ailleurs eut été impossible dans un cadre aussi modeste, du moins il met le lecteur à même de les comprendre toutes. A. Buhl (Toulouse).

Paul Painlevé et Emile Borel. — **L'Aviation.** 1 vol. in-16, avec fig. (*Nouvelle Collection scientifique*, publiée sous la direction de M. Emile Borel), 3 fr. 50 ; Félix Alcan, Paris.

MM. Painlevé et Borel se sont efforcés de mettre à la portée du plus grand nombre possible d'esprits cultivés les lignes essentielles de l'histoire du plus lourd que l'air, la contribution qu'apporte à la solution de ce problème l'étude du vol des oiseaux, la comparaison des diverses solutions proposées (orthoptères, hélicoptères, cerfs-volants, aéroplanes), les avantages et inconvénients de chacune d'elles, les raisons essentielles de la supériorité actuelle de l'aéroplane, les caractéristiques des divers types d'aéroplanes et les principes essentiels de leur fonctionnement. Ils terminent par quelques considérations sur l'avenir de l'aéroplane, en particulier sur son utilisation militaire, qui préoccupe, à juste titre, tous les esprits.

Cet ouvrage n'est nullement un traité théorique d'aviation, mais les auteurs ont cru devoir y ajouter, en appendice, quelques développements sur la mécanique de l'aéroplane. Ils sont, de la sorte, utiles à une catégorie importante de lecteurs, et les préparent à la lecture d'ouvrages plus techniques ou de recherches théoriques plus développées.

E. Pascal. — **Repertorium der höheren Mathematik.** 2[e] völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, herausgegeben unter Mitwirkung von zahlreicher Mathematiker von P. Epstein u. H. E. Timerding. I. *Analysis*, Erste Hälfte. II. *Geometrie*, Erste Hälfte. — 2 vol. in-8°, de 527 et 534 pages ; 10 M. le volume ; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà signalé la première édition de cette petite encyclopédie, dont le but est de donner un aperçu systématique des principaux domaines

des mathématiques, avec l'indication des ouvrages et mémoires fondamentaux permettant au lecteur d'en poursuivre l'étude. Il s'agit ici d'une édition entièrement revue et considérablement augmentée. Le *Tome I*, consacré à l'*Analyse*, est dirigé par M. Epstein (Strasbourg), et le *Tome II*, intitulé *Géométrie*, par M. Timerding (Braunschweig). Chacun des tomes comprendra deux volumes. Nous avons sous les yeux le premier volume de chacune des deux Parties. Ils renferment les chapitres suivants :

Tome I, Première Partie : Algèbre, Calcul différentiel et intégral. — I. Arithmétique, Théorie des Ensembles, notions fondamentales concernant les Fonctions, par H. Hahn. — II. Analyse combinatoire, Déterminants et Matrices, par A. Loewy. — III. Théorie algébrique des Groupes, par A. Loewy. — IV. Equations algébriques, par A. Loewy. — V. Théorie des Invariants, par Timerding. — VI. Séries, Produits et Fractions continues, par P. Epstein. — VII et VIII, Calcul différentiel et intégral. — IX. Calcul des Différences, par Timerding.

Tome II, Première Partie : Fondements et Géométrie plane. — Fondements de la Géométrie élémentaire, de la Géométrie analytique et de la Géométrie projective, comprenant huit chapitres, par Mollerup, Liebmann, Heffter, Timerding, Guareschi et Dehn. — Génération et propriétés des sections coniques, Courbes algébriques, Géométrie différentielle plane, Géométrie non-euclidienne, comprenant quinze chapitres, par Dingeldey, Berzolari, Giraud, Ciani, Wieleitner, Liebmann et Mollerup.

Sous cette nouvelle forme, le *Repertorium* est appelé à rendre de grands services aux professeurs et aux étudiants.

J. Schick. — **Trifolium Hiberniae oder Diametristik der Fusspunktsdreiecke.** 1 vol. in-8 de 156 p. avec figures dans le texte et planches; 6 M.; G. Franz, Munich et Leipzig.

L'auteur poursuit la série de ses recherches sur la Géométrie du triangle à laquelle il a consacré divers opuscules que nous avons analysés ici-même.

Les projections orthogonales d'un point sur les côtés du triangle fondamental forment un nouveau triangle XYZ. Les problèmes traités dans l'ouvrage se rapportent surtout aux cercles remarquables du triangle XYZ (cercles circonscrit, inscrit, ex-inscrits, etc.) et plus particulièrement au lieu géométrique décrit par le point P quand un de ces cercles a une grandeur constante. On arrive à des courbes algébriques d'ordre supérieur dont l'équation est déterminée en coordonnées cartésiennes ou barycentriques et dont l'allure est analysée avec soin. Ces questions se rattachent à d'autres relatives à des coniques remarquables du triangle, et à des constructions diverses.

M. Stuyvært (Gand).

P.-V. Schaewen. — **Jacobi de Billy.** *Doctrinæ analyticæ inventum novum.* Fermats Briefen an Billy entnommen, herausgegeben u. übersetzt von P.-V. Schaewen. — 1 vol. in-8°, 143 p.; 3 M.; Otto Salle. Berlin, 1910.

Bien que Paul Tannery ne méconnût pas l'importance de l'*Inventum novum* qu'il considérait comme un complément essentiel des Œuvres de Fermat donnant la clef de nombre des observations sur Diophante, il n'a pas jugé utile de réimprimer le texte original de J. de Billy dans sa belle édition des Œuvres de Fermat, mais il en donna une excellente traduction dans le 3me volume de ces Œuvres, consacré à des traductions des écrits latins de Fermat, de sa correspondance et du *Commercium epistolicum* de Wallis.

Cependant une réimpression du texte original n'était pas sans intérêt et tous ceux qui aiment à remonter aux sources et qui estiment que rien de ce qui touche à Fermat n'est négligeable, sauront gré à M. V. Schaewen d'avoir eu le courage et la patience de préparer une nouvelle édition du petit traité de J. de Billy difficilement abordable dans l'édition primitive.

Ces « découvertes nouvelles dans la science de l'analyse » ont été, comme on sait, recueillies par Jacques de Billy, grand admirateur de Fermat, dans des lettres envoyées à lui, à différentes époques, par l'illustre géomètre toulousain et se rattachent aux anciennes recherches de Diophante sur les équations doubles, c'est-à-dire sur les équations de la forme $f_1(x) = u^2$, $f_2(x) = v^2$, f_1 et f_2 étant des polynômes du premier ou du second degré en x. Il s'agissait, cela va sans dire, de trouver des solutions rationnelles de ces équations, c'est-à-dire des valeurs rationnelles de x telles que les polynômes f_1 et f_2 soient des carrés. A l'époque de J. de Billy, on attachait une importance capitale à ces problèmes, Claude-Gaspard Bachet s'en était occupé, mais aucun des géomètres contemporains de Fermat n'a su le dépasser dans cette voie. « Les travaux de Bachet sur Diophante — dit J. de Billy dans sa préface à l'*Inventum* — montrent assez clairement jusqu'à quel point sa vue était pénétrante dans les questions numériques ; cependant elle est encore faible si on la compare à celle de notre Lyncée qui lui dévoile ce qu'il y a de plus abstrus » (trad. de Tannery).

Pour traiter ces problèmes, Fermat imagina un procédé particulier dont il était très fier et qu'il appliqua sous des formes différentes, à l'étude de problèmes arithmétiques plus complexes, procédé qui lui permettait de déduire d'une solution connue une infinité de solutions nouvelles. Il traita avec le même succès les équations triples et le cas plus difficile d'une équation de la forme $f(x) = u^2$ et $f(x) = u^3$, f étant un polynôme du 4me ou du 3me degré en x. Le texte original de l'Inventum se lit difficilement ; il fourmille d'erreurs de toutes sortes : fautes d'impression, erreurs de calcul, lapsus. La plupart de ces fautes ont été corrigées dans l'édition française de Tannery, mais un certain nombre d'entre elles ont échappé à l'attention du traducteur. M. V. Schaewen les a corrigées avec soin (je n'en ai relevé qu'une dans les paragraphes que j'ai comparés à l'édition de Tannery, mais c'est un erratum sans importance (nº 39 de la 1re partie, dern. ligne) ; M. V. Schaewen a de plus simplifié et complété quelques-unes des solutions de J. de Billy reproduites dans l'édition française. Une traduction allemande est jointe au texte latin, ainsi que des notes et des remarques intéressantes se rapportant à des passages incomplets ou erronés de l'édition originale.

D. Mirimanoff (Genève).

G. Vivanti. — **Les fonctions polyédriques et modulaires.** Traduction de M. Cahen. — 1 vol. gr. in-8º de vii-316 pages et 52 figures, 1910, 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Le professeur Vivanti paraît avoir pris à tâche de simplifier l'étude d'œuvres grandioses mais difficiles, dues surtout aux plus illustres des géomètres allemands. Il y a quelques années, il publiait des *Leçons sur la Théorie des groupes* (traduites en français par A. Boulanger) qui permettaient d'aborder avec une facilité relative les ouvrages d'apparence colossale dûs à Lie et à ses disciples immédiats.

Anjourd'hui, il nous présente une introduction d'un esprit complètement

analogue, quant aux Leçons de M. Klein sur l'Icosaèdre et à celles de MM. Klein et Fricke sur la Théorie des fonctions modulaires.

Il semble avoir vu très heureusement de quelle manière on pouvait élémentariser ces théories élégantes mais ardues. Il consacre la plus grande partie de son volume à l'étude des groupes linéaires; il compare soigneusement leur signification dans l'espace, d'où résultent précisément les considérations de symétrie qui attachent les dits groupes aux polyèdres de la géométrie, aux procédés qui permettent de les représenter sur un plan. Les transformations en question ne transforment jamais un cercle en autre chose qu'en un cercle dont la droite est d'ailleurs un cas particulier. Fort nombreuses sont les figures formées uniquement de segments rectilignes et circulaires qui font comprendre fort aisément les propriétés fondamentales des groupes étudiés.

Ce n'est que lorsque le lecteur est bien familiarisé avec les dits groupes que l'auteur passe à la construction des fonctions polyédriques. Il montre très simplement comment elles se rattachent à la théorie des fonctions doublement périodiques puis à celle des équations différentielles linéaires. Quant aux équations obtenues en égalant une fonction polyédrique à une constante (équations polyédriques), on sait qu'elles sont en relation intime avec les problèmes relatifs aux équations algébriques. M. Vivanti s'est imposé d'aller jusqu'à l'examen de ces derniers points. Sans doute, on n'est plus très loin alors d'aborder toutes les généralités relatives aux fonctions automorphes, mais il ne faut pas oublier qu'il ne s'agissait ici que de préparer à l'étude de ces questions. Ce but important, signalé de manière modeste, est à coup sûr largement atteint. A. Buhl (Toulouse).

W. H. Young. — **The fundamental theorems of the differential calculus.** (N° 11 des Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics). — 1 vol.; p. 72; 2 s. 6 d.; C. F. Clay, Londres.

Ce petit livre est un exposé excellent des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel. L'auteur y présente d'une manière rigoureuse, en faisant très souvent appel à la notion d'ensemble et à quelques théorèmes de cette théorie, les notions qui forment la base et les premiers développements du calcul différentiel des fonctions réelles de variables réelles. Ce livre est donc à conseiller à tout étudiant qui, après avoir suivi un cours élémentaire de calcul différentiel, veut revenir sur ses pas pour approfondir les notions nouvelles et préciser les théorèmes qu'il a acquis.

J'emprunte à la table des matières une esquisse sommaire du contenu du livre.

I. Notions préliminaires. II. Limites. III. Continuité et semi-continuité. IV. Différentiation. V. Formes indéterminées. VI. Maxima et minima. VII. Le théorème de la moyenne. VIII. Dérivées partielles et différentielles. IX. Maxima et minima dans le cas de plusieurs variables. X. Généralisations du théorème de la moyenne. XI. Fonctions implicites. XII. Réversibilité de l'ordre de différentiation partielle. XIII. Séries de puissances. XIV. Série de Taylor. Appendice.

Ce qui n'apparaît pas dans cette énumération et ce qui pourtant caractérise le livre et le distingue avantageusement de tous ses pareils, c'est l'évidente originalité et nouveauté de la plupart de ses démonstrations. Très caractéristiques à cet égard sont les chapitres II, V, XII et XIV.

La personnalité de l'auteur s'y manifeste soit par l'apport de théorèmes nouveaux, soit par le tour original et personnel des démonstrations. Par exemple, l'introduction dès le début des fonctions associées des limites supérieures et des limites inférieures (associated upper and lower limiting functions) d'une fonction donnée, permet de présenter simplement et d'une manière très représentative les notions de continuité et de semi-continuité qui s'expriment par de simples égalités ou inégalités entre les fonctions associées et la fonction donnée. Ainsi se trouvent écartées systématiquement toutes les « définitions en ε » que l'on est accoutumé de donner. A remarquer encore, en passant, que les règles relatives aux formes indéterminées sont établies sans recourir au théorème de la moyenne. Les chapitres XII et XIV où l'auteur traite des cas d'égalité des deux dérivées f_{xy}, f_{yx} et établit, en restant dans le domaine réel, les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence et la validité du théorème de Taylor, me paraissent nouveaux dans un livre de ce genre. Un appendice donne les références bibliographiques et l'indication des quelques théorèmes de la théorie des ensembles employés au cours de l'ouvrage. M. Plancherel (Genève).

Festskrift. H. G. Zeuthen. Fra venner og elever i andelding af hans 70 aars födselsdag. — 1 vol. in-8°, 156 p.; Höst et fils, Copenhague.

Ce volume a été publié à l'occasion du 70[me] anniversaire du savant mathématicien danois, dont on connaît les nombreuses contributions à la Géométrie et à l'Histoire des mathématiques chez les anciens. Il renferme les mémoires suivants : A.-A. Bjornbo : Tables trigonométriques de Al-Chwârizmî. — S.-A. Christensen : Etude des éléments d'Euclide en Danemark. — C. Crone : Une transformation plane faisant correspondre à elles-mêmes certaines courbes du quatrième ordre et du genre 3. — J.-P. Gram : Remarques sur la théorie des nombres due à Fermat. — J.-L. Heiberg : Compléments à son étude sur Archimède. — J. Hjelmslev : Espaces à un nombre infini de dimensions. — J.-L.-W.-V. Jensen : Contributions à la théorie des fractions continues. — C. Juel : Problèmes à un nombre infini de solutions. — O. Kragh : Les équations différentielles du mouvement relatif. — J. Mollerup : Une démonstration de l'existence des classes de nombre de Cantor. — N. Nielsen : Contributions à une théorie générale des développements en séries suivant des fonctions sphériques de seconde espèce qui ont été indiqués par Franz Neumann. — E. Schou : Contribution à la solution du problème d'inversion de Jacobi. — E. Valentiner : La situation des points de rebroussement d'une courbe du sixième ordre. — H. Valentiner : La détermination des polygones à la fois circonscrits et inscrits à une courbe du troisième ordre.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol. XXXII, No 3. — H.-I. Thomsen : The Osculents of Plane Rational Quartic Curves. — W.-A. Manning : On the Primitive Groups of Classes Six and Eight. — E. Study : Minimalcurven als Orter von Krümmungsmittelpunkten. — E. Study : Minimalcurven und Serret'sche Flächen. — J.-N. Van der Vries : On Steinerians of Quartic Surfaces. — R. Börger : On the Determination of the Tenary Modular Groups. — G.-A. Miller : Groups of Transformations of Sylow Subgroups.

No 4. — F.-H. Jackson : q-Difference equations. — W.-B. Ford : On the relation between the sum-formulas of Hödler and Cesàro. — D. Pompeiu : Sur un exemple de fonction analytique partout continue. — A.-B. Coble : Symmetric binary forms and involutions (Continued). — H.-W. Reddick : Systems of tautochrones in a general field of force. — E. Kasner : The general transformation theory of differential elements.

Annali di Matematica. Directeurs : L. Bianchi, U. Dini, G. Jung, C. Segre. Série III, t. XVII. — Rebeschini di Turati e Co. Milan.

Fasc. 3 et 4 (1910). — Sannia : Saggio di Geometria differenziale dei complessi di rette. — Pizzetti : Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra. — Dini : Studii sulle equazioni differenziali lineari per riguardo ai loro integrali normali. — Scorza : Le superficie a curve sezioni di genere 3.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCVII Rendiconti. — Rome.

1er semestre 1910. — Mathématiques : L. Amoroso : Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie. — (Idem) Sulla sviluppabilita in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari. — (Idem) Sopra un'estensione di un teorema di Lindelöf nel calcolo delle variazioni. L. Bianchi. — (Idem) Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate apllicabili nel catenoide. — C. A. Dell'agnola. 455. Sopra una nuova proprietà dei polinomi sferici. — G. Fubini : Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli. — (Idem) Di alcune nuove classi di equazioni integrali. — (Idem) Le successioni minimizzanti nel calcolo delle variazioni. — G. Lauricella : Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare. — L. Orlando : Sul problema di Hurwitz. — M. Pannelli : Sopra le proprietà delle transformazioni birazionali nello spazio ordinario. —

G. Peano : Sugli ordini degli infiniti. — G. Ricci : Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori. — F. Sibirani : Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali. — L. Tonelli : Si gli zeri del limite di una successione di fuzioni analitiche. — E. Zondadari : Sopra speciali trascendenti che si connettono colla teoria dei numeri. — (Idem) Su la continuità e la derivabilità di un integrale rispetto ad un parametro. — (Idem) Sull'iterazione. — V. Volterra : Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. — (Idem) Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali. — (Idem) Sopra le funzioni permutabili.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von Emil Lampe. — Band 39 : Jahrgang 1908. G. Reimer, Berlin.

Hefte 1 u. 2 (p. 1 à 736). — Geschichte, Philosophie und Pädagogik. — Algebra. — Niedere und höhere Arithmetik. — Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Reihen. — Diff. und Integralrechnung. — Funktionentheorie. — Reine, elementare und synth. Geometrie. — Analyt. Geometrie.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXXXIII. — Georg Reimer, Berlin.

Heft 3 u. 4. — J. Horn : Ueber das Verhalten der Integrale linearer Differenz- und Differentialgleichungen für grosse Wertedder Veränderlichen. — P. Koebe : Ueber die Uniformisierung leliebiger analytischer Kurven ; I : Das allgemeine Uniformisierungsprinzip. — H. W. E. Jung : Ueber die Cremonasche Transformation der Ebene.

Band CXXXIX. — Heft 1. — F. Schottky : Vier Briefe Cayleys, nebst Vorbemerkung : Ueber eine Cayleysche Form und deren Anwendung auf das Prodlem des letzten Schnittpunkts zweier Kurven dritter Ordnung ; Ueber einen Satz; der sich auf die Anordnung der $4p$ Thetafnuktionen bezieht. — A. Haar und D. König : Ueber einfach geordnete Mengen. — L. W. Thome : Ueber eine Anwendung der Theorie der simultanen linearen Differentialgleichungen auf Systeme linearer partieller und linearer totaler Differentialgleichungen. — Ch. Müntz : Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen. — G. A. Miller : Note ou teh equation $s_1 s_2 = s_2^2 s_1^2 s_1$ and s_2 being operators of a finite group.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u W. Wirtinger. — Eisenstein & C°, Wien.

XXI. Jahrgang (1910) ; 3., 4. Vierteljahr. — W. Blaschke Zur Geometrie der Speere im Enklidischen Raume. — H. Brix : Ueber spezielle Dirichletsche Reihen und die Kroneckersche Grenzformel. — A. Pleskot : Auswertung eines bestimmten Integrals. — F. Rulf : Der kubische Kreis. — A. Meder : Ueber de Zusammenhangzwischen den Determinanten von Gram und Wronski. — H. Tietze : Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 8.

Fasc. 4. — A. Dixon : Symbolical Expressions for the Eliminant of two Binary Quantics. — G. H. Hardy : The Application to Dirichlet's Series of Borel's Exponential Method of Summation. — G. H. Hardy : The Ordinal

Relations of the Terms of a Convergent Sequence. — G. H. Hardy : Teorems relating to the Summability and Convergence of Slowly Oscillating Series.

Fasc. 5. — W. Burnside : On the Representation of a Group of Finite Order of Linear Substitutions with Rational Cœfficients. — W. H. Ynoug and Grace Chisholm Young : On the determination of a Semi-continuous Function from a Countable set of Values. — A. L. Dixon : The eliminant of the equations of four quadric surfaces. — W. H. Young : On homogeneous oscillation of successions of functions. — H. S. Carslaw : The Green's function for a wedge of any angle, and other problems in the conduction of heat. — H. Bateman : Kummer's quartic surface as a wave surface. — J. E. Campbell : On cyclic congruences. – G. N. Watson : The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. —

Fasc. 6. — H. Lamb : On the diffraction of a solitary wave. - H. T. H. Piaggio : Perpetuant syzygies of the n-th. kind. — H. Bateman ; The transformation of coordinates which can be used to transform one physical problem into another.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Direttore G.-B. Guccia.

Tome XXX, Fasc. I. — M. Frechet : Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel. — W. H. Young : A Note on the Theory of the First Variation in the Calculus of Variations. -- M. Abraham : Sull, elettrodinamica di Minkowski. — E. Bertini : Applicazione della geometria sopra una curva alla dimonstrazione di un teorema di Geiser. — C. Severini : Sulla represeutazione delle fuzioni reali di variabili reali mediante serie di funzioni ortogonali. — R. von Sterneck : Ausdehnung eines Kronecker'schen Satzes auf Determinanten höheren Ranges. — T. Boggio : Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso. — P. Appel : Equation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction newtonienne. — G. Vivanti : Nuova demostratione del teorema di Arzela. — G. Segre : Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi. — R. Weitzenbock : Das Formensystem der Korrelation im R.

Revue Scientifique.

12 novembre 1910. — Ch. Moureu : Louis Olivier (1854-1910). -- C. Bourlet : La pénétration réciproque des mathématiques pures et des mathématiques appliquées dans l'enseignement secondaire.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 58. Band. — B. G. Teubner, Leipzig.

Fasc. 3. — H. Blasius : Laminäre Strömung in Kanälen wechselnder Breite. — L. Hänert : Eine Darstellung der Gleichgewichtsform von Fäden, deren Dichte eine Funktion der Fadenlänge ist und ein mechanisches Integrationsverfahren gewisser Differentialgleichungen. — Martin Näbauer : Vorrichtung zur Auflösung eines linearen Gleichungssystems. — Reinhold Müller : Erzeugung der Koppelkurve durch ähnlich-veränderliche Systeme. — R. Skutsch : Ueber die von Herrn Reinhold Müller untersuchte besondere Bewegung eines ähnlich veranderlichen Systems. — R. Mehmke : Analytischer Beweis des Satzes von Herrn Reinhold Müller über die Erzeugung der Koppelkurve durch ein ähnlich veränderliches System. — F. Klein : Ueber die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. — F. Pfeif-

FER : Zur Statik ebener Fachwerke. — F. PFEIFFER : Zur Frage der sog. Coulombschen Reibungsgesetze. — F. KLEIN und Fr. SCHILLING : Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume.

Fasc. 4. — S. TIMOSCHENKO : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. — Ferencz JÜTTNER : Die chemische Reaktionskinetik und eine neue Painlevésche Transzendente. — E. WÖLFFING : Technisches Abhandlungsregister 1906-1907. — Titel und Inhalt.

2. Livres nouveaux :

E. BARBETTE. — **Le dernier théorème de Fermat** — 1 fasc. in-8°, 19 p.; E. Gnuse, Liège.

L. BERZOLARI. — **Geometria analitica,** 1; Il metodo delle coordinate (Collection *Manuali Hoepli*) — 1 vol. 16°, 409 p.; 3 L.; U. Hoepli, Milan.

M. BÔCHER. — **An introduction to the study of integral equations** (N° 10 des Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics) — 1 vol., in-8°, 71 p.; 2 s. 6 d.; C.-F. Clay, Londres.

F.-G. FARAULT. — **Astronomie Cambodgienne** — 1 vol. in-4°, 283 p.; Fr. 20; Schneider, Saïgon.

Sir Thomas HEATH. — **Diophantus of Alexandria,** a Study in the History of Greek Algebra, 2e édit. — 1 vol. relié, in-8°, 387 p.; 12 s. 6. — University Press, Cambridge; Clay, Londres.

C. HELM. — **Die Grundlehren der höheren Mathematik** zum Gebrauch bei Anwendungen und Wiederholungen zusammengestellt — 1 vol. in 8°, 419 p.; 13,40 M. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

I.-P. KONDEREF. — **L'aplanétisme des surfaces et des lentilles elliptiques et hyperboliques.** — 1 fasc. in-8°, 78 p.; Atar, Genève.

E. LEBON. — **Paul Appell.** Biographie, Bibliographie analytique des écrits. (Collection des *Savants du Jour*). — 1 fasc. in-8°, 71 p. avec un portrait; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

O. VEBLEN et J.-W. YOUNG. — **Projective Geometry,** I. — 1 vol. in-8°, 342 p., 15 s.; Ginn & Cie. New-York, Londres.

G. VIVANTI. — **Les fonctions polyédriques et modulaires** (traduit par Arm. Cahen). — 1 vol. in-8°, 316 p.; 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. MOLK. — Tome I, volume 3, fasc. 4 : Théorie arithmétique des formes par VAHLEN et CAHEN. Propositions transcendantes de la théorie des nombres (suite, p. 289 à 384) par P. BACHMANN, HADAMARD et MAILLET. — Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

RECHERCHE DIRECTE
DES RELATIONS DE VARIABLE A FONCTIONS
EXISTANT ENTRE LA MESURE D'UN ANGLE
ET SES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

Nous signalons plus loin, dans la « Chronique », *la triste nouvelle de la mort de notre dévoué collaborateur M. Ch. Méray et nous donnerons ultérieurement une notice sur sa vie et sur son œuvre. Cet article de lui était composé depuis le mois d'octobre 1910 et les premières épreuves avaient encore été corrigées par l'auteur lui-même.* LA RÉDACTION.

---

1. — L'idée d'angle, l'idée de cercle, entre lesquelles la structure spéciale commune à tous les instruments goniométriques et leur emploi continuel ont établi en pratique une liaison si étroite, sont, par là, devenus presque inséparables, même en théorie. C'est ainsi que les géomètres ont été amenés à passer par la considération du cercle, inconsciemment semble-t-il, pour arriver aux expressions analytiques des rapports trigonométriques d'un angle variable, en fonction du nombre qui mesure son amplitude relativement à une unité quelconque, expressions dont les Tables trigonométriques conservent les valeurs numériques calculées une fois pour toutes, plus ou moins resserrées, plus ou moins rapprochées.

Effectivement, l'examen de la marche des idées dans cette recherche, montre bientôt qu'elle comporte en substance : 1° l'introduction d'un cercle de rayon égal à l'unité de longueur, rapporté à deux diamètres rectangulaires OX, OY, 2° celle de son angle au centre α porté à partir du demi-axe OX, égal au proposé en direction comme en grandeur, 3° puis, de l'arc d'origine (1, 0) que cet angle intercepte sur

la courbe, 4° le calcul de la longueur s de cet arc, en fonction de l'abscisse de son extrémité, cette abscisse étant ensuite remplacée successivement par les divers rapports trigonométriques de l'angle, à l'aide des transformations courantes, 5° l'inversion des fonctions ainsi obtenues, pour passer aux expressions de ces rapports en fonction de s, 6° l'obtention finale des fonctions $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ... , par la substitution de α à s faite dans ces fonctions inverses conformément à la proportionnalité mutuelle de ces deux nombres, *établie dès les tout premiers éléments de la Géométrie (par des moyens bien empiriques et précaires)*.

Ces vues manquent d'homogénéité et de véritable clarté. Elles cachent effectivement les liens directs, partant serrés, *naturels*, qui existent entre les angles et les segments dont les proportionnalités deux à deux fournissent la notion de leurs rapports trigonométriques, sous la combinaison confuse, *artificielle*, de ceux qu'elles font jeter, du cercle, une figure *courbe*, aux premiers d'une part, aux derniers d'autre part, figures seulement *rectilignes*[1]. Je vais en proposer d'autres, exemptes de ces défauts.

Leur économie générale permet encore (5, *inf.*) une forme solide et aisée pour la démonstration de la proportionnalité des arcs d'une circonférence à leurs angles au centre. Outre la faiblesse à laquelle je viens de faire allusion, le mécanisme du raisonnement en usage présente un contraste *unique* et choquant avec les moyens *entièrement différents* qui s'imposeraient dans la recherche, pour toute autre ligne, de la liaison analytique entre un arc et un angle, en semblable dépendance géométrique. Aucun redressement n'est possible dans la théorie que je critique, puisqu'elle a pour base essentielle la proportionnalité, précisément, qui est en question.

2. — En nommant x la mesure d'un angle rectiligne indéterminé, rapporté à une unité quelconque, ce nombre étant

[1] Ces réflexions sont de tous points applicables à la Trigonométrie élémentaire. Elle fait du « cercle trigonométrique » l'objet de références continuelles pour les définitions, l'exposition, les discussions, ... ; elle l'emploie ensuite de la manière la plus forcée à procurer une image (absolument inexacte) du calcul des Tables, le tout au prix de longueurs et d'obscurités, de fréquentes confusions, notamment, entre des segments rectilignes et des nombres abstraits, entre les angles et des arcs de cercle.

revêtu de la qualification positive ou négative selon la direction giratoire attribuée à cet angle, les propriétés courantes de sin x, ... se déduisent directement et rapidement, des définitions, par simples rapports de segments rectilignes, que j'ai employées rudimentairement dans mes *Nouveaux Éléments de Géométrie* (250* *et suiv.*)[1], puis élargies tout récemment et mises en œuvre dans la mesure de l'essentiel[2].

J'en rappelle les suivantes appartenant au rapport

$$(1) \qquad u = \text{tang}\, x ,$$

considéré comme fonction de x, que je prends pour pivot de cette Note, et je représenterai par k un multiplicateur entier indéterminé (positif, nul ou négatif), par $\mathfrak{N}$, comme auparavant, la mesure de l'angle neutre (134*).

I. *Pour toute valeur de* x *étrangère à la progression arithmétique, de raison* $\mathfrak{N}$,

$$(2) \qquad \ldots, -\frac{\mathfrak{N}}{2} - 2\mathfrak{N}, -\frac{\mathfrak{N}}{2} - \mathfrak{N}, -\frac{\mathfrak{N}}{2}, \frac{\mathfrak{N}}{2}, \frac{\mathfrak{N}}{2} + \mathfrak{N}, \frac{\mathfrak{N}}{2} + 2\mathfrak{N}, \ldots,$$

celle de tang x *est assignable, unique en outre. Mais elle ne l'est en aucune de ces quantités exceptionnelles* (*Cf.* VII, 3°, *inf.*).

II. *Pour les premières valeurs de* x *ci-dessus* (I), *on a les identités numériques*

$$(3) \qquad \text{tang}\,(x + k\mathfrak{N}) = \text{tang}\, x ,$$

$$(4) \qquad \text{tang}\,(-x) = -\text{tang}\, x ,$$

$$(5) \qquad \text{tang}\left(\frac{\mathfrak{N}}{2} \mp x\right) = \pm \frac{1}{\text{tang}\, x} ,$$

les deux premières montrent que *la fonction est périodique* (*Cf.* V, 3°, *inf.*), et qu'*elle est impaire*.

[1] Un numéro de renvoi visera ici la 3e édition de cet ouvrage (1906), quand il sera affecté d'un astérisque à droite; la première partie de mes « *Leçons nouvelles sur l'Analyse...* », la deuxième, ..., quand il en portera un, deux, ..., à gauche.

[2] Voir *L'Enseignement mathématique*, N° du 15 janv. 1911, p. 5-16.

III. *On a les égalités numériques*

$$\operatorname{tang}(k\mathfrak{N}) = 0\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\mathfrak{N}}{4} = 1\,. \tag{7}$$

IV. *Quand* x *croît à l'intérieur de l'intervalle limité par deux termes consécutifs quelconques de la suite* (2), tang x *croît aussi, en passant par* 0 *en même temps que* x *par la demi-somme des limites de l'intervalle.*

Il en est ainsi pour le demi-intervalle $[0, \mathfrak{N} : 2]$ (**251***, V), puis (4) pour le précédent $[-\mathfrak{N} : 2, 0]$, puis (3) pour un quelconque des intervalles entiers considérés.

V. *Pour toute valeur* U *attribuée à* u (1), *et dans chacun des intervalles en question, la résolution par rapport à* x *de l'équation numérique*

$$U = \operatorname{tang} x \tag{8}$$

donne une racine unique X.

1° Ceci est vrai dans l'intervalle $[-\mathfrak{N} : 2, +\mathfrak{N} : 2]$. Car, pour $U = 0$, on a la racine $x = 0$ (6); pour $U = \upsilon > 0$, la construction du n° **254*** fournit une racine ξ comprise entre $0, +\mathfrak{N} : 2$; pour $U = -\upsilon < 0$, la formule (4) montre immédiatement la racine $-\xi$ comprise entre $-\mathfrak{N} : 2, 0$. Et, dans l'intervalle considéré, aucune quantité $X' \gtrless X$ racine dont nous venons de constater l'existence, ne peut vérifier l'équation (8); elle donnerait effectivement $\operatorname{tang} X' \gtrless \operatorname{tang} X$ (IV), c'est-à-dire $\operatorname{tang} X' \neq U$.

2° De cet intervalle, on passe à tout autre au moyen de la relation (3).

3° Les constatations précédentes confèrent le caractère *élémentaire* (****260**) à la période $\mathfrak{N}$ trouvée à la fonction tang x (II).

VI. *En considérant une seconde variable* y, *on a la formule*

$$\operatorname{tang}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{1 \mp \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}\,, \tag{9}$$

où les signes supérieurs sont à prendre ensemble, ou bien les

inférieurs et qui doit être interprétée conformément aux conventions habituelles en matière de quantités infinies, quand un ou plusieurs termes de la suite (2) s'y trouvent placés sous le signe tang (1). (VII, 3°, *inf.*)].

VII. *La fonction tang* x *est continue en toute valeur de* x *qui n'appartient pas à la suite* (2), *mais infinie en chaque terme de cette suite.*

1° Quand x tend vers 0, et en supposant d'abord positives toutes ses valeurs successives, tang x, finissant alors par rester positive (IV), tend aussi vers 0, valeur de tang 0 (*Ib.*). Car si la valeur de cette fonction ne finissait pas par demeurer inférieure à toute quantité positive donnée ν, il en serait ainsi pour x relativement à ξ, racine unique de l'équation numérique tang $x = \nu$ dans l'intervalle $[-\mathfrak{N} : 2, +\mathfrak{N} : 2]$ (V), positive également, et l'on n'aurait pas $\lim x = 0$.

Quand les valeurs successives de x, supposée toujours infiniment petite, sont quelconques, les choses se passent de la même manière, à cause de $\lim |x| = 0$ aussi et de $|\text{tang}\, x| = \text{tang}\, |x|$ (4, *sup.*).

2° En faisant tendre maintenant x vers une quantité quelconque a étrangère à la suite (2), posant $x - a = h$ quantité infiniment petite, puis substituant $a + h$, a à x, y dans la relation (9) écrite avec les signes inférieurs, il vient

$$(10) \quad \text{tang}\,(a + h) - \text{tang}\, a = [1 + \text{tang}\,(a + h)\,\text{tang}\, a]\,\text{tang}\, h,$$

où le premier facteur du second membre est fini. Effectivement, on a $|\text{tang}\,(a + h)| < \text{tang}\,(\alpha + \eta)$ à partir du moment où α, η valeurs numériques de a, h conservent une somme inférieure à la valeurs de la moindre des différences existant entre a et les limites de l'intervalle contenant cette quantité (IV). Le premier membre est donc infiniment petit comme le dernier facteur du second (1°). En d'autres termes, on a bien l'égalité $\lim \text{tang}\, x = \lim \text{tang}\,(a + h) = \text{tang}\, a$.

3° La dernière partie de l'énoncé résulte immédiatement de la combinaison de la constatation préparatoire (1°) avec les relations (3), (5).

VIII. *En considérant un entier positif quelconque* n, *on a*

(sous le bénéfice de l'observation finale de l'énoncé VI)

$$(11) \qquad \operatorname{tang} nx = \frac{P_n(\operatorname{tang} x)}{Q_n(\operatorname{tang} x)} ,$$

où $P_n(\operatorname{tang} x)$, $Q_n(\operatorname{tang} x)$ *sont des polynômes entiers en* tang x, *sans diviseur commun, et de degrés effectifs* n, n — 1 *quand le nombre* n *est impair,* n — 1, n *quand il est pair.*

3. — *En posant, pour abréger,*

$$(12) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \Pi > 0 , \qquad (\text{II}, 4^o, \textit{inf.})$$

la fonction considérée (1) est l'intégrale de l'équation différentielle

$$(13) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}(1+u^2)$$

complétée par la condition initiale

$$(14) \qquad u = 0 , \quad \textit{pour} \quad x = 0 .$$

Nos énoncés n'ayant à viser aucune quantité imaginaire, *la réalité de celles dont nous parlerons demeurera partout sous-entendue* [1].

I. Supposée olotrope pour toutes les valeurs (réelles) de x, sauf les termes de la suite (2) où ceci n'est pas possible (2, VII), cette fonction est douée de dérivées dans tout ce domaine (*155 *et suiv.*), et, divisée par h, la relation (10) donne, pour lim $h = 0$,

$$(15) \qquad \operatorname{tang}' a = \lim \frac{\operatorname{tang}(a+h) - \operatorname{tang} a}{h} \qquad (^*\mathbf{196})$$
$$= \operatorname{tang}' 0 (1 + \operatorname{tang}^2 a) ,$$

à cause de lim tang $(a + h) = \operatorname{tang} a$, lim $(\operatorname{tang} h : h) = \operatorname{tang}' 0$.

[1] Le cas actuel est de ceux où les moyens indiqués aux nos ***118 et suiv. dispensent du recours aux imaginaires.

Or cette égalité equivaut à une équation différentielle de la forme (13), puisque a est une valeur quelconque attribuée à x dans le domaine qui vient d'être défini.

D'autre part, la constante $\tang' 0$ ne peut être nulle, sans quoi, d'après l'équation (13), $\tang x$ le serait identiquement, ce qui n'a pas lieu. Elle est positive parce que $\tang h$ finit par conserver le signe de h (IV). Quant à la condition (14), elle ne diffère pas de l'égalité exacte $\tang 0 = 0$ (6).

II. *L'équation différentielle*

$$(16) \qquad \frac{du}{dx} = 1 + u^2$$

et la condition initiale (14) définissent une fonction intégrale, restant olotrope à l'intérieur de tout intervalle limité par deux termes consécutifs de la progression arithmétique

$$(17) \qquad \dots, -\frac{\Pi}{2} - 2\Pi, \frac{\Pi}{2} - \Pi, -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} + \Pi, \frac{\Pi}{2} + 2\Pi, \dots,$$

mais devenant meromorphe seulement, en chacune de ces valeurs particulières, qui est un infini simple pour cette fonction (**29, **33).

1° La propriété, pour le second membre de l'équation (16), d'être un polynôme entier en x, u, par suite une fonction indéfiniment olotrope de ces deux variables considérées un instant comme mutuellement indépendantes, écarte toute intégrale singulière et dote cette équation d'une intégrale ordinaire répondant à toute condition initiale donnée

$$(18) \qquad u = u_0, \qquad \text{pour} \qquad x = x_0,$$

restant olotrope aussi longtemps que finie (*381, II). On peut donc partir de (18) pour construire le premier développement d'une intégrale de ce genre, que nous représentons par $T(x)$.

Cette fonction est toujours croissante, puisque la valeur de sa dérivée, fournie par le second membre de (16) est essentiellement positive.

On constatera sans difficulté que les relations ultimes attachées à l'équation (16) (*290) sont de la forme

$$\frac{d^m u}{dx^m} = U_m(u) ,$$

où l'expression $U_m(u)$ est un polynôme de degré $m+1$, en u seulement, dont les coefficients sont tous réels, celui de u^i étant $\gtreqless 0$, selon que l'entier $m+i$ est pair ou impair.

Quand $u_0 = 0$, cette observation assigne au premier développement de $T(x)$ la forme à remarquer

$$(19) \qquad T(x) = u_0^{(1)}(x - x_0) + u_0^{(3)}(x - x_0)^3 + \dots ,$$

dont tous les termes effectifs sont de degrés impairs, avec des coefficients positifs.

2° *Deux constantes ayant été représentées par* c, C, *on aura des intégrales de l'équation* (16) *en prenant les fonctions*

$$\Theta_c(x) = T(c + x) ,$$

$$\Theta_-(x) = -T(-x) ,$$

$$\Theta_{c,1}(x) = \pm T(c \mp x)^{-1} ,$$

$$\Theta_C(x) = \frac{C + T(x)}{1 - CT(x)} ,$$

(sous la condition naturelle, que l'existence de l'intégrale originaire T soit certaine pour les valeurs dont les fonctions simples $c + x$, $-x$, $c \mp x$ sont susceptibles).

Car on trouvera successivement, sans difficulté,

$$\Theta'_c(x) = T'(c + x) = 1 + T(c + x)^2 = 1 + \Theta_c(x)^2 \quad (16) ,$$

$$\Theta'_-(x) = T'(-x) = 1 + T(-x)^2 = 1 + \Theta_-(x)^2 ,$$

$$\Theta'_{c,1}(x) = \frac{T'(c \mp x)^2}{T(c \mp x)^2} = \frac{1 + T(c \mp x)^2}{T(c \mp x)^2} = 1 + \Theta_{c,1}(x)^2 ,$$

$$\Theta'_C(x) = \frac{(1 + C^2)T'(x)}{[1 - CT(x)]^2} = \frac{(1 + C^2)[1 + T(x)^2]}{[1 - CT(x)]^2} = 1 + \Theta_C(x)^2 ,$$

ce qui était à vérifier.

3° Les attributions numériques $x_0 = u_0 = 0$ faites dans $T(x)$ conduisent à l'intégrale de l'équation (16) qui corres-

pond à la condition (14) et que nous représenterons par $\mathfrak{T}(x)$. En même temps qu'elle, nous considérerons la fonction x de u, inverse de $\mathfrak{T}$, racine de l'équation finie

$$(20) \qquad u = \mathfrak{T}(x) ,$$

sous la condition initiale

$$(21) \qquad x = 0 , \quad \text{pour} \quad u = 0 ,$$

intégrale, en conséquence, de l'équation

$$(22) \qquad \frac{dx}{du} = \frac{1}{1 + u^2}$$

assistée de la même condition initiale (14).

Dans le domaine entier des valeurs (réelles) de u, cette nouvelle fonction est olotrope parce qu'il en est ainsi pour le second membre de (22) (*208), réelle parce que tels sont les coefficients de son premier développement, ceux de tous les subséquents visiblement, ensuite, sans cesse croissante parce que la valeur de sa dérivée, savoir du second membre précité, est essentiellement positive. La fonction x ne figurant pas dans ce second membre, sa valeur est fournie par la formule générale

$$(23) \qquad x = \int_0^u \frac{d\upsilon}{1 + \upsilon^2} ,$$

où il est commode de régler le calcul de l'intégrale définie en faisant passer υ de 0 à u par une marche de sens constant.

Tout ceci montre immédiatement que x est encore une fonction impaire de u, toujours du signe de cette variable.

4° En faisant u infinie, positivement d'abord, négativement ensuite, on trouve

$$\lim x = \pm A ,$$

où A désigne une quantité positive.

Dans le premier cas, u peut être supposée en croissance constante à partir de 0, partant x avec elle (3°), et, dès qu'elle

devient supérieure à quelque constante positive a, la formule (23) donne

$$0 < x = \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_a^u \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} < \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_a^{+\infty} \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} < \int_0^a \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \frac{1}{a} \; ,$$

à cause de $1 : (1+\upsilon^2) < 1 : \upsilon^2$ (38).

De là, résulte l'existence des intégrales définies et relations mutuelles ci-après :

$$\Lambda = \int_0^{+\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = -\int_0^{-\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \frac{\Pi}{2} > 0 \; ,$$

moyennant la définition (12).

Il faut noter l'égalité

(24) $$\mathfrak{T}\left(\pm \frac{\Pi}{4}\right) = \pm 1 \; .$$

L'une des précédentes donne effectivement

$$\frac{\Pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = \int_0^{1} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} + \int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} \; ;$$

la substitution $\upsilon = 1 : \varphi$, d'où $\varphi = 1 : \upsilon$, conduit à

$$\int_1^{\infty} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} = -\int_1^{0} \frac{d\varphi}{1+\varphi^2} = \int_0^{1} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} \; ;$$

il en résulte aussitôt

(25) $$\frac{\Pi}{4} = \int_0^{1} \frac{d\upsilon}{1+\upsilon^2} \; ,$$

puis la première des égalités (24) en question, à cause de la relation (23) qui entraîne (20) généralement.

Et pareillement pour l'autre (3°, *in fine*).

5° On voit ainsi, que, u venant à croître de $-\infty$ à $+\infty$, x traitée en fonction implicite de u, croît de $-\Pi:2$ à $+\Pi:2$;

on en conclut qu'inversement (11), u, ramenée maintenant à son rôle primitif de fonction de x, passera de $-\infty$ à $+\infty$ par croissance incessante, quand x marchera de $-\Pi:2$ à $+\Pi:2$ dans un sens constant.

Dans l'intervalle entier

$$(26) \qquad \left[-\frac{\Pi}{2}, \quad +\frac{\Pi}{2}\right],$$

notre intégrale $\mathfrak{T}(x)$ existe donc, olotrope dans son intérieur (1°), mais infinie en ses extrémités. On peut ajouter qu'elle est méromorphe en chacune de ces dernières.

D'après ce qui vient d'être dit, la fonction composée $\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2}-x\right)$ est effectivement définie pour

$$-\frac{\Pi}{2} \leqq \frac{\Pi}{2} - x \leqq +\frac{\Pi}{2},$$

inégalités équivalentes à

$$0 \leqq x \leqq \Pi,$$

c'est-à-dire dans l'intervalle entier

$$(27) \qquad [0, \quad \Pi].$$

Elle, son inverse arithmétique, par suite, et $\mathfrak{T}(x)$ le seront donc dans l'intervalle partiel

$$(28) \qquad \left[0, \quad \frac{\Pi}{2}\right]$$

que (26), (27) comprennent à la fois, et où l'on a ainsi l'identité

$$(29) \qquad \mathfrak{T}(x) = \frac{1}{\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2}-x\right)},$$

parce que les deux membres sont des intégrales de l'équation (16) (2°), dont les valeurs en $x = \Pi:4$, savoir $\mathfrak{T}(\Pi:4)$, $1:\mathfrak{T}(\Pi:4)$, sont toutes deux $=1$ (24).

Pour des valeurs de x suffisamment voisines de $\Pi:2$ à

l'intérieur de l'intervalle partiel (28), la formule (19) donne, par la substitution de 0, Π : 2 — x à x_0, x,

$$\mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right) = u_0^{(1)}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right) + u_0^{(3)}\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)^3 + \dots ,$$

d'où, en vertu de (29) et à cause de $u_0^{(1)} \neq 0$,

$$(30) \quad \mathfrak{T}(x) = -\frac{1}{u_0^{(1)}}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right)^{-1} + \mathrm{u}^{(1)}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right) + \mathrm{u}^{(3)}\left(x - \frac{\Pi}{2}\right)^3 - \dots ,$$

développement méromorphe en $x = \Pi : 2$, ayant cette quantité pour infini simple (**33).

Et semblablement, pour ce qui se passe en $x = -\Pi : 2$.

6° L'intervalle (26) étant enclos par des valeurs singulières, la série de Taylor est impuissante au calcul de notre intégrale en dehors de lui. Mais sa deuxième extrémité, par exemple, peut être franchie au moyen du développement (30), ou, ce qui revient au même, de la formule (29), dont le second membre est connu dans l'intervalle (27), extrémités comprises (5°), qui étend en conséquence la définition de $\mathfrak{T}(x)$ jusqu'à $x = \Pi$, inclusivement.

7° En $x = \Pi$, on trouve de cette manière $\mathfrak{T}(x) = 0$ et olotrope, parce que Π : 2 — x prend la valeur — Π : 2 rendant $\mathfrak{T}(\Pi : 2 - x)$ infinie et méromorphe (5° *in fine*), et le développement de Taylor, reprenant sa validité, donne

$$\mathfrak{T}(x) = u_0^{(1)}(x - \Pi) + u_0^{(3)}(x - \Pi)^3 + \dots ,$$

pour des valeurs de x suffisamment voisines de Π (1°).

Repartant de là et procédant comme ci-dessus (5°), (6°) presque textuellement, on poussera le calcul de $\mathfrak{T}(x)$, de $x = \Pi$ à $x = 2\Pi$, puis de $x = 2\Pi$ à $x = 3\Pi$, ... , et ainsi de suite. On recommencera semblablement, de $x = 0$ à $x = -\Pi$, puis de $x = -\Pi$ à $x = -2\Pi$, ... , et l'existence de notre intégrale se trouvera établie dans tout le domaine des valeurs réelles de x.

8° On a identiquement

$$(31) \qquad \mathfrak{T}(x + k\Pi) = \mathfrak{T}(x) .$$

Les calculs expliqués tout à l'heure (5° *et suiv.*) donnent en particulier l'égalité

$$\mathfrak{T}(k\Pi) = 0 , \tag{32}$$

en vertu de laquelle les deux membres de cette relation, qui sont des intégrales de l'équation (16) (2°), ont, en $x = k\Pi$, des valeurs initiales $= 0$, l'une et l'autre.

En d'autres termes, la fonction $\mathfrak{T}(x)$ admet la quantité Π pour période, et celle-ci est élémentaire (**260). Car, à l'intérieur de l'intervalle (26) d'amplitude Π où elle est olotrope (5), sa croissance constante (1°) l'empêche de prendre des valeurs égales pour des valeurs inégales de x, ce qui aurait évidemment lieu, si elle admettait quelque période $< \Pi$, numériquement.

9° On a de même

$$\mathfrak{T}(-x) = -\mathfrak{T}(x) . \tag{33}$$

Car les fonctions $-\mathfrak{T}(-x)$, $\mathfrak{T}(x)$ sont des intégrales de l'équation (16) (2°), qui prennent encore la même valeur 0, pour $x = 0$.

10° A présent, un peu d'attention suffit pour apercevoir l'exactitude complète de notre énoncé préparatoire II.

III. *Les identités* (9), (11) *ont lieu littéralement pour* $\mathfrak{T}$(x) *substituée à tang* x, *en même temps que la suite* (17) *à* (2).

L'exactitude de la relation

$$\mathfrak{T}(x \pm y) = \frac{\mathfrak{T}(x) \pm \mathfrak{T}(y)}{1 \mp \mathfrak{T}(x)\mathfrak{T}(y)} \tag{34}$$

est assurée par le fait, que (II, 2°) ses deux membres sont des intégrales de l'équation (16), dont les valeurs en $x = 0$ se confondent l'une et l'autre avec $\pm\mathfrak{T}(y)$ (32).

L'autre identité

$$\mathfrak{T}(nx) = \frac{P_n(\mathfrak{T}(x))}{Q_n(\mathfrak{T}(x))} \tag{35}$$

se tire de (34), maintenant établie, par les mêmes moyens que (11) de (9).

IV. L'intégrale de l'équation (13) mentionnée dans notre énoncé principal est la fonction

$$(36) \qquad \mathfrak{t}(x) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right),$$

car, avec $\mathfrak{t}(0) = \mathfrak{T}(0) = 0$, il vient immédiatement

$$\mathfrak{t}'(x) = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\mathfrak{T}'\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right) = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\left[1 + \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}x\right)^2\right] \qquad (16)$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}}[1 + \mathfrak{t}(x)^2],$$

et l'exactitude de l'identité

$$(37) \qquad \tan x = \mathfrak{t}(x)$$

reste seule à prouver.

1° On aperçoit immédiatement que la simple substitution de $\mathfrak{N}$ à Π dans les principaux énoncés des alinéas II, III concernant $\mathfrak{T}(x)$ les étend à $\mathfrak{t}(x)$.

2° A cause de

$$\mathfrak{t}(k\mathfrak{N}) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}k\mathfrak{N}\right) = \mathfrak{T}(k\Pi) = 0, \qquad (32)$$

$$\mathfrak{t}\left(\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{T}\left(\frac{\Pi}{4}\right) = 1, \qquad (24)$$

et de (6), (7), l'identité (37) est vérifiée numériquement pour $x = k\mathfrak{N}$, $x = \mathfrak{N} : 4$.

(Sous les conventions habituelles) elle l'est encore pour $x = \mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}$, quantités composant la suite (2), puisque $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}) = \mathfrak{T}(\Pi : 2 + k\Pi)$ (36) y est infinie (II, 5°, 8°) comme $\tan x$ (2, VII, 3°).

3° Un entier positif quelconque ayant été désigné par ν, les ν quantités positives

$$x_i = \frac{\mathfrak{N} : 4}{\nu} + i\frac{\mathfrak{N}}{\nu} = \frac{4i + 1}{4\nu}\mathfrak{N} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1),$$

forment une suite croissante, toutes sont $< \mathfrak{N}$ parce qu'il en est ainsi pour la dernière $[(4\nu - 3) : 4\nu]\mathfrak{N}$, et, en nommant I

le plus grand entier inférieur à la fraction $(2\nu - 1) : 4$, celles d'entre elles qui composent le groupe

$$x_0, x_1, \dots, x_I$$

sont comprises entre 0, $\mathfrak{N} : 2$ exclusivement, les autres

$$x_{I+1}, \dots, x_{\nu-1}$$

entre $\mathfrak{N} : 2$, $\mathfrak{N}$ exclusivement encore ; on s'en assurera sans difficulté.

Combinés avec la croissance de tang x, négative entre $\mathfrak{N} : 2$, $\mathfrak{N} : 2 + \mathfrak{N}$, puis positive entre 0, $\mathfrak{N} : 2$ (2, IV), ces observations entraînent les inégalités

$$(38) \qquad \operatorname{tang} x_{I+1} < \operatorname{tang} x_{I+2} < \dots < \operatorname{tang} x_{\nu-1} < 0 < \operatorname{tang} x_0 < \operatorname{tang} x_1 < \dots < \operatorname{tang} x_I .$$

Comme, d'autre part, $\operatorname{tang} \nu x_i = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4 + i\mathfrak{N}) = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4) = 1$ (3, 7), les quantités tang x_i sont les ν racines de l'équation entière en u, de degré ν,

$$(39) \qquad P_\nu(u) - Q_\nu(u) = 0$$

provenant de (11) par la substitution de ν, $1 = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4)$, u à n, tang nx, tang x, et les inégalités (38) montrent que $\operatorname{tang} x_0 = \operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ est la moindre de toutes les positives.

Un raisonnement identique, mais basé maintenant sur les propriétés de la fonction $\mathfrak{t}(x)$ (1°), prouve que $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ est pareillement la plus petite des racines positives de la même équation (39). De tout ceci on conclut

$$(40) \qquad \operatorname{tang} \frac{\mathfrak{N}}{4\nu} = \mathfrak{t}\left(\frac{\mathfrak{N}}{4\nu}\right) .$$

4° En considérant un second entier positif μ quelconque, on a encore

$$(41) \qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\mathfrak{N}}{4}\right) .$$

Car il y a identité entre les formules tirées de (11) et (35) pour exprimer, au moyen de $\operatorname{tang}(\mathfrak{N} : 4\nu)$ et $\mathfrak{t}(\mathfrak{N} : 4\nu)$, quantités égales (40), les deux membres de (41), respectivement.

5° Une valeur positive quelconque de x ($\neq \mathfrak{N} : 2 + k\mathfrak{N}$) étant actuellement considérée, puis faisant tendre la fraction indéterminée $\mu : \nu$ vers $4x : \mathfrak{N}$, on trouvera

$$\lim \operatorname{tang} \left(\frac{\mu}{\nu} \frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \operatorname{tang} \left(\frac{4x}{\mathfrak{N}} \frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \operatorname{tang} x ,$$

$$\lim \mathfrak{t}\left(\frac{\mu}{\nu} \frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}\left(\frac{4x}{\mathfrak{N}} \frac{\mathfrak{N}}{4}\right) = \mathfrak{t}(x) ,$$

parce que les fonctions tang, $\mathfrak{t}$ sont continues (2, VII), (1°), (II), puis la relation (37) pour cette valeur de x, à cause de l'égalité permanente (41).

Finalement, les identités (4), (33) étendent aux valeurs négatives de la variable, la relation (37) établie maintenant pour ses valeurs positives.

4. — Les relations algébriques fournies par la Géométrie élémentaire entre tang x et les autres rapports trigonométriques de l'angle x (251*, II, III) ramènent présentement la théorie de tous, en tant que fonctions de cette variable, à de simples combinaisons *algébriques*, faites entre elles et l'intégrale de l'équation fondamentale (13).

Il est remarquable qu'ainsi, toutes ces fonctions, *rencontrées en Géométrie* pourtant, soient olotropes (en dehors de circonstances exceptionnelles assignables à priori), *analytiques*, au sens de la redondance généralement préférée. C'est une constatation de la grande règle attendant encore un démenti, que les séries entières sont aptes à représenter toutes les fonctions dont la considération n'est pas un jeu d'esprit stérile.

5. — *Les longueurs des arcs d'une même circonférence sont proportionnelles aux amplitudes de leurs angles au centre.*

Soient r le rayon de cette circonférence, α l'amplitude d'un angle au centre variable, s la longueur de l'arc m_0m intercepté par lui sur elle, puis x, y les coordonnées de m

rapporté à deux demi-diamètres rectangulaires dont le premier passe par m_0 et

$$(42) \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

l'équation de la courbe.

En prenant y pour variable indépendante, on obtient facilement

$$(43) \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{r}{x} ,$$

à cause de

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \qquad (****25)$$

et de (42) donnant

$$(44) \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} , \qquad 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} .$$

On trouve encore

$$(45) \qquad \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\mathfrak{N}}{\Pi}\frac{1}{x}$$

à cause de

$$(46) \qquad \text{tang } \alpha = \frac{y}{x} ,$$

d'où, par différentiation,

$$\frac{d \text{ tang } \alpha}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x}\right) = \left(x - y\frac{dx}{dy}\right) : x^2 ,$$

relation que les substitutions (13), (46), (44) réduisent à

$$\frac{\Pi}{\mathfrak{N}}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{d\alpha}{dy} = \frac{x^2 + y^2}{x^3} .$$

De (43), (45) on déduit

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} r \frac{d\alpha}{dy} ,$$

puis, en intégrant dans les conditions données, $s = \alpha = 0$,

pour $y = 0$,

$$s = \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} r\alpha . \tag{47}$$

ce qui est la proportionnalité énoncée.

6. — Par définition, la longueur de la circonférence est celle de l'arc intercepté sur elle par l'angle au centre replet (**137**', II), ayant $2\mathfrak{N}$ pour mesure. En la représentant par C, l'attribution de cette valeur $2\mathfrak{N}$, faite à α dans la relation précédente, donne

$$C = \Pi . 2r .$$

D'après cette égalité, le nombre Π introduit dans nos spéculations par des considérations exclusivement analytiques (12), se trouve avoir pour représentation géométrique, le rapport de la longueur d'une circonférence quelconque à celle de son diamètre, que la lettre π désigne universellement.

En même temps, la formule (23), essentielle à la théorie précédente, est précisément celle dont le développement en série, la combinaison avec son cas particulier (25), et certains artifices procurés par les relations (34), (35), fournissent les moyens les plus avantageux pour le calcul pratique de ce nombre.

7. — L'adoption pour angle unité, de celui qui assigne la mesure Π [$= \pi$ (**6**)] à l'angle neutre, savoir de l'angle au centre qui, d'après la relation (47), intercepte un arc de longueur r sur la circonférence de rayon r, de mesure 1 sur celle, par exemple, dont le rayon est égal à l'unité de longueur (ceci rappelé pour les esprits qui voient un dogme dans l'immixtion du cercle à l'arithmétique des angles), fait disparaître, en le réduisant à 1, le multiplicateur $\Pi : \mathfrak{N}$ qui s'est montré si souvent dans nos calculs, dans les équations (13), (47) notamment. Ce choix simplifie donc sensiblement, non pas certes les formules élémentaires de la Trigonométrie, mais celles de ses régions supérieures, qui contiennent les rapports tri-

gonométriques en combinaisons *algébriques* avec des mesures d'angles (construction des Tables, etc.).

Sous le régime d'une unité d'angle quelconque, on trouve, par exemple,

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \operatorname{tang}' 0 (1 + \operatorname{tang}^2 x) \qquad (15)$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} (1 + \operatorname{tang}^2 x) \qquad (13)$$

$$= \frac{\Pi}{\mathfrak{N}} \frac{1}{\cos^2 x},$$

résultat bien inférieur en commodité, à la formule courante

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

mais qui la reproduit par le choix précité. Et pareillement, pour les autres rapports trigonométriques, avec des complications plus grandes encore quand il s'agit de dérivées d'ordres supérieurs.

Ces observations analytiques semblent apporter au règlement de l'unité d'angle qui domine les calculs de la Trigonométrie supérieure (les formules élémentaires aussi, mais abusivement) une justification motivée qui lui manquait encore.

Ch. Méray (Dijon).

SUR LA DÉTERMINATION
DE LA COURBURE D'UNE LIGNE PLANE
CONSIDÉRÉE COMME
ENVELOPPE DE SES TANGENTES

En examinant la nouvelle édition allemande de l'excellent *Repertorium der höh. Mathematik* de M. E. Pascal, dont deux volumes ont récemment paru, j'ai remarqué le manque de formules répondant à la question énoncée dans le titre de cette Note. Or on a besoin de ces formules dans plusieurs occasions, et comme je ne les ai pas trouvées dans les traités que j'ai examinés, je me propose de les établir. Elles offrent une application de la théorie classique des enveloppes, et pourraient trouver place dans toute exposition scolaire des applications géométriques du calcul différentiel.

I. — Soit

$$\varphi(u\,,\,v) = 0 \tag{1}$$

l'équation plückérienne d'une courbe plane quelconque Γ; cela signifie que cette courbe est l'enveloppe de la droite

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{2}$$

les paramètres u, v étant liés par l'équation (1); l'équation cartésienne de la courbe Γ est le résultat de l'élimination de u, v entre les équations (1), (2) et

$$\begin{vmatrix} x & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ y & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Si donc on pose pour abréger

$$(3)\qquad W = u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

on aura les expressions suivantes pour les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe Γ :

$$(4)\qquad x = \frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad y = \frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

u et v étant liées par la relation (1). La normale à la courbe Γ au point P(x, y) a évidemment pour équation (X et Y étant les coordonnées courantes)

$$(5)\qquad v(X - x) - u(Y - y) = 0 ;$$

comme u, v satisfont à l'équation (1), l'enveloppe de cette droite a pour équation le résultat de l'élimination de u, v entre les équations (1), (5) et

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} -v\dfrac{\partial x}{\partial u} - (Y - y) + u\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ (X - x) - v\dfrac{\partial x}{\partial v} + u\dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette formule x, y sont données par les équations (3), (4) et X, Y sont les coordonnées du *centre de courbure* C de la courbe Γ relatif au point P(x, y), cela prouve que $\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2}$ est le rayon de courbure que nous cherchons. Or l'équation (5) donne

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

ou bien

$$(7)\qquad X - x = \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad Y - y = \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}};$$

par suite (6) devient

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u\dfrac{\partial y}{\partial u} - v\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \dfrac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}} + u\dfrac{\partial y}{\partial v} - v\dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\frac{R\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ u & v & 0\end{vmatrix}.$$

Dans le second membre il faut substituer à x, y leurs expressions données par les équations (3), (4); le déterminant qui en résulte peut se transformer de manière qu'il prenne une forme plus simple; toute réduction faite, on trouve

$$\text{(I)}\qquad R=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^3}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial u} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & 0\end{vmatrix}.$$

C'est la formule qui résout la question que nous nous étions proposée.

II. — Des calculs analogues, mais plus simples, permettent de résoudre la même question lorsqu'on connaît les expressions des coordonnées plückériennes d'une tangente à la courbe considérée en fonction d'un paramètre t:

$$u=u(t)\,,\qquad v=v(t)\,.$$

Dans ce cas, combinons l'équation

$$ux+vy+1=0$$

avec sa dérivée par rapport à t, c'est-à-dire

$$u'x+v'y=0\,;$$

si on pose pour abréger

$$\Delta=\begin{vmatrix}u\,, & v\\ u'\,, & v'\end{vmatrix},\qquad \text{on aura}\qquad \Delta'=\begin{vmatrix}u\,, & v\\ u''\,, & v''\end{vmatrix},$$

et

$$\text{(8)}\qquad x=-\frac{v'}{\Delta}\,,\qquad y=\frac{u'}{\Delta}\,,$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque P de la courbe Γ considérée. L'équation (5) représentera encore la normale en P à la courbe Γ; pour en trouver l'enveloppe, combinons l'équation (5) avec sa dérivée

$$v'(X - x) - u'(Y - y) = vx' - uy' .$$

Mais, si on a recours aux équations (7), on peut écrire

$$R\frac{uv' - u'v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = vx' - uy' ;$$

et, en remplaçant x, y par leurs expressions (8), on trouve, après quelques calculs,

$$\text{(II)} \qquad R = \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} (u'v'' - u''v')}{(uv' - u'v)^3} ,$$

relation qui sert à calculer le rayon de courbure de toute courbe déterminée par les expressions des coordonnées plückériennes des tangentes en fonction d'un paramètre.

III. — Je vais finir par une application de la formule que je viens d'établir. Considérons la courbe Γ représentée en cordonnées orthogonales comme il suit :

$$x = \xi(t) , \qquad y = \eta(t) ,$$

et sa polaire réciproque Π par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

La courbe Π est l'enveloppe de la droite

$$x\xi + y\eta - a^2 = 0$$

dont les coordonnées plückériennes sont

$$u = -\frac{\xi(t)}{a^2} , \qquad v = -\frac{\eta(t)}{a^2} .$$

Pour en trouver le rayon de courbure R_Π, on n'a qu'à appliquer la formule (II) : on trouve de la sorte

$$R_\Pi = a^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} (\xi'\eta'' - \xi''\eta')}{(\xi\eta' - \xi'\eta)^3} .$$

Or le rayon de courbure R_Γ de la courbe dont nous sommes partis est donné par la formule suivante

$$R_\Gamma = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'} ;$$

donc on a

$$R_\Pi R_\Gamma = a^2 \left[\frac{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{1}{2}}}{\xi\eta' - \xi'\eta} \right]^3 .$$

Remarquons à présent que, si μ est l'angle que la tangente en un point P de la courbe Γ fait avec le rayon vecteur OP on a

$$\sin\mu = \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2)(\xi'^2 + \eta'^2)}} ;$$

par conséquent, la relation précédente devient

$$\text{(III)} \qquad R_\Pi R_\Gamma = \frac{a^2}{\sin^3\mu} ,$$

relation très remarquable, découverte par A. MANNHEIM[1] et rappelée récemment par M. H. WIELEITNER[2] : il faut seulement observer que ces deux géomètres supposent $a = 1$, sans le dire explicitement, de manière qu'il est probable que quelque commençant trouve des difficultés à comprendre le sens d'une formule qui semble échapper à la loi d'homogénéité.

On peut ajouter que la formule (III) est encore vraie lorsque la conique directrice de la polarité est une des hyperboles équilatères suivantes :

$$x^2 - y^2 = a^2 , \qquad -x^2 + y^2 = a^2 .$$

Gênes, 27 décembre 1910. GINO LORIA.

[1] *Journal de Math. pures et appliquées*, IIe sér., t. XI, 1866, p. 195.
[2] *Repertorium der höheren Geometrie*, I. Hälfte. 1910, p. 444.

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX EN UN POINT D'UNE QUADRIQUE

La construction du centre de courbure d'une conique et celle des centres de courbure principaux d'une quadrique ont donné lieu à diverses recherches ; Mannheim, notamment, a consacré plusieurs Mémoires à ces constructions de centres de courbure et le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1882 contient un Mémoire d'un grand intérêt *Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux* (pp. 167-172).

Je me propose de montrer comment on peut construire les centres de courbure des coniques et des quadriques par application d'un théorème de Steiner, d'un théorème dû à Valson et enfin d'une propriété que j'ai énoncée incidemment dans un Mémoire récent *Sur les surfaces de M. Appell*. Ayant fait quelques remarques relatives aux théorèmes de Steiner et de Valson, je profiterai de l'occasion pour les signaler à l'attention des lecteurs.

Sous le n° 1002, Steiner proposa, à titre de question dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, la démonstration du théorème suivant : *Si en un point d'une ellipse, on prend sur la normale en dehors de la courbe une longueur égale au rayon de courbure en ce point, le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle orthoptique de l'ellipse.* Cette question fut résolue en 1871 (*Nouvelles Annales*, pp. 460-462) par Lez et par Gérono qui en donna une solution géométrique ; les *Nouvelles Annales*

de 1872 (note du bas de la page 429) contiennent une application du théorème de STEINER, indiquée incidemment par MATHIEU dans une *Note sur l'ellipse*.

Ce théorème de STEINER m'a semblé avoir plus d'intérêt qu'une simple question à résoudre et mériter quelques recherches.

Considérons deux coniques (C) et (*c*) tangentes en un point O ; soient N et *n* les centres de courbure respectifs de ces coniques au point O. La condition pour que la conique (C) soit harmoniquement circonscrite à la conique (*c*) se met sous la forme géométrique suivante :

$$nO + 2 . ON = 0 .$$

Ce théorème général contient le théorème de STEINER, comme cas particulier : il suffit d'envisager le cas où (C) est un cercle et d'appliquer, à ce cercle (C) et à la conique (*c*), le théorème bien connu de STEINER-FAURE. Ce fut probablement de cette manière que Steiner dût obtenir le théorème, dont il proposa ensuite la démonstration.

Je ferai observer que le théorème de Steiner est une propriété qui caractérise les coniques. Cherchons, en effet, à déterminer une courbe plane (M) par la condition que, M étant un point quelconque de (M), N étant le centre de courbure de (M) en M et N′ le symétrique de N par rapport à M, le cercle de diamètre NN′ soit orthogonal à un cercle fixe (ou à une droite fixe). L'équation différentielle du second ordre obtenue est celle des coniques qui admettent le cercle donné pour cercle orthoptique (ou des paraboles qui admettent la droite pour directrice).

Le cercle fixe peut avoir son rayon nul : on obtient alors pour courbe (M) une hyperbole équilatère concentrique au cercle de rayon nul : c'est là une propriété bien connue de l'hyperbole équilatère.

L'une des plus intéressantes applications du théorème de Steiner semble être la construction du centre de courbure d'une conique. Le cercle orthoptique de la conique étant donné, ainsi qu'un point de la conique et la tangente en ce

point, on sait construire élémentairement le cercle orthogonal au cercle orthoptique, passant par le point et y admettant la tangente imposée. Le centre de courbure s'en déduit immédiatement. Cette méthode si simple n'exige aucun effort de mémoire et présente l'avantage de ne faire intervenir que très peu de lignes qui d'ailleurs ont chacune une interprétation géométrique remarquable : le cercle tangent à une courbe et dont un diamètre est symétrique du rayon de courbure est, en effet, le lieu des centres des hyperboles équilatères qui admettent un contact du troisième ordre avec la courbe envisagée.

Après les nombreuses remarques qui ont été faites depuis longtemps relativement aux centres de courbure des coniques, une construction nouvelle n'offre pas un très grand intérêt. Il n'en est pas de même des constructions des centres de courbure principaux de surfaces, sujet qui a été fort peu étudié. Voici une construction des centres de courbure des quadriques à centre, que l'on obtient par application simultanée de deux théorèmes. Cette construction diffère essentiellement de celle de Mannheim, qui fait intervenir les axes de l'indicatrice.

Je rappellerai tout d'abord un théorème remarquable donné par Valson, dans sa Thèse : *Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la Géométrie de l'ellipsoïde* (Paris, 1854); soit l'ellipsoïde de demi-axes a, b, c ; ϖ désigne la distance du centre O au plan tangent au point où la courbure totale est $\frac{1}{RR'}$. Valson énonce le théorème suivant : *La courbure totale d'une quadrique est constante en tous les points de contact des plans tangents à la quadrique et à une sphère concentrique* et elle est donnée par la relation suivante :

$$\varpi^4 \,.\, RR' = a^2 b^2 c^2 \,.$$

Depuis Valson, ce théorème a été retrouvé par divers auteurs ; on en trouve une démonstration dans les *Lezioni di geometria differenziale* de L. Bianchi.

La propriété précédente ne caractérise pas les quadriques ; elle appartient aux surfaces intégrales de l'équation aux

dérivées partielles du second ordre (en coordonnées ordinaires) :

$$rt - s^2 = \frac{(px + qy - z)^4}{a^2 b^2 c^2} .$$

Une des surfaces intégrales les plus remarquables est l'hyperboloïde cubique : dans les *Nouvelles Annales* de 1855, Roberts signale précisément cette équation aux dérivées partielles comme satisfaite par l'hyperboloïde cubique. En se reportant à diverses Communications *Sur une nouvelle classe de surfaces* de M. Ttitzeica à l'Académie des Sciences de Paris, on observera que les surfaces déterminées et étudiées par M. Ttitzeica ne sont autres que celles qui jouissent de la propriété précédente (Séances des 10 juin et 9 décembre 1907 et du 27 janvier 1908).

Le théorème de Valson fournit donc une expression du produit des rayons principaux de courbure en tout point d'une quadrique à centre. Si, par un procédé quelconque, on obtient une expression de la somme des rayons principaux, on connaîtra les centres principaux : il suffira de construire deux longueurs connaissant leur somme et leur produit.

Pour avoir une interprétation géométrique de la formule qui donne la somme des rayons principaux de courbure d'une quadrique, il n'y a qu'à généraliser le théorème de Steiner de la façon suivante. Soit une quadrique à centre, un ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 ,$$

pour fixer les idées ; ϖ désignant la distance du centre O au plan tangent au point M de coordonnées x, y, z, tout point P de la normale a des coordonnées de la forme

$$x + \lambda\varpi\frac{x}{a^2} , \quad y + \lambda\varpi\frac{y}{b^2} , \quad z + \lambda\varpi\frac{z}{c^2} ;$$

écrivons que la sphère de centre P et de rayon PM $= \lambda$ est orthogonale à la sphère orthoptique de la quadrique : nous obtenons :

$$2\lambda\varpi + x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 ,$$

ou

$$2\lambda = -(R + R') ;$$

P est donc le symétrique par rapport à M du point moyen de la normale en M (du milieu du segment dont les extrémités sont les centres de courbure principaux). Ainsi, *si l'on se donne un point* M *d'une quadrique, le plan tangent en ce point et la sphère de Monge, on peut construire le milieu du segment dont les extrémités sont les centres de courbure principaux : ce point est le symétrique par rapport à* M *du centre de la sphère orthogonale à la sphère de Monge et qui, passant par le point* M, *touche en ce point le plan tangent imposé.*

La propriété précédente ne caractérise pas les quadriques ; dans mon Mémoire *Sur les surfaces de M. Appell* (pp. 152 et 153 des *Nouvelles Annales* de 1910), j'ai signalé l'équation générale des surfaces qui jouissent de cette propriété. Considérées comme enveloppes du plan

$$(u+v)X + i(v-u)Y + (uv-1)Z = (uv+1)\varpi ,$$

ces surfaces sont intégrales de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1+uv)^2\left(\varpi\cdot\frac{\partial^2\varpi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\varpi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varpi}{\partial v}\right) + 3\varpi^2 - k^2 = 0 ,$$

K désignant le rayon de la sphère fixe. Posant alors

$$\varpi^2 = 2\varpi' + \frac{1}{3}k^2 ,$$

cette équation se transforme en

$$(1+uv)^2\frac{\partial^2\varpi'}{\partial u\partial v} + 6\varpi' = 0 ;$$

celle-ci, qui représente des surfaces de M. Goursat particulières, est une équation linéaire dont l'invariant h_2 est nul et qui, par suite, s'intègre par application de la méthode de Laplace.

E. Turrière (Alençon).

DÉTERMINATION DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN SEGMENT PARABOLIQUE PAR UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE[1]

En considérant la parabole comme le lieu géométrique des points également distants d'un point fixe, le foyer, et d'une droite fixe, la directrice, il est facile de montrer que la courbe est déterminée par deux quelconques de ses tangentes et leurs points de contact.

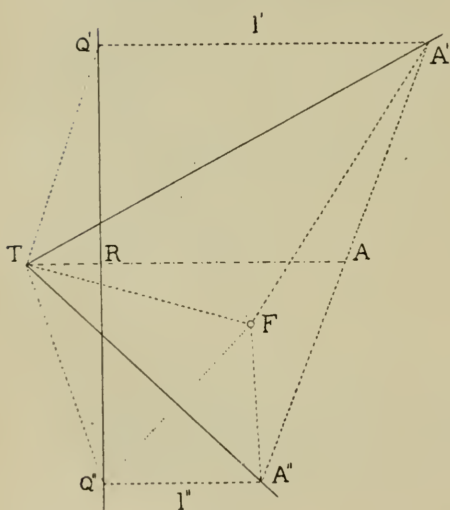


Fig. 1.

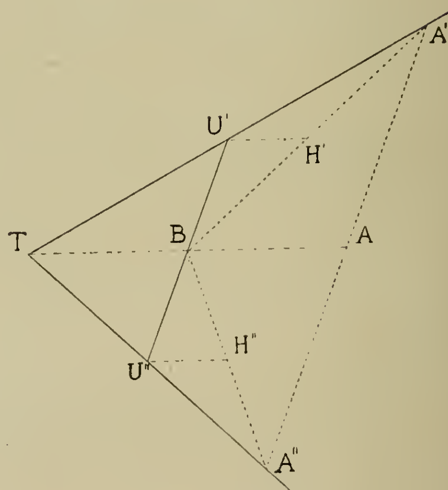


Fig. 2.

Soient TA' et TA'' (fig. 1), deux droites quelconques, et soit A le point milieu de $A'A''$. Menons par A' la parallèle l'

[1] Communication faite à la 12me réunion de la Société suisse des professeurs de mathématiques, le 9 octobre 1910, à Baden.

à TA et par A″ la parallèle l'' à la même direction ; construisons de plus A′F symétrique de l' par rapport à TA′, et de même A″F symétrique de l'' par rapport à TA″ ; ces deux droites se coupent en F.

La perpendiculaire abaissée de F sur TA′ coupe l' en Q′ symétrique de F par rapport à TA′ de même Q″, intersection de l'' avec la perpendiculaire abaissée de F sur TA″, est le symétrique de F par rapport à TA″.

Donc

$$TQ' = TF = TQ'' .$$

Dans le trapèze A′Q′Q″A″, la droite TA est une médiane ; elle coupe donc Q′Q″ en son milieu R et se trouve être par suite perpendiculaire à la base Q′Q″ du triangle isocèle Q′Q″T. Il en résulte que l' et l'' sont aussi perpendiculaires à Q′Q″.

Du reste, comme A′Q′ = A′F et A″Q″ = A″F, nous pouvons en conclure que F est le foyer et Q′Q″ la directrice d'une parabole, dont TA′ et TA″ sont des tangentes ayant A′ et A″ pour points de contact. La droite TA, joignant le point d'intersection des deux tangentes avec le point milieu de la corde des contacts, est parallèle à l'axe de la parabole.

Menons par le milieu U′ (fig. 2) de TA′ une deuxième tangente, son point de contact définit avec A′ une corde dont le milieu H′ se trouve sur la parallèle à TA menée par U′. Ce point de contact se trouve donc sur TA.

Pour la même raison la tangente à la parabole issue du milieu U″ de TA″ a aussi son point de contact sur la droite TA. Or sur cette droite il n'existe qu'un seul point de la parabole à distance finie ; par suite les tangentes issues de U′ et U″, dont il vient d'être question, sont confondues. U′U″ est une tangente dont l'intersection B avec TA est le point de contact.

En résumé : *Dans toute parabole, le segment rectiligne joignant l'intersection de deux tangentes au point milieu de la corde des contacts, est parallèle à l'axe. Il est recoupé en son milieu par la courbe, suivant une direction parallèle a la dite corde.*

Cette propriété, qui sert de base à la détermination de la

surface du segment parabolique, va également nous servir à en déterminer le centre de gravité. Soit A′A″B (fig. 3) un triangle inscrit dans la parabole, dont la médiane BA est parallèle à l'axe. Soient encore U′ et U″ les points d'intersection des tangentes en A′ et A″ avec la tangente en B.

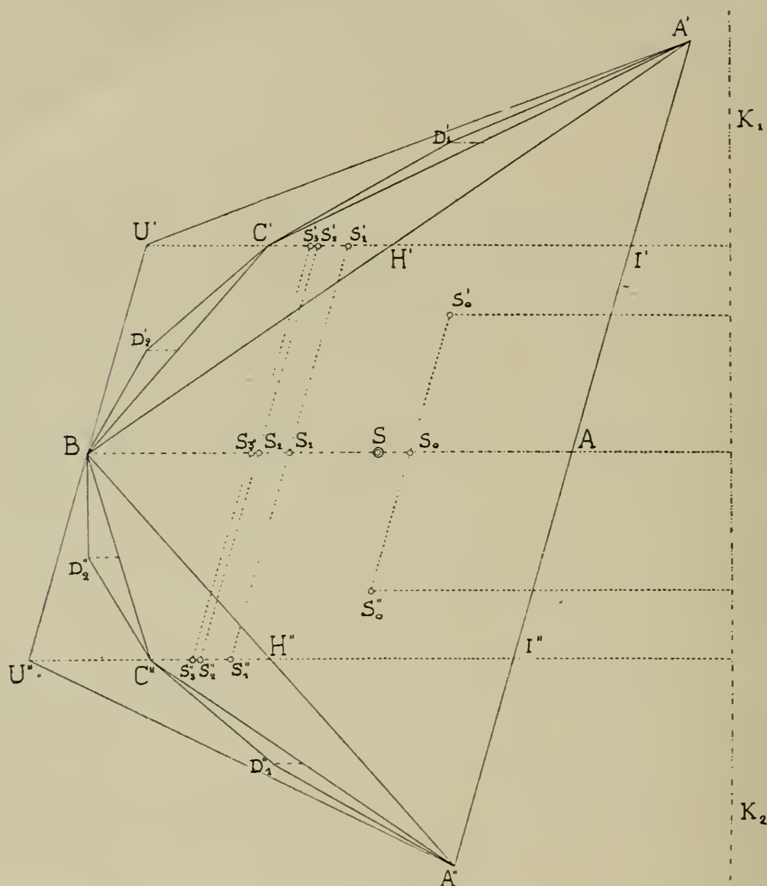


Fig. 3.

Les parallèles à l'axe menées par U′ et U″ rencontrent les cordes A′B et A″B en leur milieu H′ et H″. Les segments U′H′ et U″H″ sont du reste égaux chacun à la moitié de AB et sont recoupés par la parabole en leur milieu C′ et C″. Les

médianes $C'H'$ et $C''H''$ des triangles $A'BC'$ et $A''BC''$ sont donc parallèles à l'axe, et égales chacune au quart de AB. Le triangle $A'BC'$ est donc égal à la moitié de $A'BU'$, et au quart de ABA', et les deux triangles $A'BC'$ et $A''BC''$, pris ensemble ont une aire égale au quart de celle du triangle (de départ $A'A''B$.

Dans la suite, pour simplifier l'exposé, chaque fois qu'il s'agira d'un triangle inscrit dans la parabole et ayant une médiane parallèle à l'axe, nous appellerons *base*, le côté que cette médiane divise en deux parties égales et simplement *côtés*, les deux autres; par *médiane*, nous sous-entendrons qu'il s'agit exclusivement de celle qui est parallèle à l'axe de la parabole.

Dans le triangle $A'BA''$ que nous désignerons désormais par *triangle de départ*, $A'A'$ est la base, et $A'B'$, $A''B$ sont les côtés. Ceux-ci servent de base à deux nouveaux triangles inscrits, $A'BC'$ et $A''BC''$, formant une *première série*. Les côtés de ces deux triangles serviront à leur tour de bases pour quatre triangles $A'C'D'_1$, $C'BD'_2$, $BC''D''_2$ $C''A''D''_1$ formant une *deuxième série*. Leurs médianes sont égales au quart des médianes des triangles de la première série, et la somme de leurs aires, que nous appellerons *aire de la deuxième série*, équivaut au quart de l'aire de la première série.

En prenant successivement les côtés d'une série, comme bases de la série suivante, on pourra former des séries à l'infini; les médianes d'une série sont égales entre elles et valent le quart des médianes de la série précédente; les triangles d'une même série ont la même aire, et l'aire d'une série est égale au quart de l'aire de la série précédente.

Le centre de gravité S_0 du triangle de départ $A'BA''$ se trouve sur AB au tiers de ce segment à partir de A. Le centre de gravité S'_1 du triangle $A'BC'$ est situé sur $H'C'$ à la distance $\frac{\overline{H'C'}}{3}$ ou $\frac{\overline{AB}}{12}$ de H'; or $H'I'$ égale $\frac{6}{12}\overline{AB}$, donc $I'S'_1$ égale $\frac{7}{12}\overline{AB}$.

Il en est de même pour la distance $I''S''_1$, où S''_1 désigne le centre de gravité du triangle $A''BC''$. Le segment $S'_1S''_1$ est

donc parallèle à la base $A'A''$ du triangle de départ, dont la médiane le coupe en S_1, centre de gravité de la première série. La distance AS_1 est du reste égale au $\frac{7}{12}$ de AB, donc

$$S_0S_1 = \frac{7}{12}\overline{AB} - \frac{4}{12}\overline{AB} = \frac{1}{4}AB = H'C' = H''C'' .$$

Le centre de gravité de la première série se trouve donc sur la médiane du triangle de départ, et en arrière du centre de gravité S_0, à une distance égale de la médiane des triangles de cette première série.

Les triangles de la deuxième série situés au-dessus de AB, jouent le rôle d'une première série par rapport à $A'BC'$ considéré comme triangle de base; le centre de gravité S'_2 de ces triangles se trouve par suite sur $H'C'$, à une distance en arrière de S'_1 égale à la longueur de la médiane correspondante, c'est-à-dire $\frac{AB}{4^2}$; de même le centre de gravité S''_2 des autres triangles de la deuxième série se trouve sur $H''C''$ à la même distance en arrière de S''_1. La droite $S'_2S''_2$ est donc parallèle à $S'_1S''_1$ et à $A'A''$, elle est coupée par AB en S_2, centre de gravité de la deuxième série et la distance S_1S_2 est égale à la longueur des médianes des triangles de cette deuxième série, soit $\frac{AB}{4^2}$.

Les triangles de la troisième série situés au-dessus de AB forment à leur tour une deuxième série par rapport à $A'BC'$ pris comme triangle de départ, d'où il résulte que leur centre de gravité S'_3 se trouve sur la médiane $C'H'$, à une distance en arrière de S'_2, égale à la longueur de leur médiane. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que S_3, centre de gravité de la troisième série, est situé sur AB à une distance de S_2 égale à $\frac{AB}{4^3}$; et ainsi de suite.

Les distances successives des centres de gravité des diverses séries forment ainsi une progression géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Désignons par Δ l'aire du triangle de départ, par b la longueur de sa médiane, par M_0 la valeur du moment de cette

aire, pris par rapport au point A comme centre, enfin par M_k, le moment de la $k^{ème}$ série par rapport au même point ; on aura :

$$M_0 = \Delta \frac{b}{3} . \qquad M_2 = \frac{\Delta}{4^2}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4^2}\right)$$

$$M_1 = \frac{\Delta}{4}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4}\right) . \qquad M_3 = \frac{\Delta}{4^3}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4^2} + \frac{b}{4^3}\right)$$

$$M_k = \frac{\Delta}{4^k}\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \dots \frac{b}{4^k}\right)$$

Faisons la somme, membre à membre, de cette série d'égalités, indéfiniment prolongée. La somme des premiers membres tend alors vers l'expression du moment du segment parabolique entier, par rapport à A ; appelons cette limite $\Sigma . x$, Σ représentant l'aire du segment et x la distance de son centre de gravité S au point A. La sommation des seconds membres s'obtiendra en effectuant les produits indiqués, puis en groupant les premiers, deuxièmes, troisièmes termes, etc...., de ces produits, de telle sorte qu'on pourra écrire :

$$\Sigma . x = \left(\Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4^2} + \frac{\Delta}{4^3} + \dots\right)\left(\frac{b}{3} + \frac{b}{16} + \frac{b}{16^2} + \frac{b}{16^3} + \dots\right)$$

La première parenthèse représente l'aire du segment, égale à $\frac{4}{3}\Delta$; la deuxième parenthèse a pour valeur

$$\frac{b}{3} + \frac{\frac{b}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{b}{3} + \frac{b}{15} = \frac{2}{5} b$$

d'où résulte :

$$x = \frac{2}{5} b .$$

Le centre de gravité d'un segment parabolique divise donc la médiane du triangle de départ dans le rapport 2 : 3.

Si le segment parabolique tourne autour d'une droite $K_1 K_2$ perpendiculaire à son axe et ne rencontrant pas sa surface, il engendre un corps de révolution dont le volume s'obtien-

dra en sommant les volumes partiels v_0, v_1, v_2, v_3, etc...., des anneaux engendrés par la rotation du triangle de départ, et des triangles des séries précédemment envisagées.

Or on sait déduire de la formule du volume d'un cône tronqué, que le volume annulaire engendré par la rotation d'un triangle autour d'un axe normal à l'un de ses côtés et ne rencontrant pas sa surface, est donné par

$$v = 2\pi\Delta \,.\, s$$

Δ désignant l'aire du triangle et s la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation.

Soient alors S_0' et S_0'' les centres de gravité des triangles ABA' et ABA'', s_0' et s_0'' leurs distances de l'axe de rotation, s_0 celle du point S_0 jusqu'au même axe. s_k', s_k'' et s_k les distances des points S_k', S_k'' et S_k centres de gravité correspondant à la $k^{\text{ième}}$ série.

Avec ces notations, il viendra :

$$v_0 = 2\pi\frac{\Delta}{2}s_0' + 2\pi\frac{\Delta}{2}s_0'' = 2\pi\Delta\frac{s_0' + s_0''}{2} = 2\pi\Delta s_0$$

$$v_1 = 2\pi\frac{\Delta}{4\,.\,2}s_1' + 2\pi\frac{\Delta}{4\,.\,2}s_1'' = 2\pi\frac{\Delta}{4}\frac{s_1' + s_1''}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{4}s_1$$

. . . .

$$v_k = 2\pi\frac{\Delta}{4^k\,.\,2}s_k' + 2\pi\frac{\Delta}{4^k\,.\,2}s_k'' = 2\pi\frac{\Delta}{4^k}\frac{s_k' + s_k''}{2} = 2\pi\frac{\Delta}{4^k}s_k$$

. . . .

Remplaçant s_0, s_1 ... s_k par leurs valeurs, on aura, si l'on désigne par a la distance du point A à l'axe de révolution,

$$v_0 = 2\pi\Delta\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

$$v_1 = 2\pi\frac{\Delta}{4}\left(a + \frac{b}{3} + \frac{b}{4}\right)$$

$$v_2 = 2\pi\frac{\Delta}{4^2}\left(a + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4^2}\right)$$

. . . .

La sommation de ces égalités conduit à l'expression

$$v = 2\pi\Sigma\left(a + \frac{2}{5}b\right)$$

pour le volume du corps engendré par la rotation du segment parabolique.

Il va de soi que si l'axe de révolution est situé du côté convexe de la courbe, il faudra inverser le signe du terme en b.

En envisageant un segment parabolique limité par une perpendiculaire à l'axe de ce segment, il sera facile de déduire de l'égalité ci-dessus, la formule pratique suivante pour la cubature des tonneaux :

$$v = \frac{\pi}{60}l(8D^2 + 4Dd + 3d^2) ,$$

l désignant la distance des fonds, d leur diamètre et D le diamètre intérieur maximum.

F.-R. Scherrer (Kusnacht, Zurich).

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Circulaire N° 4. 1er mars 1911.

I. Réunion de Milan.

18-20 septembre 1911.

La Commission internationale de l'enseignement mathématique se réunira à Milan du 18 au 20 septembre 1911, sous la présidence de M. le professeur F. Klein. Cette réunion a pour but de poursuivre l'étude des tendances actuelles de l'enseignement mathématique ; elle forme en quelque sorte la suite de la réunion tenue à Bruxelles en août 1910 et sera organisée sur des bases analogues.

Nous tenons à rappeler ici que les membres des sous-commissions nationales, spécialement les auteurs de rapports partiels, seront les bienvenus à toutes les séances.

En dehors des discussions que pourront soulever les rapports des sous-commissions nationales, le Comité central estime qu'il est utile de concentrer les débats sur deux questions importantes concernant, l'une, l'enseignement moyen, l'autre l'enseignement supérieur. Ce sont les suivantes :

A. *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.) *de l'exposé systématique des mathématiques ? — La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.*

B. *L'enseignement mathématique, théorique et pratique, destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles.*

Deux sous-commissions spéciales seront appelées à élaborer des rapports préparatoires pouvant servir de base à la discussion des questions A et B.

Le *programme de la réunion* a été arrêté dans ses grandes lignes comme suit :

Lundi 18 sept., le matin. Séance du Comité central.
» le soir. Séance préparatoire.
Mardi 19 sept., le matin. — *1re séance* des délégués et des membres des sous-commissions nationales. Présentation des rapports des sous-commissions nationales ; discussion.

Mardi 19 sept., l'après-midi. — 2me *séance*. 1. Suite de la discussion.
2. Les mathématiques dans l'enseignement moyen (question A).
Mercredi 20 sept., le matin. — 3me *séance*. 1. La question des rapports à présenter au Congrès de Cambridge.
2. L'enseignement mathématique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles (question B).
» l'après-midi. — *Séance générale publique* comprenant notamment une allocution de M. le prof. Klein, président de la commission et une conférence de M. le prof. Enriques (Bologne).

Le programme détaillé sera publié ultérieurement, mais nous pouvons ajouter, dès maintenant, que les séances auront lieu à l'Ecole polytechnique, où des salles ont été obligeamment mises à la disposition de la Commission par M. le sénateur Colombo, directeur de l'Ecole.

Les adhésions et demandes de renseignements doivent être adressées au secrétaire-général, M. H. Fehr, 72, route de Florissant, Genève.

II. Sous-commissions nationales.

Etat des travaux au 1er mars 1911.

Depuis la publication de la *Circulaire n° 3*, les travaux des sous-commissions nationales se sont poursuivis avec une grande régularité et la liste des rapports publiés ou projetés s'est encore allongée. Bien que celle-ci ne contienne que le titre des mémoires, elle donnera déjà une idée de la richesse des documents qui ont pu être réunis par la Commission internationale, grâce au concours dévoué d'un grand nombre de collaborateurs. L'*Enseignement mathématique* a commencé, dans son numéro de janvier 1911, le compte rendu de ces rapports qui, pour la plupart, se trouveront en librairie.

Nous donnons ci-après un tableau de l'état actuel des travaux dans les principaux pays participants au 1er mars 1911.

ALLEMAGNE

Délégués : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Carlsruhe), P. Treutlein (Carlsruhe).

La sous-commission allemande a adopté deux sortes de publications : Les *Berichte und Mitteilungen* et les *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*. Les premières, rédigées par le secrétaire de la sous-commission allemande, M. W. Lietzmann, sont destinées à donner des renseignements généraux, ainsi que des rapports spéciaux de peu d'étendue. Jusqu'ici il a paru cinq fascicules. Les *Abhandlungen* comprendront des monographies sur l'enseignement mathématique dans les divers types d'éta-

blissements en Allemagne ou sur des questions générales. Elles sont dirigées par M. Klein et formeront cinq volumes. Neuf fascicules ont paru jusqu'à ce jour, et il est probable que huit nouveaux rapports pourront être présentés à la réunion de Milan.

Voici la liste des travaux publiés ou en préparation :

A. **Berichte und Mitteilungen** *veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.*

1. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Übersetzung von W. Lietzmann. [S. 1-10.] 1909.

2. Noodt, G., Über die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen. [S. 11-32.] 1909.

3. Klein, F., und H. Fehr, Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 33-38.] 1909.

4. Klein, F., und H. Fehr, Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie P. Zühlke, Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preussischen Realanstalten. [S. 39-54.] 1910.

5. Fehr, H., Drittes Rundschreiben des Hauptausschusses. Die Versammlung in Brüssel. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. [S. 55-74.] 1910.

B. **Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland** *veranlasst durch die Internationale mathematische Unterrichts-Kommission.* Herausgegeben von F. Klein. — 5. Bände, in einzeln käuflichen Heften. Bisher sind folgende Hefte erschienen oder in Aussicht genommen :

I. Band. Die höheren Schulen in Norddeutschland. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (XII u. 102 S.) 1909.

2. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen. Mit 18 Fig. (VIII u. 204 S.) 1910.

3. Thaer, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte. Mit einem Anhang über die höheren Schulen in Oldenburg von Büttger und von Mecklenburg von Geuther. (Unter der Presse.)

4. Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiklehrer an den höheren Schulen Norddeutschlands. (Unter der Presse.)

II. Band. Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königreich Bayern. (XIV u. 85 S.) 1910.

2. Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (XII u. 78 S.) 1910.

3. Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (IV u. 104 S.) 1910.

4. Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden. (IV u. 48 S.) 1910.

5. SCHNELL, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen. (VI u. 51 S.) 1910.

6. HOSSFELD, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Thüringens. (In Vorbereitung.)

7. WIRZ, Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen der Reichslande. (In Vorbereitung.)

III. Band. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts. Mit einem Einführungswort von F. KLEIN.

1. SCHIMMACK, R., Der seitherige Gang der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. (Unter der Presse).

2. TIMERDING, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.) 1910.

3. ZÜHLKE, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (Unter der Presse.)

4. HOFFMANN, B., Astronomie, Vermessungswesen, mathematische Geographie an den höheren Schulen. (In Vorbereitung.)

5. GEBHARDT, M., Geschichte der Mathematik an den höheren Schulen. (In Vorbereitung.)

6. WERNICKE, Mathematik und philosophische Propädeutik. (In Vorber.)

7. TIMERDING, E., Kaufmännische Mathematik. (In Vorbereitung.)

8. LOREY, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (In Vorbereitung.)

IV. Band. Die Mathematik an den technischen Schulen. Mit einem Einführungswort von P. STÄCKEL.

1. GRÜNBAUM, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (XVI u. 100 S.) 1910.

2. OTT, C., Die Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie : Angewandte Mathematik. (Unter der Presse.)

3. SCHILLING, C., und MELDAU, H., Die Mathematik an den Seefahrtsschulen. (In Vorbereitung.)

4. FURTWÄNGLER, Ph., Die mathematische Ausbildung der Feldmesser. (In Vorbereitung.)

9. STÄCKEL, P., Die Mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. (In Vorber.)

6. JAHNKE, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (In Vorbereitung.)

7. GIRNDT, M., Die Mathematik an den Baugewerkschulen. (In Vorbereitung.)

V. Band. Die Mathematik an den Volksschulen. Mit einem Einführungswort von F. KLEIN.

1. LIETZMANN, W., Stoff und Methode des Rechenunterrichtes auf Grund der Lehrbücher. (In Vorbereitung.)

2. LIETZMANN, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichtes auf Grund der Lehrbücher. (In Vorbereitung.)

3. LIETZMANN, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preussen. (In Vorber.)

Les fascicules I, 3 et 4; II, 7; III, 1 et 3; IV, 2, 3 et 6 seront probablement imprimés avant la réunion de Milan. D'autre part, il est question de cinq autres rapports dont les titres seront indiqués ultérieurement.

AUTRICHE

Délégués : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch.

Les rapports de la sous-commission autrichienne sont publiés sous le titre *Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich, veranlasst durch die Internationale mathematische Unterrichts-Kommission.* Ils sont joints comme suppléments aux périodiques autrichiens : *Zeitschrift für die œsterreichischen Gymnasien* et *Zeitschrift für das Realschulwesen*, et édités à part par la maison Hölder (Vienne).

Six fascicules ont paru ; ils contiennent les rapports sur l'enseignement mathématique dans les établissements suivants : Fasc. 1, (81 p.), les écoles réales ; les écoles primaires et primaires supérieures. — Fasc. 2. (52 p.), les écoles normales d'instituteurs et d'institutrices ; les écoles de commerce ; l'Ecole forestière de Reichstadt. — Fasc. 3 (VIII et 79 p.) les gymnases. — Fasc. 4 (64 p.), les lycées de jeunes filles ; la préparation pratique à l'enseignement moyen : les écoles professionnelles. — Fasc. 5 (39 p.), les écoles techniques supérieures. — Fasc. 6 (53 p.), les manuels mathématiques dans l'enseignement moyen.

En voici les titres complets :

Heft 1. Der mathem. Unterricht an den *Realschulen* von Fr. Bergmann.

Der mathematische Unterricht an den *Volkschulen*, von K. Kraus.

Heft 2. — Der mathematische Unterricht an den Bildungsanstalten für *Lehrer u. Lehrerinnen* von Th. Konrath.

Der mathematische u. physikalische Unterricht an den höheren *Handelsschulen* von M. Dolinski.

Der math. Unterricht an der höheren *Forstlehranstalt Reichstadt* von M. Adamicka.

Heft 3. — Der math. Unterricht an den *Gymnasien* von E. Dintzl.

Heft 4. — Der math. Unterricht an den *Mädchenlyzeen.* von Th. Konrath.

Die *praktische Vorbildung für das höhere Lehramt* in Osterreich, von J. Loos.

Der math. Unterricht an den *gewerblichen Lehranstalten*, von W. Rulf.

Heft 5. — Der math. Unterricht an den *technischen Hochschulen*, von E. Czuber.

Heft 6. — Die *mathematischen Lerhbücher* an den Mittelschulen u. verwandten Anstalten, von Ph. Freud.

Sous presse :

Heft. 7. — Der mathematische Unterricht an den *Universitäten*, von R. v. Sterneck.

En manuscrit :

1. Der mathem. Unterricht an den *Militärlehranstalten*. von A. Mikuta.

2. Der *mathem. Unterricht* an der *Hochschule für Bodenkultur*, von O. Simony.

3. Der Unterricht in der *Darstellenden Geometrie an den Realschulen, Gymnasien, Realgymnasien und Reform-Realgymnasien*, von A. Adler.

En préparation :

4. Der Unterricht in der *Darstellenden Geometrie* an den *Hochschulen*, von E. Müller.

5. Der *geodätische Unterricht* an den *Hochschule für Bodenkultur*, von Th. Tapla.
6. Der mathem. Unterricht an den *Bergakademien*, von K. Kobald.
7. Der mathem. Unterricht am *Technologischen Gewerbemuseum in Wien*, von K. Reich.
8. Der mathem. Unterricht an den *polnischen Mittelschulen*, von Zaremba.
9. Die *Stellung der Mathematik im physikalischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der Mittelschulen*, von A. Lanner.
10. Die *Pädagogische Ausbildung der Mittelschullehrer*, von A. Höller.

BELGIQUE

Délégué : M. J. Neuberg (Liège).

Lés cinq rapports suivants sont *en préparation :*

Les mathématiques dans les écoles primaires et les écoles normales d'instituteurs, par M. Dock.

Les mathématiques dans les Athénées, collèges et écoles moyennes, par M. Ploumen.

Les mathématiques dans les écoles industrielles, par M. Rombaut.

Sur l'enseignement du dessin dans les écoles primaires et moyennes et dans les Athénées et collèges, par M. Montfort.

L'enseignement des mathématiques dans les Universités et les Ecoles supérieures, par M. Neuberg.

DANEMARK

Délégué : M. P. Heegaard (Copenhague).

Le rapport d'ensemble sur l'enseignement mathématique en Danemark est sur le point d'être terminé. La sous-commission danoise espère qu'il sera publié fin septembre 1911.

Dans la réunion d'automne des professeurs de Gymnase, M. le prof. Heegaard, délégué, a fait un exposé des travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique ; la séance a été ensuite consacrée à une discussion sur la préparation du corps enseignant.

ESPAGNE

Délégué : Z. G. de Galdeano (Saragosse).

Dans une Note, rédigée en français et distribuée aux membres de la Commission, M. de Galdeano a donné un aperçu des six rapports élaborés par la sous-commission espagnole, auxquels est venu se joindre un septième ; en voici la liste :

1. Note sur les études à l'Ecole des ponts et chaussées, par M. le marquis d'Echandia.
2. Les représentations graphiques dans l'enseignement mathématique, par M. D. P. Castells.
3. Observations sur l'enseignement mathématique dans les écoles industrielles, par M. L. Miralles.

4. Les cours d'Analyse mathématique dans les Facultés des Sciences, par M. L. Octavia de Toledo.

5. Les mathématiques en Espagne, par M. D. C. Jimenez Rueda.

6. Les mathématiques dans l'enseignement secondaire, par M. D. A. Ruiz Tapiador.

7. Notices statistiques sur l'enseignement mathématique en Espagne, par M. D. Graciano Silvan.

ETATS-UNIS

Délégués: MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J. W. A. Young (Chicago).

Les rapports préparatoires élaborés par les comités dont nous avons parlé dans les précédentes *Circulaires*, sont terminés et feront l'objet d'un rapport général qui sera publié par les soins du *Bureau of Education*. Ils seront reproduits, tout au moins partiellement, dans différentes revues.

Deux de ces rapports ont été insérés dans le *Bull. Amer. Math. Society*, vol. 17, nº 2 (nov. 1910) et nº 5 (février 1911) et reproduits comme tirages à part dans les *Bulletins of the american Commissioners* (nº 3, et nº 4 sous presse).

Ce sont les suivants :

1. *The preparation of College and University instructors in mathematics*, provisional Report of the amer. Subcommittee of the intern. Commission of the Teaching of Mathematics.

2. *University Courses in Mathematics and the Master's Degree*, provisional Report of the amer. Subcommittee.

FRANCE

Délégués : MM. A. de Saint Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet.
Président d'honneur de la sous-commission française : M. P. Appell.

Les travaux de la sous-commission française seront répartis sur cinq volumes et publiés au commencement de l'été 1911, par les soins de la maison Hachette. Chacun des volumes est dirigé par un membre de la sous-commission ; les rapports seront groupés comme suit :

1er volume : *Enseignement primaire :* M. Lefebvre, directeur.

Introduction générale: Tableau de l'enseignement mathématique en France, par M. Bioche (manuscrit).

L'enseignement primaire élémentaire, par M. Lefebvre (en préparation).

L'enseignement primaire supérieur, par M. Tallent (manuscrit).

L'enseignement mathématique dans les écoles normales primaires, par M. Vareil (manuscrit).

L'enseignement mathématique au Collège Chaptal, par M. Weill (manuscrit).

2e volume : *Enseignement secondaire :* M. Bioche, directeur.

De la place des mathématiques dans l'enseignement secondaire par M. Bioche (en préparation).

Enseignement des mathématiques spéciales, par M. Blutel (manuscrit).

Enseignement de l'Arithmétique, par M. Lévi (manuscrit).

Enseignement de l'Algèbre et de la Trigonométrie, par M. Guitton (manuscrit).

Enseignement de la Géométrie et de la Géométrie descriptive, par M. Rousseau (manuscrit)

Enseignement de la Mécanique élémentaire, par M. Béghin (en préparation).

Enseignement de la Cosmographie, par M. Muscart (en préparation).

3e volume : *Enseignement supérieur :* M. de St-Germain, directeur.

Aperçu général sur l'enseignement mathématique supérieur, par M. de St-Germain (sous presse).

Enseignement des parties fondamentales des Mathématiques dans les Facultés, par M. Vessiot (sous presse).

Enseignement des parties d'ordre élevé des Mathématiques dans les Facultés, par M. Borel (sous presse).

Annexe : Programmes de l'Université de Paris (sous presse).

Enseignement mathématique dans les instituts techniques annexés aux Facultés, par M. Vogt (sous presse).

Sur les diplômes d'études supérieures de Mathématiques, par M. de St-Germain (sous presse).

Enseignement à l'Ecole normale supérieure et agrégation, par M. Tannery (sous presse).

Note sur le Collège de France, par M. de St-Germain (sous presse).

Enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique, par M. G. Humbert (en préparation).

Enseignement mathématique à l'Ecole des Mines de Paris, par M. Garnier (en préparation).

Enseignement mathématique à l'Ecole des Ponts et Chaussées, par M. d'Ocagne (manuscrit).

Enseignement mathématique à l'Ecole des Mines de St-Etienne, par M. Friedel (manuscrit).

Enseignement mathématique à l'Ecole du Génie maritime, par M. Janet (manuscrit).

4e volume : *Enseignement technique :* M. Rollet, directeur.

Aperçu général sur l'enseignement technique, par M. Rollet (en préparation).

Enseignement mathématique au Conservatoire des Arts et Métiers par M. Bourlet (manuscrit).

Enseignement mathématique à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, par M. Appell (manuscrit).

Ecoles pratiques de Commerce et d'Industrie : Géométrie, par M. Harang (manuscrit).

Id. : Arithmétique, Algèbre, Mécanique, par M. Lagneaux (manuscrit).

Ecoles d'Arts et Métiers : 1re année : M. Roumajon (manuscrit).

» » » 2e année : M. Bézine (manuscrit).

» » » 3e année, mécanique : M. Bazard (manuscrit).

Note sur les écoles nationales professionnelles, par M. Tripart (manuscrit).

Ecoles supérieures de Commerce, par M. N. (en préparation).

5e volume : *Enseignement des jeunes filles :* Mlle Amieux, directrice.

Rapport général sur l'enseignement mathématique secondaire des jeunes filles, par Mlle Amieux (sous presse).

Organisation, méthodes, enseignement du premier cycle, par Mlle Amieux (sous presse).

Enseignement du second cycle, par Mme Baudeuf (sous presse).

Enseignement à l'Ecole normale secondaire de Sèvres, par M. Appell (sous presse).

Enseignement technique des jeunes filles, par Mme Pivot et Mlle Fredon (sous presse).

Enseignement primaire élémentaire des jeunes filles, par M. Lefebvre (en préparation).

Enseignement primaire supérieur des jeunes filles, par M. Tallent (manuscrit).

Enseignement dans les écoles normales d'institutrices, par M. Vareil (manuscrit).

Ecole normale de Fontenay-aux-Roses : Géométrie, par M. Kœnigs (manuscrit).

Id. : Arithmétique et Algèbre, par M. Fontené (manuscrit).

GRÈCE

Délégué : M. C. Stephanos (Athènes).

(Sans nouvelles récentes.)

HOLLANDE

Délégué : M. J. Cardinaal (Delft).

Le rapport sur l'enseignement mathématique en Hollande est sous presse et sera sans doute prêt pour le commencement de l'été. Il se compose des chapitres suivants :

1. L'enseignement mathématique à l'école primaire.
2. L'enseignement mathématique aux écoles dites « bourgeoises », écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques.
3. Ecoles de marine.
4. Ecoles moyennes à 3 années d'études.
5. Ecoles moyennes à 5 années d'études.
6. Ecoles moyennes pour jeunes filles.
7. L'enseignement mathématique aux gymnases.
8. L'enseignement mathématique aux Universités.
9. L'enseignement mathématique à l'Ecole technique supérieure de Delft.
10. L'enseignement mathématique aux Ecoles d'instruction militaire.
11. L'enseignement mathématique aux Ecoles d'instruction de la marine militaire.
12. Rapport supplémentaire sur les propositions faites par la Commission officielle de Réforme de l'enseignement en Hollande.

HONGRIE

Délégués : MM. M. Beke, C. Rados, Ratz (Budapest).

La sous-commission hongroise est présidée par M. le conseiller ministériel Prof. J. König ; elle publiera un rapport d'ensemble, en allemand ou en français, basé sur les rapports préparatoires dont voici la liste :

Ecoles primaires, par V. Szuppan.
Ecoles primaires supérieures (4 à 6 classes) (Bürgerschule), par J. Wolenszky.
Lycées de jeunes filles, par A. Visnya.
Ecoles secondaires, par E. Beke.
Ecoles de Commerce, par M. Havas.
Ecoles industrielles, par A. Arany.
Ecoles supérieures de Commerce, par S. Bogyo.
Ecoles normales d'enseignemnnt primaire, par Ch. Goldziher.
Ecoles normales supérieures, par J. Kürschack.
Universités, par E. Beke.
Ecoles polytechniques, par G. Rados.
Lycée pour les études pratiques de candidats, par P. Szabo.

ILES BRITANNIQUES

Délégués : Sir George Greenhill, M. A., F. R. S. ;
Professor W. W. Hobson, Sc. D., F. R. S. ; Mr. C. Godfrey, M. A.

Les rapports de la sous-commission anglaise seront publiés avec le concours du *Board of Education ;* en voici la liste :

Enseignement primaire (Elementary Schools).

The Teaching of Mathematics in London Elementary Schools. (1) P. B. Ballard, Divisional Inspector L. C. C. (sous presse).

The Teaching of Mathematics in London Elementary Schools. (2) H. J. Spencer; Headmaster of Bloomfield Rd. Elementary School, Plumstead (en manuscrit).

Mathematics in Welsh Primary Schools. R. W. Jones, B. A., Headmaster Glandda Practising Schools Bangor (en préparation).

Kindergarten Mathematics. Miss Irene Stephens, Mistress at the House of Education Ambleside (en manuscrit).

Enseignement secondaire (Secondary Schools).

The correlation of practical Geometry with other subjects. Miss H. Bartram, Headmistress County, Secondary School, Crowndale Road, St. Pancras (sous presse).

Should Higher Mathematics be included in an ideal scheme of education for girls ? Miss S. Burstall, M. A., Headmistress of Manchester High School, (en préparation).

The Functions of Geometry as a subject of education. G. St. L. Carson, B. A., Senior Mathematical Master Tonbridge School (en préparation).

Field Exercises in Geometry. J. V. H. Coates, B. Sc., Master, Alleyns School, Dulwich (en manuscrit).

Vector Algebra as a School subject. C. V. Durrell, M. A., Senior Mathematical Master, Winchester College (en préparation).

Elementary Projective Geometry. C. V. Durrell (en manuscrit).

The Teaching of Mechanics. W. D. Edgar, M. A., Assistant Master at Eton College (en manuscrit).

The Teaching of Parallels in Elementary Geometry. T. J. Garstang, M. A., Mathematical Master Bedales, Petersfield (en préparation).

The abuse of Graphical Methods. C. A. Gaul, M. A, Mathematical Master Marlborough College (en préparation).

The Teaching of Algebra : (1) in a general education ; (2) in a specialised education. C. Godfrey, M. A., Headmaster of Royal Naval College, Osborne (sous presse).

Mathematics in Girls' High Schools. Miss E. R. Gwatkin, Headmistress of Queen Mary's Municipal Secondary School, Liverpool (en préparation).

Pass Examinations, from the school point of view. C. Hawkins, M. A, Mathematical Master at Haileybury College (en préparation).

The calculus in School Mathematics. C. S. Jackson, M. A., Instructor in Mathematics at Royal Military Academy, Woolwich (en manuscrit).

Scholarship Examinations. F. S. Macaulay, M. A., D. Sc., Senior Mathematical Master, St. Paul's (en manuscrit).

Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. W. Newbold, M. A., assistant Mathematical Master at Tonbridge (en manuscrit).

Special Points in the Teaching of Arithmetic. G. W. Palmer, M. A., Head of Military Side, Clifton College (en manuscrit).

Notes on teaching of Practical Mathematics at Cundle. F. W. Sanderson, M. A., Headmaster of Cundle School (en manuscrit).

The Organisation of Mathematical Teaching in Girls' Secondary Schools, and Mathematical E-aminations for Girls. Miss L. Story, Headmistress of Royal School, Bath. (en préparation).

Mathematics in Relation to Engineering work at Schools. T. S. Usherwood, B. Sc., London. Assistant Master, Christ's Hospital.

Mathematics in Welsh Secondary Schools. D J. Williams, Headmaster of Bethesda County School (en préparation).

Enseignement supérieur, universitaire et technique
(University and Technical)

(Title not known) P. W. H. Abbot, B. A., Mathematical Master Regent Street Polytechnic (en préparation).

Recent changes in the Mathematical Course et Cambridge. A. Berry, M. A., Fellow & Tutor of King's College, Cambridge (en préparation).

Original Research as part of the Preparation of Future Teachers of Mathematics. Prof. G. Bryan, F. R. S., University College Bangor (en préparation).

The relation of University Mathematics and Physics. L. N. G. Filon, D. Sc., F. R. S., Assistant Professor of Mathematics, University College, London (sous presse).

Scholarship Examinations and the Scholarship System. G. H. Hardy, M. A., F. R. S , Mathematical Lecturer, Trinity College, Cambridge (en préparation).

Scholarship Examinations and the Scholarship System. A. E. Tolliffe, M, A., Corpus Christus College Oxford (en préparation).

The relation of Mathematics to Engineering at Cambridge. Prof. B. Hopkinson, F. R. S., Professor of Engineering, Cambridge (en préparation).

Geometry for Engineers. Prof. D. A. Low, M. I. Mech. E. Professor of Engineering East London College (en manuscrit).

Mathematical work at Osborn and Dartmouth. J. W. MERCER, M. A., Head of Mathematical Department, Royal Naval College, Dartmouth (en préparation).

The Training of Teachers in Mathematics. T. P. NUNN, D. Sc., Vice-Principal of London Day Training College (en préparation).

Higher Mathematics for Women. Mrs. SIDGWICK, Late Principal Newnham College, Cambridge (en préparation).

ITALIE

Délégués : G. CASTELNUOVO (Rome), FR. ENRIQUES (Bologne), G. SCORZA (Palerme).

La sous-commission italienne publiera les rapports suivants :

1. Ecoles primaires, M. CONTI (Rome), (en préparation).
2. Ecoles classiques, MM. SCARPIS (Bologne) et FAZZARI (Palerme), (en manuscrit).
3. Ecoles techniques, M. SCORZA (Palerme), (en préparation).
4. Ecoles professionnelles et commerciales, M. LAZZARI (Livourne), (en manuscrit).
5. Ecoles normales, M. CONTI (Rome), (en préparation).
6. Universités : Cours de mathématiques pour les élèves ingénieurs, M. SOMIGLIANA (Turin), (sous presse).
7. Universités : Sur le doctorat et la préparation des candidats à l'enseignement, M. PINCHERLE (Bologne), (sous presse).
8. Sur les traités italiens de mathématiques élémentaires, M. SCORZA (Palerme), (en préparation).
9. Sur les réformes de l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes, M. VACCA (Gènes), (en préparation).
10. Sur l'évolution de l'enseignement de la géométrie dans les universités, M. SEVERI (Padoue), (en préparation).
11. Sur l'évolution de l'enseignement de l'analyse dans les universités, (en pourparlers).
12. Remarques et propositions au sujet de l'enseignement des mathématiques dans les écoles élémentaires, moyennes et universitaires (préparation des candidats à l'enseignement), M. PADOA (Gènes) (en manuscrit)[1].

JAPON

Délégué : M. R. FUJISAWA (Tokio).

Le Japon fait partie de droit des pays participants conformement aux d'après les conditions du « Rapport préliminaire », bien que celui-ci le classe dans les pays associés. L'erreur provient de ce que les *Atti* du Congrès de Rome ne font pas mention de ce pays, tandis qu'en réalité la liste des adhérents contient deux mathématiciens japonais, qui avaient été attri-

[1] Publié dans le *Boll. di Mat. :* ce rapport sera réimprimé dans la publication officielle de la sous-commission.

bués à l'Allemagne, où ils étaient en séjour pendant l'hiver précédant le Congrès.

La sous-commission japonaise est composée de MM. :

Dr R. Fujisawa, prof at the Imperial University, Tokio, *président*.

T. Seto, inspector at the Departement of Education, *secrétaire*.

T. Kawakami, compiler at the Departement of Education, *secrétaire*.

M. Mimori, prof. at the Tokio High Technical School.

S. Sawada, prof. at the Tokio High Commercial School.

D. Sudo, prof. at the First High School.

Dr K. Shibata, prof. at the College of Engineering, Imperial University of Tokio.

S. Fijita, prof. at the Army Departement.

Dr S. Yokota, prof. at the College of Engineering, Imperial University, Tokio.

T. Yoshiye, prof. at the College of Science, Imperial University of Tokio.

J. Mori, prof. at the Tokio Girl's High Normal School.

S. Nakagawa, assistant prof. at the College of Science. Imperial University of Tokio.

Dr M. Imamura, prof. at the Army Departement.

S. Oba, prof. at the Navy Departement.

T. Hayashi, piof. at the Tokio High Normal School.

S. Shimidzu, prof. at the Navy Departement.

T. Kubota, prof. at the First High School.

S. Asakoshi, prof. at the Navigation School.

M. Fujiwara, prof. at the College of Science the East-Northern Imperial University.

Ont été adjoints en qualité de *membres extraordinaires :*

J. Nishikawa, teacher at the Tokio High Normal School.

T. Goto, teacher at the Tokio High Normal School.

J. Ando, teacher at the Tokio High Normal School.

Miss Kimiko, Horiguchi, teacher at the Tokio Girl's High Normal School.

Miss Yoshi, Ogawa. teacher at the Tokio Girl's High Normal School.

T. Otashiro, lecturer at the Tokio High Technical School.

T. Okada, teacher at the Aoyama (Tokio) Normal School.

La première réunion de la sous-commission a eu lieu au Départemenl of Education le 14 janvier 1911. Des rapports préparatoires fourniront un exposé de l'enseignement mathématique dans les différents types d'établissements. Une fois qu'ils auront été examinés et étudiés par la sous-commission, ils seront rédigés définitivement, d'abord en japonais, puis en anglais. Ils seront publiés pour être présentés au Congrès de Cambridge.

NORVÈGE

Délégué : M. Alfsen (Christiania).

Un rapport d'ensemble sur l'enseignement mathématique en Norvège sera publié dès que les plans d'études des diverses écoles actuellement en transformation seront arrêtés. Le rapport, dont la plus grande partie est terminée, donnera, comme introduction, un aperçu de l'organisation sco-

laire ; puis il traitera de l'enseignement mathématique dans les différents types d'écoles.

I. Ecoles primaires, élémentaires et supérieures.

II. Ecoles secondaires : l'école intermédiaire et le gymnase.

III. Hautes écoles : l'Université de Christiania et l'Ecole polytechnique de Trondhjem.

IV. Ecoles spéciales : Ecoles techniques, écoles professionnelles, écoles d'agriculture, écoles de navigation, etc., écoles militaires.

V. Ecoles normales pour l'enseignement primaire.

VI. La préparation pédagogique des professeurs de lycées.

Un chapitre final sera consacré aux tendances actuelles, aux idées nouvelles et aux réformes déjà accomplies.

La publication aura lieu dans les *Universitetsog Skoleannaler* (Annales de l'Université et des écoles, revue officielle).

PORTUGAL

Délégué : M. Gomes Teixeira (Porto).

Ainsi que nous l'avons annoncé dans la *Circulaire n° 2*, les travaux ont été organisés directement sous les auspices de M. le Directeur de l'Instruction publique sur la proposition de M. Gomes Teixeira, *délégué*. Le Recteur de l'Université de Coïmbra, les Directeurs des Ecoles polytechniques de Lisbonne et Porto, les Recteurs des Lycées de Lisbonne, Porto et Coïmbra et les directeurs des Ecoles normales primaires ont invité les Conseils académiques à indiquer les modifications qu'il convient d'introduire dans les programmes et les méthodes des études mathématiques. Ces rapports seront transmis à M. Teixeira, qui rédigera le rapport d'ensemble sur l'enseignement mathématique au Portugal.

ROUMANIE

Délégué : M. G. Tzitzeica (Bucarest).

(Sans nouvelles récentes.)

RUSSIE

Délégués : MM. N. v. Sonin, Kojalovic, K. W. Vogt (St-Pétersbourg).

Les publications de la Sous-commission russe seront rédigées en langue française. Deux fascicules ont paru, les autres sont en traduction ou en préparation. Ont été distribués aux membres de la Commission :

1. L'enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques supérieures et quelques-unes des écoles militaires, par C. Possé (1 fasc. de 100 p.)

2. L'enseignement mathématique dans les écoles de Finlande, rédigé par une commission instituée par le Sénat impérial de Finlande (1 fasc. de 52 p.)

SUÈDE

Délégué : M. H. v. Koch (Stockholm).

Les travaux de la Sous-commission suédoise sont presque achevés. Des huit rapports qui seront présentés, sept sont déjà publiés, le dernier est déjà en manuscrit. Ils sont insérés dans la *Pedagogisk Tidskrift,* à Stockholm, et distribués sous la forme de tirages à part. Voici la liste complète des rapports.

Ecoles primaires et écoles normales, par H. Dahlgran : Die Mathematik an den Volkschulen und Volkschullehrerseminaren Schwedens (publié).

Ecoles réales, par E. Göransson et E. Hallgren : Die Mathematik an den schwedischen Realschulen (publié).

Gymnases, par E. Göransson : Die Mathematik an den schwedischen Gymnasien (en manuscrit).

Etablissements de jeunes filles, par O. Josephson et Anna Rönström : Die Mathematik an den höheren Mädchenschulen in Schweden (publié).

Ecoles techniques moyennes, par O. Gallander : Der mathematische Unterricht an den technischen Mittelschulen (publié).

Ecoles techniques supérieures, par H. von Koch : Die Mathematik an der technischen Hochschule in Stockholm (publié).

Universités, par A. Wiman : Die Mathematik an den schwedischen Universitäten (publié).

SUISSE

Délégués : MM. Fehr (Genève), C. F. Geiser (Zurich), J. H. Graf (Berne).

Les mémoires seront réunis sous le titre *L'Enseignement mathématique en Suisse, Rapports de la sous-commission suisse publiés sous la direction* de H. Fehr. Un premier fascicule a paru en janvier 1910; il comprend, après une courte *Introduction,* le Rapport préliminaire du Comité central, en allemand et en français, et les questionnaires adressés aux directeurs et aux professeurs.

Viendront ensuite les rapports concernant les divers types d'établissements :

Ecoles primaires, M. Stœcklin (Liestal-Bâle) (en préparation).

Ecoles primaires supérieures (Sekundarschulen), M. Badertscher (Berne) (en manuscrit).

Enseignement secondaire supérieur, M. C. Brandenberger (Zurich) (en manuscrit).

Ecoles supérieures de jeunes filles, M. Gubler (Zurich) (en préparation).

Ecoles modernes *(Landerziehungsheime),* par K. Matter (Frauenfeld) (en manuscrit).

Ecoles techniques moyennes, par L. Crelier (Bienne) (en préparation).

Enseignement commercial secondaire et supérieur, Ecoles d'administration et de chemin de fer, par L. Morf (Lausanne) (en manuscrit).

Ecoles normales d'instituteurs et d'institutrices des écoles primaires, par M. Scherrer (Küsnacht-Zurich) (en préparation).

Les mathématiques dans les universités suisses, par M. J.-H. Graf (Berne) (en préparation).

Les mathématiques dans l'enseignement technique supérieur en Suisse :
a) Ecole polytechnique fédérale de Zurich, par M. Grossmann.
b) Ecole des ingénieurs de l'Université de Lausanne, par M. Lacombe.

PAYS ASSOCIÉS

En dehors des dix-neuf pays ci-dessus, que le *Rapport préliminaire* désigne sous le nom de *pays participants*, les autres pays possédant un ensemble d'établissements d'instruction publique ont été invités à se faire représenter par un délégué dans la Commission internationale de l'enseignement mathématique; leur participation aux travaux est facultative.

Jusqu'à ce jour seuls les pays ci-après ont répondu à l'appel du Comité central :

Australie, Prof. Carlslaw, Sidney; suppléant en Europe : Prof. Bragg, Leeds.

Canada, Prof. Bovey, recteur du Collège impérial technique de Londres.

Colonie du Cap, M. Hough, de l'Observatoire royal de Capetown.

Mexique, M. Valentin Gama, professeur à l'Ecole nationale des ingénieurs, Tacuyaba.

Le Comité central fera de nouvelles démarches auprès des autres pays; il espère qu'en vue du Vme Congrès international de mathématiques, qui se tiendra à Cambridge en août 1912, ils auront également un représentant dans la Commission.

Les renseignements complémentaires seront publiés dans l'*Enseignement mathématique*. MM. les Délégués sont priés d'envoyer les corrections et additions au secrétaire-général.

Genève, 8 mars 1911.

Le Secrétaire-général :
H. Fehr.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel[1].

12. — *A propos d'un article* de M. E.-B. WILSON.

Réponse de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO.

I. Dans un article intitulé *The unification of vectorial notations* [*Bull. of the American Mathem. Society*, 2 d series, v. XVI, n° 8, pp. 415-436, New-York, May. 1910], M. E.-B. WILSON analyse les Notes que nous avons publiées dans les « *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* » et surtout nos ouvrages, récemment parus[2]. Elève de Gibbs, dont il a publié les leçons sur l'analyse vectorielle [*Vector Analysis*], bien avant la publication, dans leur forme originelle, dans « *The Scientific Papers* » [New-York, 1906; v. II, pp. 17-90]; il trouve illogique, inexact et condamnable, tout ce qui s'éloigne de la méthode de Gibbs. M. Wilson, au fond, ne fait que répéter ce qu'il a déjà écrit dans l'*Enseignement mathématique*, XI[me] année, 1909, pp. 211-216. Malgré notre réponse [*Ibidem*, pp. 463-466], nous nous croyons obligés de montrer encore une fois que *toutes les critiques de M. Wilson n'ont pas de fondement logique et scientifique*.

II. M. Wilson observe avant tout, à propos de notre travail historique critique et bibliographique : « *It is needless to observe that the work was accomplished with the expected accuracy. It was, however, not done with all the completeness desirable* » (p. 416)[3].

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, XI[e] année, 1909, n° du 15 janvier, p. 41-45 ; n° du 15 mars, p. 124-134 ; n° du 15 mai, p. 211-227 : n° du 15 juillet, p. 381 ; n° du 15 novembre, p. 459-466. — XII[e] année, n° du 15 janvier 1910, p. 39-54. — L'abondance des matières nous a obligé de retarder la publication de la présente Note. (*Réd.*).

[2] *Elementi di Calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica ed alla fisica-matematica.* Bologna, Zanichelli, 1909. *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica.* Torino, Petrini, 1909. *Eléments de Calcul vectoriel...*, traduit de l'italien par S. LATTÈS, Paris. A. Hermann, 1910. M. Wilson a oublié de reproduire exactement les titres de ces deux ouvrages.

[3] Il paraît que M. J. ROSE est de la même opinion. Dans un article : J. MASSAU (1852-1909). *Courte notice sur sa vie et ses travaux en mécanique et en géométrie vectorielle* [*Ens. mathém.* XII ann. 1910, pp. 187-200] il a écrit, p. 199. *Cela m'étonne même que, dans le tableau des deux*

Dans les Notes des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, il est nécessaire de le répéter, nous nous sommes occupés seulement du *système minimum*, c'est-à-dire de la partie de calcul vectoriel qui est développée dans tous les traités modernes. La critique de M. Wilson n'est pas fondée, d'autant plus que dans ces Notes (Nota V, t. XXVI, pp. 369-377, 1908), nous avons montré que ce système est bien loin d'être complet, et qu'il est nécessaire d'adopter le système complet de Grassmann.

M. Wilson dit encore (p. 416) : « *The suggestion* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *for the scalar product seems particularly infelicitous in view of the fact that this notation is in actual use for the vector product. So far as we are aware, this is the first suggestion which violently* (!) *and confusingly differs from a notation which has become fairly widely established.* »

C'est un premier exemple (nous en verrons bien d'autres) de la manière avec laquelle M. Wilson exprime des faits et des jugements. Il faut observer, en effet, qu'en Allemagne (la plus grande partie des livres sur le calcul vectoriel : mémoires scientifiques, encyclopédie mathématique) ; en Angleterre (mémoires de Heaviside, etc.) ; etc. on n'adopte absolument ni la *forme*, ni l'*esprit* des notations de Gibbs. Ceux qui ont, en partie, suivi Gibbs, ont été forcés de changer ses notations ; par exemple M. Prandtl [1] et MM. Jaumann, Fischer, Valentiner [2].

---

mathématiciens italiens (Ens. mathém. 1909, p. 41) *il ne soit pas fait mention des notations de Resal, de Saint-Venant et de Massau* ». Au contraire, il faut s'étonner que M. Rose n'ait pas lu le nom de Resal dans notre tableau. Si M. Rose se fût donné la peine de lire nos Notes des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. XXIV, p. 65-80, Nota II, § III, note (29) e (30)), il n'aurait certainement pas commis de pareilles fautes d'histoire et de bibliographie, et n'aurait pas attribué à Massau la paternité de la *curieuse formule*

$$\mathrm{M}\bar{c}\,\mathrm{M}\overline{ab} = \bar{a}(\overline{bc}) - \bar{b}(\overline{ac}),$$

qui est équivalente à

$$\mathbf{c} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b}\ ,$$

qui n'est autre chose que la formule sur les produits régressifs de Grassmann ou sur le double produit vectoriel de Gibbs.

Nous n'avons pas cité Massau (nous n'avons pu malheureusement consulter sa mécanique qui est bien rare) ; mais ses notations ont été exclues par nous implicitement, comme celles de Saint-Venant, et M. Rose pourra s'en convaincre en lisant nos Notes des *Rendiconti*.

Ajoutons encore, en passant, que de Saint-Venant a défini le produit géométrique de deux vecteurs (produit extérieur de Grassmann) *indépendamment* de Grassmann, mais certainement *après* Grassmann [*Compte Rend.* t. 21, pp. 620-625, 2e semestre 1845]. M. Rose a commis une faute ; l'année du mémoire étant 1845 et non 1844 !

[1] M. Prandtl de Göttingue, il y a quelques années, a publié trois articles fort intéressants dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung : Grundsätze für eine einheitliche Schreibung der Vektorenrechnung im technischen Unterricht* [Bd. 12, 1903, p. 444] ; *Ueber eine einheitliche Bezeichnungsweise der Vektorenrechnung im technischen und physikalischen Unterricht* [Bd. 13, 1904, pp. 36-40] ; *Ueber die physikalische Richtung in der Vektoranalysis* [Bd. 13, 1904, pp. 436-449] : ce dernier article est une réponse à celui de M. Mehmke : *Vergleich zwischen der Vektoranalysis amerikanischer Richtung und denjenigen deutsch-italienischer Richtung* [Bd. 13, 1904, pp. 217-228]. M. Prandtl a proposé d'écrire $\mathbf{a} \bigcirc \mathbf{b}$ le produit intérieur de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Voir notre Nota V des *Rendiconti* (not. 9).

[2] Jaumann, *Die Grundlagen der Bewegungslehre*, Leipzig, Barth, 1905 (nous nous occupe-

Si même dans les sciences exactes on pouvait être libre de raisonner indépendamment des habitudes acquises, M. Wilson aurait dû accepter notre proposition ; car nous avons montré :

1° que la notation $a \times b$ pour le produit intérieur n'est pas nouvelle, et c'est la première adoptée par Grassmann ;

2° qu'elle jouit de toutes les propriétés du signe $\times$ de l'algèbre ;

3° qu'il est bien préférable de laisser au . le rôle de séparateur ;

4° que la notation ab doit être réservée pour le produit alterné bivecteur de Grassmann.

Si M. Wilson n'est pas encore persuadé, nous ne savons pas qu'y faire. Au reste, il paraît que nous sommes d'accord avec M. Wilson sur la nécessité d'un signe d'opération pour l'indication des deux produits scalaire et vectoriel ; ce qui est bien l'esprit des notations de Gibbs. Sa forme est une question tout à fait sans importance ; mais pourquoi doit-elle être fixée par Gibbs et non par Grassmann qui est antérieur ? Pourquoi doit-on avoir, contrairement aux règles de l'algèbre,

$$a \times b = -b \times a \quad ?$$

III. Dans les n°s 2-5 de son long article, M. Wilson analyse diffusément nos *Elementi*. Ses critiques s'adressent surtout à la partie générale de nos deux livres ; car M. Wilson a commis la faute de ne pas considérer les applications ou de les regarder comme une partie tout à fait isolée. Ce sont au contraire ces applications qui jettent le plus de lumière sur la partie générale ; ce sont, sans doute, les applications qui doivent montrer la valeur de la méthode et des notations. M. Wilson ne veut pas même reconnaître que dans les applications, dans nos deux livres, nous, et ceux qui suivent notre méthode, nous avons fait beaucoup plus que nos prédécesseurs, et aussi, nous l'espérons du moins, beaucoup mieux.

Sur les six premiers chapitres des *Elementi*, M. Wilson n'a pres-

---

rons bientôt de ce livre peu connu). L'auteur emploie les notations de Gibbs ; mais ensuite il doit s'en éloigner pour la notation d'une dyad. La notation de Gibbs ab pouvant se confondre avec celle de produit extérieur (bivecteur) de Grassmann, très employée en Allemagne, M. Jaumann doit changer ab de Gibbs en a,b ; et ainsi pour les dyads scalaires ou vectorielles il écrit

$$a:b\,, \qquad a\overset{\times}{.}b \;!$$

M. Fischer, *Vectordifferentiation und Vectorintegration*, Leipzig, Barth, 1904, emploie aussi les notations de Gibbs. A propos de cet ouvrage, on pourra utilement voir quelques articles de MM. Mehmke et Fischer dans le *Jahresbericht* D. M. V. [Bd. 14, pp. 211-212 : 344-358 : 354-358]. M. S. Valentiner : *Vektoranalysis*, Leipzig, 1907 (Sammlung Göschen) ne diffère pas de Jaumann.

Tout ceci montre encore une fois l'opportunité et la vérité de ce que nous disions en commençant nos travaux, *Rendiconti*, etc.

« Le notazioni fondamentali del minimo sistema vettoriale non devono essere in contradizione con quelle fondamentali dei più ampi sistemi meccanico-geometrici di Möbius, Hamilton, Grassmann. »

que rien à observer ; seulement, p. 419, notre opérateur i « *an interesting departure from the ordinary texts* » et certaines formules font une « *unfavorable impression* » à M. Wilson ; mais il veut bien admettre que cette mauvaise impression est due à la « *unfamiliarity of the symbols* ». Nous pouvons assurer M. Wilson que nos élèves, en peu de jours, acquièrent toute la pratique désirable avec l'opérateur i, ne font plus de fautes et n'ont pas de mauvaise impression. D'autre part, les avantages de cet opérateur (surtout en Cinématique) sont tels (et M. Wilson, par exception, veut bien les signaler, p. 422) qu'il n'est pas question de changer.

M. Wilson trouve encore nos définitions directes et absolues de « rot et div » [*Elementi*, Part. I, Cap. VI, 3] « *higlhy ingenious definitions and have much to commend them*, p. 420 » et il veut bien observer qu'elles ont sur les autres [définitions au moyen d'intégrales ; nous ne parlons pas des définitions cartésiennes] de nombreux avantages.

Mais tout à coup, quelques lignes de la page 72 de nos *Elementi* viennent obscurcir tout ce qu'il y avait de nouveau, de clair et de simple. Écoutons M. Wilson : « *It is in this same chapter that the authors reveal their remarkable discovery that the laplacian operator.*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

« *is essentially different according as it is applied to a scalar or to* « *a vector function. Upon this discovery they are especially insistent on every possible occasion. They even go so far as to introduce different symbols* Δ *and* Δ' *for the operator according as the* « *operand is scalar or vector. Then they are able to write*

$$\Delta V = \text{grand div } V ,$$

$$(4) \qquad \Delta' V = \text{grad div } V - \text{curl curl } V \text{ ».} \qquad \text{(p. 421)}$$

Ce que M. Wilson affirme manque à tel point de justesse, que nous avons de la peine à croire à ce qu'il a écrit et nous craignons qu'il n'y ait ici un grand malentendu.

Voici ce que nous avons dit à la page 72 : « *Nelle applicazioni si presentano le due funzioni*

$$(3) \qquad \Delta_2 = \text{div grad} , \qquad \Delta_2' = \text{grad div} - \text{rot rot} ;$$

« *la prima opera su di un numero e produce un numero, la seconda* « *opera su di un vettore e produce un vettore.* »

« *Le funzioni* Δ_2 *e* Δ_2', *ben distinte e definite dalle* (3) [nous prions

le lecteur de bien voir que nous disons « *definite* »] *hanno ris-* « *petto all'algoritmo cartesiano, la forma simbolica comune*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \; ; \quad \text{ecc. »}$$

Il suffit de confronter *ce que nous avons dit* et ce que M. Wilson *nous fait dire*, pour comprendre aussitôt que M. Wilson ne nous a pas compris.

Les opérateurs (3), ou leur forme équivalente [*Omografie vettor.*, nº 25]

$$(3') \qquad \Delta m = I_1 \frac{d \operatorname{grad} m}{dP} , \qquad \Delta' \mathbf{u} = \operatorname{grad} \frac{d\mathbf{u}}{dP} ,$$

ont évidemment une forme absolue et quand ils sont définis par (3) ou (3') ils sont naturellement divers.

Mais M. Wilson veut trancher la question en observant que « *the laplacian operator may and should be defined by its intrinsic* « *properties such as are expressed in* (5) [c'est-à-dire, sous une forme plus rigoureuse que celle établie par notre critique,

$$(5) \qquad \Delta\varphi = \lim_{r=0} \frac{6(\overline{\varphi} - \varphi)}{r^2} , \qquad \text{où} \qquad \overline{\varphi} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_\sigma \varphi d\sigma ,$$

σ étant une sphère de rayon r avec le centre en P] *and when this definition is given it appears that the operator is equally applicable and with the same significance to any quantity* φ... » [p. 423].

Or les formules (5) et (4) appliquées à φ prouvent seulement que *deux fonctions distinctes* ont en commun une propriété particulière; mais cela ne veut pas dire qu'elles soient identiques; et la formule (5) vaut pour φ nombre ou vecteur, car le second nombre est exprimé par des fonctions qui sont applicables à des vecteurs ou à des nombres. Cela prouve seulement que : il y a des fonctions applicables à des vecteurs ou à des nombres et par lesquelles on peut exprimer $\Delta\varphi$ dans les deux cas (φ nombre ou vecteur). Peut-on conclure que Δ est unique?

Encore, dans (5), lorsque φ est une fonction numérique continue, etc., $\overline{\varphi}$ est la valeur de φ dans un certain point de la surface de la sphère qui a P pour centre et r pour rayon; mais si φ est un vecteur, $\overline{\varphi}$ est seulement une valeur moyenne qui n'est pas en général une des valeurs de φ sur σ. Nous croyons donc que même la définition géométrique (quoique indirecte) montre une diversité entre Δ appliqué soit à un nombre, soit à un vecteur.

Et enfin nous faisons observer qu'en faisant usage du ∇ de Ha-

milton et toujours avec les symboles I, I^{-1}, les (3') deviennent

$$-\nabla^2 m\ , \qquad -I\nabla^2 I^{-1}\mathbf{u}\ ;$$

de manière que le Δ de Gibbs a deux formes différentes

$$-\nabla^2 \quad \text{et} \quad -I\nabla^2 I^{-1}\ .$$

Il est vrai que les quaternionistes modernes suppriment I et I^{-1} et réduisent ainsi les deux symboles à un seul $-\nabla^2$; mais nous avons déjà montré la faute qu'ils font[1].

On comprend aisément pourquoi le Δ de Gibbs a la forme commune bien connue lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes. Dans ce système le point est représenté par des nombres; et les opérations différentielles sont données par la dérivée usuelle d'un nombre qui est fonction d'un nombre. Or les propriétés formelles, au moins, de ces dérivées sont les mêmes que celles des dérivées d'un vecteur par rapport à un nombre dont il est fonction. Il n'y a donc rien de singulier que deux fonctions différentielles bien distinctes puissent avoir la même forme tachygraphique. La singularité consiste au contraire dans la déduction que l'on veut faire de l'*univocité absolue* de cet opérateur; sans observer que le symbole différentiel, applicable à toute entité **u** fonction de P, avec la même définition formale absolue, donne naissance à des opérateurs linéaires bien distincts selon qu'il est appliqué à un vecteur (ou à un nombre), à une homographie (ou nombre).

M. Wilson a la bonté de dire que nous laissons le lecteur « *with* « *a wrong or an unfortunately restricted point of wiew* » (p. 436). Si dans nos livres il y a des fautes, M. Wilson ne les a certainement pas découvertes[2]; au contraire, M. Wilson nous a abondamment prouvé qu'il ne sait ni se corriger des erreurs habituelles, ni s'éloigner du champ bien étroit des fonctions tachygraphiques.

IV. — Dans son n° 4, M. Wilson prend la défense du *vecteur symbolique* ∇ de Gibbs (que nous avons complètement aboli) et en

---

[1] C'est un principe fondamental de logique mathématique (Nota 3ª des *Elementi*) que $x = y$ signifie :

« toute propriété de x est aussi propriété de y »

Si x et y sont des opérateurs, un de ses éléments caractéristiques est le *champ d'opération*; donc pour que x soit égale à y, il est nécessaire que x et y aient le même champ. Or nos Δ et Δ' définis par (3) ont des champs différents.

M. Wilson peut bien ne pas accepter cette distinction logique; mais pour avoir une idée des inconvénients qui en dérivent, il pourra lire ce que M. Peano a écrit dans son *Formulario* — Editio V, pp. 73-82.

[2] Dans les *Elementi*, en parlant de l'opérateur i (celui qui produit une mauvaise impression à M. Wilson) nous avons commis *délibérément* une faute, pour ne pas nous éloigner trop du commun usage et parce que cette faute n'a pas de graves inconvénients. Que M. Wilson cherche les fautes concernant l'opérateur i.

dernière analyse il fait ce raisonnement : « Dans beaucoup de for- « mules ∇ se comporte vis-à-vis de $\cdot$ et $\times$ (ce sont les symboles « de Gibbs qui correspondent à nos $\times$ et $\wedge$) comme un vecteur ; « donc, etc. »

C'est pour M. Wilson un dogme de logique de croire démontré un théorème, dès qu'il l'a reconnu vrai dans quelques cas.

Suivons (pour un seul instant) les notations de Gibbs. M. Wilson ne peut pas nier que l'on a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP} ; \qquad \nabla \times \mathbf{u} = 2V \frac{d\mathbf{u}}{dP} .$$

L'homographie $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ est parfaitement déterminée avec les deux fonctions $I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP}$ (premier invariant) et $V \frac{d\mathbf{u}}{dP}$ (vecteur de l'homographie) ; et il y a une infinité de vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ tels que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = I_1 \frac{d\mathbf{u}}{dP} , \qquad \mathbf{y} \times \mathbf{u} = 2V \frac{d\mathbf{u}}{dP} ;$$

donc : le vecteur symbolique ∇ a, pour chaque vecteur $\mathbf{u}$, une infinité de valeurs par rapport aux opérations $\cdot$ et $\times$.

Mais de quelle sorte de vecteur s'agit-il ? Qu'est-ce que l'on entend par vecteur symbolique ?

Nous savons très bien qu'une grande partie de la mathématique tombe dès que l'on élimine, avec soin, les termes inutiles et dès que l'on veut définir tout ce qui reste. Mais cela ne doit préoccuper personne ; ce qui reste est l'utile !

Des formules que nous avons rappelées, il résulte que l'on peut écrire

$$\nabla \cdot = I_1 \frac{d}{dP} ; \qquad \nabla \times = 2V \frac{d}{dP} ;$$

et nous demandons : quelle relation y a-t-il entre le produit intérieur et vectoriel et le premier invariant ou le vecteur de l'homographie $\frac{d}{dP}$ et, si les deux signes $\cdot$ et $\times$ sont inutiles, par quelle étrange vertu le symbole ∇ leur donne t-il, dans les deux cas, une valeur ?

Il faut vraiment convenir qu'il n'y a pas de notations plus incorrectes *(particularly confused and infelicitous)* à défendre !

$\nabla \cdot$ et $\nabla \times$ sont des tachygraphes accidentels, car ils ont une expression absolue avec des opérateurs convenables ; mais ∇ est encore moins qu'un tachygraphe ; c'est une mauvaise transformation *(particularly confused and infelicitous)* du ∇ de Hamilton, qui, avec les symboles I, I^{-1} est *un opérateur quaternional très exact.*

Enfin, nous demandons à M. Wilson si l'idée de réduire les choses aux concepts clairs et simples a peut-être empêché les méthodes si simples de calcul vectoriel de se plier aux applications les plus variées ?

Tout le reste de nos *Elementi*, la partie la plus importante des applications ne provoque pas de critique ; M. Wilson, au contraire, trouve que « *the large amount of material which has been* « *put into a small space without any apparent crowding or obscu-* « *rity is especially noteworthy and has been accomplished langely* « *by adherence to the program of using purely vectorial methods.* » (p. 429).

Au moins nos fautes n'ont pas eu de suites fâcheuses !

V. — Nos *Omografie vettoriali* sont examinées dans les nos 6 et 7 de l'article de M. Wilson. Il observe avant tout que nous « *have* « *no hesitation about adding together a number* x *and a homogra-* « *phy* α. *They regard a number, whenever convenient, as a linear* « *transformation.* » (p. 429). Et il explique que si x est un nombre et α une homographie, cela signifie que

$$(x + \alpha)\mathbf{u} = x\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \text{ arbitraire}) .$$

Mais à la vérité nous ne pouvons pas comprendre M. Wilson ; qu'y a-t-il d'étrange en cela ? Gibbs (*Vector analysis*, p. 260) a lui-même considéré $\mathbf{r}' = c\mathbf{r}$ (c est un nombre) comme une fonction linéaire de $\mathbf{r}$; et nous avons fait ici ce que tout le monde fait, et à juste titre, en regardant un nombre (voir *d* dans l'*Introduction aux Omografie*) comme un opérateur linéaire. Moins encore nous ne voyons pourquoi les notations si simples et si correctes

$$I_1(\alpha + \beta) = I_1\alpha + I_1\beta .$$

sont « *particularly confused and infelicitous.* » (p. 430).

M. Wilson a bien compris que dans l'exposition (si profondément différente de celle de Gibbs) des transformations linéaires, notre point de vue n'est pas algébrique : nous avons considéré ces transformations comme des opérations (p. 431). La supériorité de notre exposition (il est bien entendu que nous n'avons pas la prétention d'avoir fait des découvertes) pour la clarté, la simplicité et la brièveté sera montrée par une analyse de nos méthodes et de celles de Gibbs que nous publierons bientôt. M. Wilson ne s'est sans doute pas livré à cet examen, qui est surtout utile pour les applications que nous avons faites et celles..... que l'on ne trouve pas dans le livre de Gibbs et de Jaumann, etc. On trouve donc bien singulier de lire, p. 431 : « *Whe should be happy to see eve-* « *ryone who is interested in vectors and who believes in their neces-* « *sity adapt the authors' method.....* ».

Mais la chose qui frappe encore davantage M. Wilson et qu'il critique beaucoup, est notre définition de grad α (α est une homographie : [*Omogr. vettor.*, n. 22]. Il observe avant tout que : « *It* « *looks as if the authors had temporarily fallen back to some ex-* « *tent into the fatal slough of tachygraphy against which they are* « *so careful to warn us.* » (p. 433).

Sans aucun doute, M. Wilson a une idée bien différente de la nôtre du mot tachygraphe. Nous nous permettons de lui rappeler qu'un tachygraphe a pour but d'écrire sous forme abrégée le résultat d'un calcul fait avec les coordonnées. Décomposer une opération complexe en trois autres (comme nous avons fait pour la définition de grad α) est donc une opération tachygraphique ?

Au reste, M. Boggio a donné récemment une définition de grad α très simple et tout à fait absolue[1], que l'on peut présenter de plusieurs manières différentes.

Si, par exemple, **a** est un vecteur constant, α une homographie fonction de P, on a, *par définition*

$$(\underset{P}{\text{grad}}\ \alpha) \times \mathbf{a} = \underset{P}{\text{div}}(K\alpha\mathbf{a}) ;$$

on l'aurait pu déduire de la formule [10], p. 57 des *Omografie*.

M. Wilson dit encore beaucoup d'autres choses, sans doute fort intéressantes, mais nous n'avons pas l'avantage de les comprendre.

« *If the authors had seen fit to call the vector defined by* (10) « *curl α or $\sqrt{\alpha}$ or anything else selected at random from the vast* « *realm of mathematical notations, they might have observed a si-* « *milar lack of analogy. There is only one exception — if they had* « *called their vector div* Kα, *they would have been surrounded on* « *every side with the most persistent analogies.* » (pp. 433-434).

Nous ne comprenons pas ce que M. Wilson a voulu dire par div Kα dont nous n'avons jamais parlé.

Nous avons considéré grad α car nous en avions le droit, de même que Gibbs a considéré lap, pot, max (qui n'ont pas eu de succès) ; nous ne sommes pas en contradiction avec les définitions précédentes, car si α est un nombre, nous avons de nouveau la définition usuelle de gradient d'une fonction numérique ; nous avons considéré cette fonction, car c'est avec elle que le théorème sur le gradient (Gauss) a son extension naturelle dans la formule (*Omogr.*, p. 72)

$$\int \text{grad}\ \alpha d\tau = -\int \alpha \mathbf{n} d\sigma ;$$

et avec cette fonction dans la mécanique des corps déformables.

---

[1] *Sul gradiente di una omografia vettoriale* (*Rend. Acc. Lincei*, s. V, v. XIX, 2e sem. 1910, pp. 383-389).

après avoir défini l'homographie (dilatation) β des pressions, les équations indéfinies et à la frontière pour l'équilibre, prennent la forme absolue et sont démontrées d'une manière absolue :

$$\rho \mathbf{F} = \text{grad}\ \beta\ , \quad \mathbf{F}_n = \beta \mathbf{n} \quad [\textit{Omografie}, \text{p. 72-73}].$$

Si M. Wilson n'est pas encore satisfait, il doit être excusé, du moins en partie. En effet, il avoue, p. 435, que : « *It will not be* « *feasible to give any account of the last chapter of the Omografie,* « *which contains applications to elasticity and to electrodyna-* « *mics*[1]. » Il n'a pas voulu se donner la peine d'examiner ce qui constitue la vraie pierre de touche de toutes les méthodes vectorielles : les applications.

Le lecteur peut maintenant juger de la critique de M. Wilson.

Dans l'*Enseignement mathématique*, notre critique a dit que ce n'était pas le cas de briser une lance en faveur de Gibbs. Il est libre de croire qu'il n'y a rien de meilleur que le système de son maître.

---

[1] Nous pouvons donner à M. Wilson de nombreux exemples de tachygraphes. Il n'a qu'à lire les traités allemands de Calcul vectoriel. Consulter en outre les deux travaux suivants V. Fischer, *Darstellung der Bewegungsgleichungen für elastische Körper in Vektorform* [*Journal f. reine u. ang. Mathematik*, Bd. 126 (1903) pp. 233-239]. L'auteur, en partant des équations bien connues en *coordonnées cartésiennes*, passe à la forme vectorielle. M. Wilson pourra comparer avec ce que nous avons fait dans les *Omografie*. Chap. III, § 2, 3.

M. Voigt, dans son mémoire : *Etwas über Tensorenanalysis* [*Nachrichten von der Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen*, 1904, pp. 495-513] a défini d'une manière tout à fait tachygraphe cartésienne les composantes orthogonales d'un tenseur *T* et, après avoir observé que les expressions, bien connues,

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\ ; \qquad \text{etc.}$$

peuvent être envisagées comme les composantes d'un certain vecteur, il dit que, à cause de sa grande analogie « *mit der Divergenz* (!!!) *eines Vektors passend durch div T bezeichnen kann* ».

De manière que : « *Wie die Symbol* Δ, *so bedeutet hiernach auch div eine verschiedene Grösse je nach die Natur seines Argumentes* ». Et après cela, M. Voigt peut écrire les équations pour l'équilibre d'un corps déformable sous la forme

$$\rho \mathbf{F} = \text{div}\ \mathbf{T}\ .$$

Si le tenseur T a pour composantes

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = p\ ,$$

comme il arrive dans le cas des fluides, nous avons la merveilleuse transformation de div T en grad p; car tout le monde écrit les équations d'équilibre d'un fluide ainsi

$$\rho \mathbf{F} = \text{grad}\ p\ .$$

M. Wilson pourra lire le Chap. III, § 2, 3 de nos *Omografie*.

La théorie des moments d'inertie et le mouvement d'un corps autour d'un point fixe dont M. Voigt s'occupe dans son mémoire, constituent une élégante application des *Omografie*. Voir : R. Marcolongo, *Momenti d'inerzia ed impulso nella dinamica dei sistemi rigidi* [*Rend. Acc. delle Scienze fisiche e mat. di Napoli*, s. III, v. XVI, p. 77-82 (1910)].

M. Ganss, *Einführung in die Vektoranalysis*, Zweite Auflage, Leipzig, 1909, Kap. IV ; W. v. Ignatowsky, *Die Vektoranalysis* u. s. w. Leipzig, 1909, Bd. I, § 40; ont suivi M. Voigt.

De l'œuvre profonde de Gibbs subsiste tout ce qui devait naturellement survivre et tout le reste a disparu.

Les critiques de MM. Knott[1] et Wilson prouvent précisément que nous avons raison. Pour M. Knott il n'y a de salut que dans les quaternions[2]; pour M. Wilson que dans le système de Gibbs. Nous avons démontré que les quaternions sont insuffisants, et qu'en général le système de Gibbs est faux; nous prenons ce qu'il y a de bon des deux côtés et nous construisons un système qui peut vivre de lui-même ou dériver en entier du vaste système de Grassmann-Peano.

Naples-Turin, 24 juin 1910.

CHRONIQUE

Une encyclopédie des mathématiques élémentaires.

La Société italienne de mathématiques « Mathesis » entreprend la publication d'une encyclopédie de mathématiques élémentaires, qui, étant donné le plan général et le nom des collaborateurs, est appelée à rendre de grands services aux professeurs de l'enseignement secondaire.

Nous sommes en mesure de faire connaître déjà maintenant le plan général de l'Ouvrage, qui paraîtra sous la direction de MM. L. Berzolari, G. Vivanti, F. Gerbaldi, professeurs à l'Université de Pavie, de M. R. Bonola, professeur à l'Institut supérieur de Rome, et de M. E. Veneroni, professeur à l'Institut technique de Pavie.

L'encyclopédie comprendra trois volumes, contenant 44 monographies, dont voici les titres et les auteurs.

---

[1] M. Knott a publié dans l'*Ens. math.*, année XII, pp. 39-45 une Note à laquelle nous avons répondu. (Ibidem, pp. 47-53). On peut encore voir, du même auteur: *Hamilton's Quaternion Vector Analysis* [*Jahresbericht*, D. M. V., Bd. 14 (1905), p. 167-171] et un article de M. J.-V. Collins: *Correlation of vector analysis notations.* [*Ibidem*, pp. 164-165]. M. Collins a proposé pour le produit vectoriel la notation $a^{V} b$!!!

[2] Dans la *Mathem. Gazette*, vol. V (1910) pp. 284-288, nos deux livres font l'objet d'une analyse signée C. G. K. presque semblable à celle de M. C. G. Knott; car C. G. K. montre seulement de connaître les pseudo-quaternions, et non ceux de Hamilton, et d'avoir peu compris ce que nous avons écrit. Nous renvoyons l'auteur à notre réponse à M. Knott.

Tome I : Analyse.

1. Logique mathématique, A. Padoa, Institut technique, Gênes.
2. Arithmétique élémentaire, E. Bortolotti, Université, Modène.
3. Théorie des nombres, Analyse indéterminée, M. Cipolla, Université, Catane.
4. La notion de nombre et ses extensions, D. Gigli, Lycée, Pavie.
5. Limites, séries, fractions continues, produits infinis, G. Vitali, Lycée « Colombo », Gênes.
6. Progressions et logarithmes, L. Tenca, Ecole Normale, Lodi, et A. Finzi, Institut technique, Bari.
7. Calcul littéral, Identités algébriques, D. Gigli.
8. Analyse combinatoire, Déterminants, Equations linéaires, L. Berzolari.
9. Equations de degré supérieur au premier, O. Nicoletti, Université, Pise.
10. Problèmes algébriques et leur discussion, B. Calo, Institut technique, Naples.
11. Eléments de calcul infinitésimal, G. Vivanti.
12. Relations entre l'analyse et l'algèbre élémentaire, S. Pincherle et G. Vivanti, Université, Pavie.

Tome II : Géométrie.

1. Propriétés élémentaires des figures du plan et de l'espace, F. Amodeo, Institut technique, Naples.
2. Théorie de la mesure et ses applications, A. Perna, Institut technique, Naples.
3. Géométrie du triangle et du tétraèdre, V. Retali, Lycée « Beccaria », Milan.
4. Polygones et polyèdres réguliers et étoilés, L. Brusotti, Lycée, Sondrio.
5. Transformations géométriques élémentaires, E. Veneroni.
6. Systèmes linéaires de cercles et sphères, E. Veneroni.
7. Géométrie sur la sphère, R. Bonola.
8. Sections du cylindre et du cône circulaires, E. Ciani, Université, Gênes.
9. Maxima et minima en géométrie, A. Padoa.
10. Méthodes de résolution des problèmes géométriques. Problèmes classiques, F. Gerbaldi.
11. Fondements de la géométrie élémentaire, U. Amaldi, Université, Modène.
12. Fonctions circulaires, fonctions hyperboliques. Trigonométrie plane et sphérique, G. Pesci, Académie navale, Livourne.

13. Calcul vectoriel, R. Marcolongo, Université, Naples et C. Burali-Forti, Académie militaire, Turin.

14. Eléments de géométrie analytique, L. Berzolari.

15. Eléments de géométrie projective, M. Pieri, Université, Parme.

16. Eléments de géométrie descriptive, F. Severi, Université. Padoue.

17. Courbes et surfaces spéciales, G. Loria, Université, Gênes.

18. Géométrie non-euclidienne, R. Bonola.

19. Géométrie non-archimédienne, Sen. G. Veronese, Université, Padoue.

20. Représentations géométriques des nombres complexes, R. Bonola.

21. Relations entre les théories géométriques supérieures et la géométrie élémentaire. U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques.

Tome III : Mathématiques appliquées. — Histoire. — Didactique.

1. Unités de mesure, Sen. G. Celoria, directeur de l'Observatoire astronomique de Milan.

2. Approximations numériques, calcul graphique, G. Pesci et G. Lazzeri, Académie navale, Livourne.

3. Calcul des probabilités, théorie des erreurs, F. Guarducci, Université, Bologne.

4. Applications élémentaires des mathématiques aux sciences physiques, E. Danile et A. Viterbi, Université. Pavie.

5. Statistique mathématique actuaire, C. Gini, Université, Cagliari et R. Viti, Institut technique. Bologne.

6. Mathématiques financières, T. Boggio, Université, Turin.

7. Histoire des mathématiques élémentaires, G. Vacca, Gênes.

8. Méthodes didactiques, textes, G. Scorza, Institut technique, Palerme.

9. Récréations mathématiques, M. Cipolla.

10. Instruments, F. Guarducci.

11. Modèles, F. Guarducci.

Faculté des Sciences de Paris. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année scolaire 1909-1910, les mémoires ci-après ont été acceptés pour le Doctorat ès sciences mathématiques.

Doctorat d'Etat. — Louis Roy : Recherches sur les propriétés thermo-mécaniques des corps solides. Paris, 1910, in-4°, 70 p.

Haag : Familles de Lamé, composées de surfaces égales. Généralisation, applications. Paris, 1910, in-4°, 81 p.

Doctorat d'Université. — Geocze (Zoard de) : Quadrature des surfaces courbes. Leipzig, 1909, in-8°, 88 p.

Académie royale de Belgique; concours de 1912.

L'Académie met au concours le sujet suivant :

Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850. — Prix 1000 francs.

Les mémoires pourront être rédigés en français ou en flamand et ils devront être adressés, francs de port, à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, avant le 1er août 1912.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage ; ils y inscriront seulement une devise, qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

Charles Méray.

Nous apprenons avec regret la mort de notre dévoué collaborateur, M. Charles Méray, professeur honoraire de l'Université de Dijon, membre correspondant de la section de géométrie à l'Académie des sciences de Paris.

M. Méray était âgé de 76 ans. Les obsèques ont donné lieu à une imposante cérémonie, à laquelle assistait une foule considérable. L'inhumation a eu lieu le lendemain, lundi 6 février, dans un caveau de famille, au cimetière de Bourgneuf-du-Val-d'Or (Saône-et-Loire).

C'est une perte très sensible pour les sciences mathématiques, dont il fut un des représentants les plus distingués. La Rédaction de cette Revue perd en lui un ami fidèle dont tous nos lecteurs ont pu apprécier les belles qualités intellectuelles. Le temps et la place nous manquent pour dire ce que fut le savant et pour retracer les principales étapes de son admirable activité scientifique. L'*Enseignement Mathématique* publiera, dans un prochain numéro, une notice sur sa vie et sur son œuvre.

Que sa famille veuille bien recevoir l'expression de notre sympathie et de nos profonds regrets.

Les Directeurs.

Amédée Paraf.

La Faculté des sciences de Toulouse vient de perdre, le 16 février dernier, Amédée Paraf, professeur de mécanique rationnelle. Il est mort, à peine âgé de cinquante ans, de fièvres malignes qui se présentèrent d'abord sous un aspect anodin, mais qui finirent cependant par le terrasser dans un espace de quelques semaines.

Les regrets laissés à Toulouse sont multiples et variés, car Paraf se dépensait dans plusieurs domaines différents. Il exerçait une action féconde sur les étudiants qui fréquentaient ses cours. Son

enseignement clair, précis et élégant séduisait les esprits que tentait une étude approfondie de la mécanique.

C'était aussi un musicien de valeur. La multiplicité même de ses aptitudes ne lui a peut-être pas permis de réaliser un grand travail mathématique. Cependant ses recherches sur le problème de Dirichlet ont été classiques à une époque où les méthodes de Fredholm n'avaient pas tout envahi. Tous les lecteurs du *Traité d'Analyse* de M. E. Picard savent le cas que ce dernier fait, en de nombreuses citations, des travaux de Paraf.

Notre malheureux collègue était célibataire. Il aimait à dire que l'affection de ses frères, de ses sœurs et de ses très nombreux neveux et nièces lui suffisait amplement. Pour ces derniers, il était l'oncle de province, dont chaque voyage à Paris était salué de cris de joie. C'est à Paris, en effet, qu'il avait toute sa famille; c'est là que ses parents, accourus aux premières nouvelles de sa maladie, ont ramené son corps. L'Université de Toulouse toute entière a conduit son cercueil à la gare, où d'émouvants discours ont été prononcés par M. le Doyen Sabatier, au nom de la Faculté des Sciences, et par M. Dürrbach, au nom de la Faculté des Lettres. Nous tenons à rendre ici un dernier hommage à la mémoire du savant si prématurément disparu.

A. Buhl (Toulouse) et E. Turrière (Alençon).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Jubilé Teubner.* Le 11 février 1911, la Maison Teubner, à Leipzig, a achevé le centième anniversaire de son existence. Elle a tenu à célébrer son centenaire par une cérémonie, qui a eu lieu le 3 mars et à laquelle elle avait convié un grand nombre de savants. La fête consistait en une réunion, à 10 heures du matin, à la Maison Teubner, suivie d'un déjeuner, puis en une séance solennelle au Nouveau Théâtre, à 2 heures de l'après-midi, et enfin en un grand banquet qui a eu lieu, le soir, au Palmengarten. De nombreuses adresses, émanant de sociétés savantes, furent présentées à la séance.

A l'occasion du centenaire, il a été publié une belle Notice historique, rédigée par M. le Dr Fréd. Schulze. Elle débute par une biographie du fondateur de la Maison, Bénédict-Gotth. Teubner, né le 16 juin 1784 et décédé le 21 janvier 1856.

Nous tenons à renouveler ici aux éditeurs, et tout spécialement à M. le Dr Alf. Ackermann-Teubner, nos vives félicitations et nos meilleurs vœux pour la prospérité de leur maison. H. F.

Cours de Stéréophotogrammétrie. Un cours de vacances, consacré à la photogrammétrie, aura lieu à Iéna, à la Fondation Zeiss, du 24 au 29 avril 1911. Les inscriptions et demandes de rensei-

gnements doivent être adressées à M. le Dr C. Pulfrich, Kriegerstrasse, 8, Iéna.

La *Société mathématique allemande* se réunira à Carlsruhe, du 24 au 30 septembre 1911, en même temps que les naturalistes et les médecins allemands. Les séances de la section I, « Mathématiques », seront dirigées par M. le prof. P. Stäckel, M. Disteli et K. Heun, et celles de la section XV, « Enseignement des sciences mathématiques et naturelles », par M. P. Treutlein.

— M. F. Hartogs, privat-docent, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Munich.

Belgique. — Une exposition universelle et internationale s'ouvrira à Gand, en 1913. Le Comité apporte des soins tout parculiers à l'organisation de la section des sciences et de l'enseignement.

France. — M. Zoretti, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble, est nommé chargé de cours à la Faculté des Sciences de Caen.

M. Chazy est nommé maître de conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble.

M. Carrus, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, est nommé professeur de mathématiques à la Faculté d'Alger.

Hongrie. — M. L. Schlesinger, professeur à l'Université de Klausenbourg, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Budapest.

Iles britanniques. — M. P. J. Heawood est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Durham.

M. R. A. Sampson est nommé astronome royal de l'Ecosse et professeur à l'Université d'Edimbourg.

M. le Prof. A. E. H. Love a obtenu le *Adam's Prize* pour son Essai « Quelques problèmes de Géodynamiques ».

M. H. J. Priestley est nommé professeur de Mathématiques et de Physique à l'Université de Queensland.

Italie. — M. Max Nœther, professeur à l'Université d'Erlangen, a été élu associé étranger de la Société italienne des Sciences (dite des XL).

M. Léonida Tonelli a été admis en qualité de privat-docent de calcul infinitésimal à l'Université de Bologne.

Nécrologie.

M. Gustave Leveau, astronome titulaire à l'Observatoire de Paris, est décédé le 10 janvier 1911, à l'âge de 70 ans.

M. C. Rozé, répétiteur d'astronomie à l'Ecole Polytechnique de Paris, vient de mourir à l'âge de 70 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales[1].
(2e article.)

ALLEMAGNE

L'enseignement mathématique dans les écoles techniques moyennes pour l'industrie mécanique.

Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie[2], von Dr. H. Grünbaum. — Le tome IV des *Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland* est consacré aux écoles techniques. Dans la préface, M. P. Stäckel, qui est chargé de la direction du volume, met en relief les points qui caractérisent la situation des écoles professionnelles par rapport à l'enseignement général.

Ce premier fascicule traite des écoles techniques moyennes pour l'industrie mécanique. Ces établissements sont moins connus du grand public et des mathématiciens que les écoles d'enseignement général. C'est pourquoi il a paru nécessaire de donner un aperçu historique succinct de leur genèse et de leur développement, ainsi que de leurs plans d'études.

La partie la plus ardue de la rédaction a été le chapitre consacré à la matière et à la méthode de l'enseignement mathématique. Cela tient au fait que les écoles en question traversent une période de transformation, d'où elles sortiront probablement avec un caractère technique encore plus prononcé.

Le sujet a été volontairement borné aux mathématiques générales; un second fascicule sera consacré aux mathématiques appliquées (géométrie descriptive, mécanique, méthodes graphiques).

Le chapitre I présente une étude sur le développement de l'enseignement technique moyen en Allemagne. L'auteur constate que si l'enseignement supérieur des branches techniques possède une organisation à peu près uniforme, il n'en est pas de même des écoles moyennes et inférieures. Tant au point de vue de l'organisation et du but poursuivi qu'à celui des conditions d'admission et des méthodes d'enseignement, il existe des différences énormes. Aussi ne peut-il être question d'une étude complète, mais seulement

[1] Voir l'*Enseign. mathém.* du 15 janvier 1911, p. 42-71.
[2] 1 fascicule de 99 pages; 2 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig. — Nous devons ce compte rendu à M. E. Steinmann (Genève).

d'un choix de quelques établissements mettant à la base de leur enseignement une certaine préparation en mathématiques et en sciences naturelles.

En laissant de côté les écoles spécialisées sur une seule branche (écoles de mines, etc.. etc.), on peut distinguer les écoles *inférieures*, qui se bornent à donner des faits et des règles de travail, et les écoles *moyennes*, où l'on poursuit plus essentiellement la culture scientifique, la démonstration des faits. Pour ces dernières, la technique est une science naturelle appliquée. Comme les écoles inférieures feront l'objet d'un rapport spécial, il ne sera question dans la suite que des écoles moyennes.

Ces dernières sont nées vers 1820, sous l'impulsion de Ch.-W. Beuth. Réorganisées en 1850 et en 1870, c'est en 1877 que quelques-unes évoluèrent en *écoles réales*, donnant une instruction générale, les autres formant des *écoles industrielles* proprement dites, comprenant quatre semestres d'études. Dès 1889, la Société des Ingénieurs allemands (V. D. I.) commence à s'occuper de ces dernières et leur indique comme but la formation d'employés techniques et de conducteurs de travaux, dont l'industrie a un besoin constant. L'admission est accordée à tous ceux qui possèdent le droit au volontariat d'un an, et qui ont fait un stage pratique de deux ans dans l'industrie. Dès 1890, onze écoles ont été réorganisées en Prusse d'après ces idées et portent le nom de « Höhere Maschinenbauschulen ».

En 1908, une conférence convoquée par le V. D. I., aboutit à la création d'un « Comité de l'enseignement technique », qui s'aboucha avec le « Comité de l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles » et décida de proposer l'adjonction d'un cinquième semestre, afin de renforcer la préparation professionnelle dans ces écoles. Cette adjonction est maintenant faite et entrera en vigueur en 1911.

Le chapitre se termine par quelques mots sur les écoles de même rang dans les autres Etats de l'empire, ainsi que sur les écoles privées, dont quelques-unes se distinguent par des titres ronflants et une organisation fort médiocre.

Le Chapitre II traite principalement des plans d'études des 18 écoles gouvernementales (environ 900 élèves) et de 22 écoles municipales ou privées (environ 5000 élèves).

Voici le programme officiel des onze écoles prussiennes, accompli jusqu'ici en 4 semestres :

Mathématiques, 18 heures par semaine, réparties sur quatre semestres; physique et chimie, 10; mécanique générale, 17; mécanique appliquée, 43; électrotechnique, 9; construction du bâtiment, 13; géométrie descriptive, 10; dessin de construction, 38; laboratoires, 8; enseignement commercial, 2; hygiène et premiers soins, 1; ce qui donne un total de 169 heures par semaine sur 4 semestres, soit 42 heures par semaine.

L'école préparatoire, de 2 semestres, comprend : 14 h. d'allemand, 36 h. de mathématiques, 8 h. de physique et chimie, 22 h. de dessin, soit un total de 80 heures par semaine sur 2 semestres, soit 40 heures par semaine.

Les écoles de même rang, en dehors de la Prusse, ont un programme analogue.

Il est exigé des maîtres des études universitaires complètes et un stage pratique de trois ans dans l'industrie.

Les « Technikums », qui comprennent les établissements municipaux ou privés, ont des programmes d'études plus étendus et des exigences moins grandes pour l'admission. Ils ont, en général, un très grand succès, dû à

l'élasticité de leur programme, qui s'adapte très rapidement aux évolutions de l'industrie, et qui sépare, presque au début des études, les spécialistes de la mécanique de ceux de l'électricité. L'enseignement dure 5 semestres.

Il faut faire une place à part à l'Académie industrielle de Chemnitz et au Friederichs-Polytechnikum de Cöthen qui ont un but plus élevé, atteint en 7 semestres d'étude.

Le chapitre III s'occupe spécialement de l'enseignement mathématique. L'auteur caractérise la différence entre les écoles préparatoires à l'université et les écoles techniques moyennes : les premières sont des écoles d'éducation, d'*humanités;* les autres, des écoles *professionnelles.*

Les établissements d'enseignement général traitent les mathématiques en branche *éducative*, les écoles professionnelles en font une science *accessoire*, destinée à résoudre les problèmes techniques. Le *savoir* doit y faire place au *pouvoir*. Les applications sont le but suprême à poursuivre. L'enseignement des mathématiques, des sciences naturelles et des branches techniques s'y fait simultanément.

Les faits mathématiques principaux doivent être énoncés et démontrés, en écartant systématiquement tous les sujets qui n'ont pas d'application technique, tels que la trigonométrie sphérique, la géométrie synthétique, etc. L'expérience montre que les matières dont l'élève n'a pas reçu la démonstration ne restent pas dans sa mémoire et qu'il reste impuissant au moment de les appliquer.

Les exercices doivent être nombreux, afin d'amener l'élève à une certaine habileté technique ; il convient d'exclure le plus possible les calculs d'application d'une certaine règle, mais de donner des travaux ayant un sens pratique et amenant peu à peu l'élève à reconnaître la dépendance mutuelle des données et du résultat. Ne pas insister trop sur les chiffrages dont les résultats existent dans la pratique sous forme de tableaux.

Si l'on ne peut pas complètement suppprimer la mémorisation de certaines règles, il convient cependant de restreindre cette mémorisation au strict nécessaire, et de revenir toujours aux définitions fondamentales, qui permettent de retrouver aisément les règles particulières.

Quant au choix et à la limitation des sujets traités dans le cours, le critère doit être celui de l'application pratique. A ce titre, les calculs les plus simples, les constructions géométriques les plus élémentaires doivent être exercées aussi bien que les parties soit-disant supérieures des mathématiques, tels que les éléments du calcul infinitésimal, dont l'emploi est courant dans les publications techniques.

Le chapitre continue par un programme normal détaillé des études mathématiques dans les écoles techniques moyennes, tel qu'il résulte des expériences faites et des divers programmes actuellement en vigueur. Soit dit en passant, ce programme est identique avec celui qui a été appliqué depuis sa fondation, il y a plus de dix ans, à l'Ecole des Arts et Métiers de Genève. Un point, cependant, sur lequel il nous semble que l'auteur aurait dû insister, est l'emploi systématique du calcul abrégé et des tables de calculs tout faits que l'on emploie couramment en pratique (tables de carrés, cubes, racines, inverses, circonférences et cercles).

Suit une liste de questions posées lors des examens finaux et un paragraphe consacré à la forme à donner à l'enseignement. Les longs exposés oraux doivent être évités dans la mesure du possible. Le mode heuristique, par questions et réponses, avec notation immédiate par l'élève des résultats

acquis, est celui qui donne les meilleurs résultats. Un recueil d'exercices gradués rend de grands services. Les exercices d'application doivent être faits en classe, en circulant dans les bancs, le maître peut se rendre compte si tout a été compris et redresser les erreurs

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

La préparation des maîtres de mathématiques.

The preparation of College and University instructors in mathematics, provisional report of the american subcommittee of the international commission on the teaching of mathematics [1]. — L'auteur de ce rapport indique tout d'abord dans quelles conditions s'effectuait autrefois la préparation des maîtres, avant l'extraordinaire développement mathématique de ces dernières années. C'est en 1880 que l'Université de Harvard eut l'idée d'envoyer en Allemagne des étudiants en mathématiques afin qu'ils se rendissent compte des méthodes d'enseignement qui y étaient en vigueur. C'est alors que les mathématiciens américains s'aperçurent de l'avance qu'avaient sur eux les pays continentaux et ce fut l'origine d'un redoublement d'activité de leur part et du rapide développement scientifique dont nous parlons.

Avant 1880, le champ des mathématiques enseignées se réduisait à très peu de chose : le calcul, l'astronomie sphérique et pratique, les sections coniques de Salmon et un ou deux autres sujets. On n'exigeait guère plus du maître que ce qu'il avait à enseigner et il pouvait commencer son enseignement immédiatement après avoir obtenu ses grades, sans préparation ultérieure. Dans l'enseignement, le système récitatif était en vigueur, le travail était routinier, on ne developpait pas suffisamment l'initiative des élèves, l'intuition géométrique et analytique, la rigueur, la puissance de généralisation.

Après que les mathématiciens américains eurent pris contact avec ceux du continent, ces conditions désavantageuses se transformèrent rapidement et l'on devint plus exigeant. Ces transformations se manifestèrent entre autre par un remaniement des programmes ; une quantité considérable de nouveaux sujets furent introduits ; par exemple, le programme des cours pour gradués est aussi vaste et peut-être même plus vaste qu'en Allemagne. Des changements s'introduisirent également dans la méthode d'enseignement. Le système récitatif est moins employé, on lui substitue l'enseignement par cours, discussions, etc.

Le nombre des élèves des classes de mathématiques est relativement restreint; on y trouve principalement des étudiants se destinant à l'enseignement des écoles supérieures et collèges et quelques autres se proposant de devenir physiciens, ingénieurs, etc.

L'auteur aborde ensuite plus spécialement la préparation des maîtres. L'introduction du système d'enseignement par cours (*lecture method*) s'est faite d'une façon si rapide qu'il n'a pas été possible de coordonner les anciennes et les nouvelles méthodes en un système d'éducation bien proportionné et consistant. Il en résulte deux dangers pour les mathématiciens.

---

[1] *Bulletin of the American Commissioners*, n° 3. — Extrait du *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 17, n° 2, nov. 1910. — Résumé par J. P. Dumur (Genève).

D'une part on consacre une trop grande partie de l'activité scolaire aux recherches mathématiques faites parfois sur des sujets ne présentant que peu ou même pas de valeur intrinsèque, cela au détriment de la forme et de la clarté. D'autre part, le professeur est absorbé par son intérêt personnel pour l'étudiant et par le côté pédagogique et administratif de son travail, ce qui l'empêche de progresser et d'élargir son érudition.

C'est encore la coutume d'habituer les débutants à l'enseignement en les plaçant comme maîtres dans les classes élémentaires. Ce système qui présente certains avantages n'est pas cependant sans inconvénients. Le jeune maître est souvent chargé d'une quinzaine d'heures et même plus, sans parler de la correction des cahiers. Cet excès de travail routinier ne lui laisse pas le temps nécessaire pour continuer son travail d'étude et d'investigation et empêche la manifestation de sa vie intellectuelle. Un autre fait regrettable, c'est que les maîtres de mathématiques ont très généralement en sus de leur enseignement une charge administrative qui leur prend beaucoup de temps.

En ce qui concerne la méthode de préparation des maîtres, en outre des cours proprement dits, il faut citer les exercices pratiques, le séminaire et le « quiz ». Les exercices pratiques n'occupent pas encore, aux États-Unis, la place qu'ils devraient avoir; l'initiative individuelle n'est pas stimulée comme elle le devrait, or il n'y a rien de tel que les exercices pratiques pour activer cette stimulation, c'est pourquoi il faut en recommander un usage plus fréquent. Le « quiz » consiste en une revue du contenu d'une série de conférences données récemment, cette revue se faisant sous forme de discussion et échange de questions et réponses entre professeur et étudiant. Entre autres avantages, le « quiz » permet au maître d'entrer en contact avec l'étudiant, on devrait le pratiquer également beaucoup plus fréquemment. Les séminaires et pro-séminaires sont des méthodes allemandes adaptées au système américain. Au séminaire, l'étudiant expose lui-même un sujet et l'on s'entretient ensuite sur certaines questions concernant son exposition. Citons aussi les clubs de mathématiciens qui forment le point de ralliement des professeurs et étudiants gradués qui s'y réunissent pour discuter ou rapporter sur différents sujets. Enfin, dans beaucoup d'universités, les places d'assistants ou d'agrégés ont été créées non seulement pour renforcer le corps enseignant, mais aussi en vue de la préparation des maîtres.

Durant ces dernières années, on a reconnu l'importance du côté pédagogique de l'enseignement et l'on a introduit, dans les grandes universités et dans beaucoup de collèges, des cours spéciaux pour maîtres (*Teacher's Courses*). Dans quelques universités, ces cours spéciaux ont été séparés du corps principal et organisés séparément en un collège des maîtres (*Teacher's College*), comme aux universités de Columbia, Chicago, Cincinnati, etc. Cette préparation des maîtres est d'une grande importance, non seulement pour ceux qui se destinent à l'enseignement des classes élémentaires, mais aussi pour ceux qui professeront aux collèges et universités. En ce qui concerne tout spécialement les mathématiques, il ne suffit pas que le professeur connaisse son sujet, il faut encore qu'il sache le présenter d'une façon compréhensible. Jusqu'à présent, cependant, l'influence des *teachers' colleges* sur la préparation des maîtres des collèges supérieurs et universités a été très minime, on n'a pas encore institué des cours qui auraient spécialement en vue cette préparation.

En ce qui concerne les grades, il existe deux sortes de titres aux États-Unis, celui de maître et celui de docteur (*master's* et *doctor's degrees*). L'au-

teur du présent rapport s'élève contre cette différentiation, beaucoup d'étudiants se contentant du premier grade, alors qu'ils seraient capables de poursuivre plus loin leurs études. Il est à désirer également que ceux qui ont obtenu le grade de docteur ne s'en tiennent pas là, mais qu'ils continuent à élargir et à approfondir leurs connaissances ; car, il ne faut pas oublier que le meilleur âge pour la préparation d'un travail intellectuel d'ordre élevé est entre vingt et trente ou trente-cinq ans au plus. Mais, pour cela, il ne faudrait pas charger le jeune instructeur d'un nombre trop considérable d'heures de leçons, corrections, etc.

Relativement aux places de maîtres de mathématiques, l'auteur constate que les forces disponibles sont loin de satisfaire aux exigences actuelles. La cause de cette pénurie doit être recherchée tout d'abord dans le peu d'élévation des salaires, étant donné les conditions de la vie sociale en Amérique. Ensuite, la carrière d'ingénieur sourit davantage au mathématicien que celle de maître, car beaucoup pensent qu'un homme d'action vaut mieux qu'un homme d'idées. Cette seconde raison concerne plus spécialement les mathématiques appliquées, qui devraient avoir une place plus importante au point de vue de l'enseignement que celle qu'elles ont occupée jusqu'à présent. Il serait avantageux, semble-t-il, que le mathématicien et le physicien reçussent un enseignement commun pendant une plus longue période.

On pourrait souhaiter également qu'il y eût une plus grande coopération entre le maître expérimenté et celui qui débute dans son enseignement. L'auteur termine son rapport, en formulant le vœu qu'on distingue, à l'avenir, le mathématicien capable d'un bon enseignement de celui qui est doué du talent d'investigation, les deux qualités n'étant pas toujours réunies.

AUTRICHE

Les Mathématiques dans l'enseignement primaire

Der mathematische Unterricht an den Volks u. Bürgerschulen[1], von Schulrat Konrad Kraus. — Cette étude se compose de deux parties. Dans la première, M. Kraus expose l'état actuel de l'enseignement mathématique dans les écoles populaires et les écoles dites bourgeoises (primaires supérieures) en Autriche ; dans la seconde, il étudies les tendauce modernes de cet enseignement et préconise quelques réformes.

Ire Partie. — Les écoles primaires autrichiennes (6 à 14 ans révolus) se divisent en deux grandes catégories ou types : les écoles populaires et les écoles bourgeoises.

Toutes deux ont pour but de développer les facultés de l'enfant en vue des nécessités de la vie pratique. Dans les écoles bourgeoises on tient compte particulièrement de l'industrie de la contrée et de son genre d'agriculture. Les sexes ne sont pas toujours séparés dans les écoles populaires.

Une année supplémentaire (de 14 à 15 ans) est ajoutée à ces écoles sous forme de *cours supplémentaire* à tendance toute pratique.

Voici d'ailleurs une division plus complète

1° Écoles populaires (6 à 14 ans révolus) pour les deux sexes

2° Écoles populaires de 5 classes (6 à 11 ans) pour les deux sexes

[1] *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich.* Heft 1. p. 61-[illegible]. — Résumé par M. J. Peter (Genève).

3° Écoles bourgeoises de garçons (11 à 14 ans);

4° Écoles bourgeoises de filles (11 à 14 ans);

5° Cours complémentaires (14 à 15 ans), sexes séparés.

Les programmes d'enseignement sont imposés par décret ministériel.

Dans les *écoles populaires*, les enfants doivent être familiarisés avec l'arithmétique élémentaire, soit les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers et décimaux, le calcul avec des fractions ordinaires simples, les proportions, les règles de mélange et d'alliage et même la racine carrée. La géométrie est surtout intuitive : connaissance des figures, des surfaces et des corps géométriques simples.

L'enseignement de la géométrie comporte celui du dessin linéaire et à main levée. La géométrie et l'arithmétique sont unies dans les degrés supérieurs, dans le calcul des longueurs, des surfaces et des volumes. On applique les notions de mathématiques aux calculs industriels ou agricoles simples et aux éléments de la tenue des livres. Le but visé est la sûreté et le fini dans la résolution orale ou écrite des problèmes pratiques.

Dans les écoles populaires à 5 classes, le programme est restreint à la connaissance des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, aux éléments de planimétrie et de dessin (19 heures pour les garçons, 16 pour les filles).

Le programme des *écoles bourgeoises* de garçons est un peu moins restreint que celui des écoles populaires. En effet (programme de 1907), on y voit figurer les puissances, les racines cubiques, les éléments du calcul littéral, les équations du premier degré à une inconnue simple, les problèmes d'intérêt, de sociétés et des notions d'arithmétique commerciale (12 heures par semaine). La géométrie est enseignée un peu différemment que dans les écoles bourgeoises; on ne se borne pas à la géométrie intuitive, mais on commence la géométrie rationnelle, on aborde les théorèmes, les coniques sont étudiées d'une façon élémentaire ainsi que les courbes usuelles que les élèves peuvent rencontrer plus tard dans la pratique de leur industrie. Outre le dessin géométrique (géométral, élévation, profil, coupe), on enseigne le dessin géométrique ornemental et le dessin des machines (9 heures de géométrie et dessin géométrique).

Le programme de l'enseignement mathématique dans les écoles bourgeoises de filles (9 heures d'arithmétique et 3 heures de géométrie) est à peu de chose près celui des écoles populaires, sauf qu'on y a ajouté des compléments sur la tenue des livres et l'arithmétique appliquée aux besoins domestiques, et qu'en géométrie on donne une idée sommaire de l'Ellipse. On s'attache surtout au dessin géométrique ornemental s'appliquant aux ouvrages féminins.

Les *cours complémentaires* (de 14 à 15 ans) servent de raccordement avec les écoles supérieures. On développe le programme de la dernière année des écoles bourgeoises, en particulier le calcul littéral. On apprend à résoudre les équations simples du deuxième degré.

Aucune méthode spéciale d'enseignement n'est imposée, pas plus dans les écoles populaires que dans les écoles bourgeoises. Autrefois régnaient les méthodes purement mécaniques et formelles qui ne s'adressaient qu'à la mémoire. Actuellement, on tend à éduquer la pensée par la logique des démonstrations; on s'efforce davantage à intéresser l'enfant.

Il est de toute importance que l'enseignement mathématique soit homogène, c'est pourquoi le plan d'études est imposé par une loi.

On peut classer les différentes façons d'enseigner en trois méthodes actuellement régnantes. La première, la plus ancienne, se base sur cette idée que tout calcul repose sur la numération. (J. Strehl, Fr. Moenik). La deuxième, qui a un grand succès en Autriche, procède par monographies (Grubes, promoteur, suivi par J. Nagel, Ambros, Kopetzky, Streng). Le calcul entier est alors enseigné au moyen des dix premiers nombres. Par exemple, le nombre 2 servira à établir la méthode pour enseigner les opérations sur les nombres de 20 à 30, le nombre 3 pour les nombres de 30 à 40 et ainsi de suite.

Le premier qui délaissa les deux méthodes régnantes fut H. Breutigam (1878) qui emploie comme moyen unique d'enseignement du calcul élémentaire les boîtes à calcul de Tillich.

La pauvreté de la méthode monographique conduisit quelques pédagogues à inaugurer une nouvelle méthode dans laquelle le nombre n'est plus considéré comme un individu isolé, mais plutôt comme le dernier terme d'une série commençant par l'unité (Kraus, Habernal Streng, Wintersperger, Breier, Legerer). Il restait encore un progrès à faire; J. Nagel et A. Kollitsch, suivis de J. Gauby, Kolar, Kraus-Habernal l'ont accompli. On abandonna la méthode monographique dans les degrés inférieurs pour revenir à la méthode basée sur la numération, méthode qui a toujours été conservée dans les degrés moyens.

D'après le programme, les fractions décimales doivent être enseignées avant les fractions ordinaires. On considérait alors les fractions décimales comme une extension des nombres entiers, on ne respectait pas ainsi leur qualité de fractions. Pour parer à cet inconvénient, MM. Kraus et Habernal relient intimement les fractions décimales aux sous-multiples des unités du système métrique. La nécessité conduisit donc ces pédagogues à une méthode de calcul que l'on pourrait appeler en français objective dans le sens littéral du mot (Sachrechen-methode), c'est-à-dire qui rattache immédiatement les notions mathématiques abstraites à des objets concrets. On fortifie ensuite ces notions par des calculs pratiques.

Pour la géométrie dans les degrés inférieurs, on se borne au seul dessin sans définition abstraite; dans les degrés moyens, on enseigne les formes géométriques au moyen du dessin d'observation à main libre et du dessin géométrique. On cherche par ce moyen à familiariser l'élève avec la représentation des corps dans l'espace. Dans les degrés supérieurs, on relie la géométrie à l'arithmétique par le calcul numérique (Manuel méthodique de C. Kraus). On employait autrefois la méthode dite synthétique qui procédait du point à la ligne, de la ligne à la surface et de la surface au volume. (Moenik, Halbgebauer, Napravnik, Wortner, Jahne, Barbisch). D'après la méthode analytique, au contraire, on considère un corps et on étudie les surfaces et les lignes qu'il comporte. (Kleinschnicht, Napravnik, Wenghart).

On remarque que la méthode analytique est employée de préférence dans les écoles de filles et la méthode synthétique dans les écoles de garçons. Mais, d'autre part, J. Pfau crée une géométrie qui présente des analogies avec la méthode de calcul que nous avons qualifiée d'objective, une sorte de géométrie matérielle. C'est dans cette direction que, suivant l'auteur de l'article, se trouve le progrès. Parmi les moyens d'enseignement les plus recommandés sont les moyens visuels. On se sert de l'appareil à calculer russe avec 10, 20, 100 boules, des boîtes de Tillich avec 100 prismes,

des bâtons à calculer de Posner, des 100 cubes de bois de l'appareil de Schelinsky. M. Kraus trouve les faisceaux de bâtonnets de 10 ou 100 unités plus pratiques. Les moyens graphiques sont également en faveur (image des chiffres, l'argent, le papier monnaie, les timbres, les poids et mesures). On recommande surtout de ne pas abuser des notations symboliques.

Autrefois on enseignait la géométrie uniquement à l'aide du tableau noir et de la craie, maintenant le maître a à sa disposition des modèles en carton, en bois ou en zinc, des modèles de mécanisme et des instruments d'arpentage. On utilise également les bandes de papier de couleur pour les ornements géométriques.

En fait de manuels on n'emploie, dans les écoles populaires, que des recueils d'exercices gradués. Dans les écoles bourgeoises, par contre, on emploie les manuels méthodiques de calcul ou de géométrie concurremment avec les recueils d'exercices. Les livres qui s'adressent purement à la mémoire sont proscrits. Parmi les manuels, on peut citer ceux de F. v. Mocnik, H. Halbgebauer, R. Neumann, J. Nagel, P. Legerer, J. Nitter, F. Hauptmann et F. Villicus-Schiebel. Les recueils d'exercices employés sont ceux de J. Ambros-Kopetzky et de J. Nagel.

L'enseignement mathématique est appliqué à des exercices théoriques tirés de la vie pratique, de l'industrie spéciale à la région où se trouve l'école. Les exercices pratiques consistent surtout en mesures de longueur, de surface, de volumes, arpentage et représentation des corps au moyen de réseaux.

Le corps enseignant autrichien est en général très bien préparé à la tâche qui lui incombe. Les Ecoles normales délivrent un certificat de maturité pédagogique qui procure une place de sous-maître ou de maître. Après une pratique d'au moins deux ans et un examen, le candidat obtient une place définitive dans une école populaire. Pour obtenir une place dans les écoles bourgeoises, il faut avoir pratiqué pendant 3 ans dans les écoles populaires et passer ensuite un examen satisfaisant.

IIme Partie. — Dans la seconde partie de son travail, M. C. Kraus critique surtout les méthodes d'enseignement, il expose les tendances de l'enseignement moderne en Autriche et il se fait l'écho des desiderata des pédagogues progressistes. En particulier, la revision du programme des écoles populaires est souhaitable et M. Kraus sous-entend, je crois, que c'est surtout pour rendre plus effective l'application du programme. De même, le cours complémentaire ajouté aux écoles bourgeoises, dans le but de combler les lacunes qui existent entre l'enseignement donné dans ces écoles et les écoles supérieures n'a pas rendu les services qu'on en attendait, aussi a-t-on proposé d'étendre plutôt l'enseignement des écoles bourgeoises à 4 ans (10 ans à 14 ans), au lieu de 3 ans d'études. D'autres pensent qu'il faudrait les transformer en écoles moyennes supérieures.

La question de la co-éducation des sexes n'a pas été souvent agitée et ne semble pas préoccuper les pédagogues.

M. Kraus trouve qu'il n'est pas suffisant que les élèves connaissent les corps et les surfaces géométriques et qu'ils sachent en calculer les éléments, il faudrait qu'ils sachent les représenter. De même, il faudrait étendre les connaissances des élèves dans le calcul littéral.

Le calcul avec fractions ordinaires n'ayant pas une très grande importance pratique, il faut en restreindre l'usage aux fractions à faible dénominateur. Les rapports et les proportions devraient, au contraire, avoir une place plus

importante ; on devra les appliquer aux calculs d'alliages, de mélanges, et non pas en faire des calculs théoriques vides de sens. On devrait supprimer l'emploi de la règle conjointe qui n'est d'aucune utilité. D'autre part, on devrait donner aux élèves une idée de la notion de fonction (par exemple, au moyen des grandeurs proportionnelles). On pourrait, dans les degrés supérieurs des écoles bourgeoises, faire trouver des fonctions empiriques. Les calculs d'assurance, d'arithmétique commerciale ont droit à une plus grande place dans l'enseignement. La représentation graphique des fonctions aurait cet avantage de relier encore plus intimement qu'on ne le fait l'arithmétique et la géométrie. Quand on aura introduit la géométrie descriptive et représentative, on pourra alors laisser tomber cette ancienne division de la géométrie en planimétrie et stéréométrie. Enfin, dans les cours supplémentaires, il serait bon de donner aux élèves des notions pratiques d'arpentage et de triangulation.

D'après M. Kraus il n'y a pas lieu de changer le système d'épreuves et d'examens actuellement en vigueur. On a abandonné l'idée d'instituer des examens finaux, car ce système, appliqué dans les écoles supérieures, est loin d'être satisfaisant.

Quant aux méthodes, on s'accorde généralement à trouver que la méthode heuristique est la meilleure. Il faut chercher à appliquer ce précepte de Pestalozzi : « L'activité personnelle seule forme une instruction et non pas seulement l'étude mnémonique ». M. Kraus est d'avis qu'il faut faciliter la recherche par le dessin (Kraus-Habernal, 1er Manuel de calcul, édition B). Il insiste particulièrement sur les avantages de l'enseignement géométrique basé sur la représentation des corps et les exemples pris dans la vie économique, commerciale ou industrielle.

Parlant ensuite des relations des différentes branches des mathématiques entre elles, M. Kraus pense que dans les écoles populaires, il faut séparer davantage la géométrie du dessin et la rapprocher plutôt de l'arithmétique et que dans les écoles bourgeoises il faut réunir dans la main du même maître l'enseignement des mathématiques et celui du dessin et ceci pour sauvegarder l'homogénéité de l'enseignement mathématique.

On a déjà vu l'importance du dessin dans l'enseignement mathématique. M. Kraus souhaite qu'on se rapproche davantage de la nature et que l'on fasse du dessin d'après les corps usuels. Dans les degrés supérieurs on devrait abandonner la perspective cavalière pour adopter la perspective normale. M. Kraus applique le dessin géométrique et représentatif aux levés de plans, à la triangulation, à la détermination des situations (plans d'irrigation, de construction, etc.), alors que jusqu'à présent, dans ce domaine, on se bornait au calcul des prix de revient, des bénéfices et de la comptabilité. La physique également deviendra plus attrayante lorsque l'élève saura faire des mesures de longueur, d'angles, de surfaces, de densité, de poids, etc. De même, en géographie, les cartes cesseront d'être abstraites pour les élèves quand ils sauront lever le plan de leur classe, de leur bâtiment d'école ou même d'un terrain. Dans le degré supérieur on pourrait même faire quelques observations astronomiques élémentaires et appliquer ainsi les connaissances acquises sur les angles sphériques. Poussant son principe de la pratique jusqu'aux conséquences extrêmes M. Kraus propose que l'on prenne des exercices de calcul dans le domaine économique et social, par exemple, l'offre et la demande, le crédit et l'emprunt, l'impot, le cadastre, les caisses d'épargne, les assurances, etc.

Le préjugé que beaucoup d'élèves nourrissent contre les mathématiques proviendrait, pense M. Kraus, de ce qu'on demande à toutes les intelligences ce que seules quelques intelligences peuvent fournir. Quand, dans le courant de la vie les règles mécaniques et mnémoniques d'un enseignement purement formel sont oubliées, l'esprit est incapable de les retrouver, tandis que si l'intelligence est en possession d'une méthode rationnelle, si elle a été éduquée, elle pourra plus facilement résoudre les difficultés. Il faut pour cela que la marche de l'enseignement soit réglée sur les élèves eux-mêmes, de façon qu'aucune lacune ne subsiste dans leur instruction.

Extrait de Bibliographie. — *a) Manuels méthodiques* — J. Ambros, 6 vol. 3e édit. — H. Bræutigam, 2e édit., 1896. — J. Breier, 1908. — E. Fitzga, 1897 et 1898. — K. Kraus, 1895. 2e édit., 1906. — Kraus-Habernal, 2e édit., 1908. — Fr. Mocnik, 1880, revu par A. Kollitsch, 1903. — J. Nagel, 1902. — K. Schubert, 1879. — K. Streng-Zuckersdorser, 2 vol., 3e édit., 1908.

b) Livres de calcul pour les écoles populaires. — J. Ambros-F. Kopetzky, 5 cahiers, 15 édit. — J. Breier, 1908. — Kraus-Habernal, 1901 et édition B, 1909. — P. Legerer, 3 parties, 1903. — F. v. Mocnik, revu par Kraus et Habernal. — J. Nagel. — K. Streng-Wintersperger, 6 cahiers, 1905.

c) Livres d'études pour écoles bourgeoises. — J. Ambros-Kopetzky, 3 cahiers. — Jahne-Barbisch, 3 degrés. — P. Legerer, 3 parties. — F. v. Mocnik, revu par H. Halbgebauer et R. Neumann, dessin géométrique, 3 cahiers. — J. Nagel, 3 cahiers. — F. Napravnik. — J. Nittner. — F. Villicus-E. Schiebel. — F. Wortner.

Les écoles techniques supérieures.

Der mathem. Unterricht an den technischen Hochschulen[1], von E. Czuber. — En vue de la rédaction de ce rapport, l'auteur a adressé un questionnaire aux professeurs des différentes sections des écoles techniques supérieures d'Autriche. Dans son travail, il a surtout pris en considération l'école supérieure de Vienne, qui, du reste, peut servir de modèle. Les idées de réforme et les souhaits formulés dans les réponses au sujet de l'enseignement technique ont été particulièrement signalés.

Dans un premier chapitre, l'auteur nous parle de l'organisation générale des écoles supérieures techniques et de leur division en sections qui rappellent un peu les facultés universitaires, mais qui en diffèrent cependant sensiblement au point de vue de leur organisation.

Les mathématiques figurent dans les programmes de toutes ces sections, elles forment, pour ainsi dire, leur branche de ralliement, le terrain sur lequel les représentants de ces diverses sections peuvent s'entendre. Considérées à ce point de vue-là, les mathématiques jouent un rôle plus important dans les écoles techniques supérieures qu'à l'université où elles ne sont représentées que dans une seule faculté.

L'Autriche possède sept écoles techniques supérieures, qui sont les suivantes (on a indiqué la langue employée dans les cours et la fréquentation des semestres d'hiver et d'été de l'année 1906-1907) :

---

[1] *Berichte über den mathem. Unterricht in Œsterreich.* Heft 5, 39 p. — Résumé par M. J.-P. Dumur (Genève).

Vienne (allemand : 2983-2748)
Graz (allemand : 675-588)
Prague (allemand : 957-888)
Prague (bohème : 2470-2300)
Brünn (allemand : 642-642)
Brünn (bohème : 400-343)
Lemberg (polonais : 1610-1339)

Pour être admis, il faut présenter le diplôme de maturité d'un des établissements : « Gymnasium, Realschule ou Realgymnasium ».

Dans un deuxième chapitre, l'auteur aborde l'enseignement mathématique proprement dit, son but et son étendue. Dans les écoles techniques supérieures, le principe de la liberté de l'enseignement est en vigueur comme à l'université. Cependant, une explication est nécessaire. L'étudiant est bien libre, théoriquement, de choisir ses cours à sa fantaisie et de suivre dans un ordre quelconque ceux qui sont exigés pour l'obtention d'un grade ; mais en réalité les choses se passent autrement et l'on recommande aux étudiants de suivre des plans d'étude où ils trouvent des indications précises sur les cours, l'ordre dans lequel il faut les suivre et le nombre de semestres qu'ils doivent consacrer à leurs études.

En ce qui concerne les mathématiques pures, il faut distinguer deux cours principaux, l'un de quatre semestres pour les ingénieurs et les étudiants pour la construction des machines, l'autre de deux semestres pour les sections de construction *(Hochbau)* et de la chimie.

En outre, un certain nombre de cours spéciaux viennent s'ajouter à ces cours généraux. Le cours de quatre semestres (Mathématiques I et II) comprend le calcul infinitésimal et la géométrie analytique plane et de l'espace traités de façon à pouvoir servir de base aux autres branches de l'enseignement : mécanique, physique, géodésie ; à permettre à l'étudiant la lecture des livres techniques et à lui donner une indépendance mathématique suffisante. L'autre cours, de deux semestres (Eléments de mathématiques supérieures), comprend également le calcul infinitésimal et la géométrie analytique plane et de l'espace, mais seulement ce qu'il est nécessaire de connaître pour la compréhension des cours de physique et des éléments de mécanique.

Voici, par exemple, pour Vienne, le nombre d'heures consacrées à ces cours principaux :

Mathématiques I . . . . . I, M, VK, GK 5.
Mathématiques II . . . . I, M, VK 5.
Eléments de mathématiques supérieures H, C 4.

Les désignations I, M, VK, GK, H, C signifient : ingénieurs, machines, technique des assurances (actuaires), géodésie, construction, chimie.

L'auteur nous donne ensuite le programme détaillé de ces cours. On sait que durant ces dernières années la notion de fonction a été introduite d'une façon plus systématique dans les programmes des écoles moyennes, ainsi que les éléments du calcul infinitésimal. La question se pose de savoir s'il est nécessaire que les écoles techniques supérieures reprennent ces sujets. L'auteur pense qu'il faut y répondre affirmativement ; il importe que le calcul infinitésimal soit repris dès le début afin qu'il constitue une base solide pour l'enseignement ultérieur. Il ne faudrait cependant pas en conclure que son introduction était inutile dans les écoles moyennes, au contraire, les

étudiants en comprendront mieux la portée lorsqu'ils le reverront une seconde fois.

En ce qui concerne les mathématiques appliquées, citons le cours sur la technique d'assurance qui dure deux ans à l'école supérieure de Vienne et qui comprend, en outre des conférences de mathématiques pures, le calcul des probabilités, la statistiquemathématique et les mathématiques des assurances.

Avant d'aborder la question des cours non obligatoires, l'auteur indique le rôle des écoles techniques supérieures dans la préparation des maîtres des écoles moyennes. Quant aux cours libres, donnés par des privat-docents, ils n'ont eu jusqu'à présent qu'un développement très restreint ; à l'exception cependant de Vienne, où, depuis 1880, 76 cours de ce genre ont été annoncés.

L'auteur s'occupe ensuite de la question des examens. Relevons seulement que pour le doctorat les mathématiques peuvent entrer en considération de deux façons, soit comme branche de thèse, soit comme sujet d'examen (Rigorosum). Après cela on trouvera l'exposé des méthodes d'enseignement qui sont en vigueur dans les écoles techniques supérieures. Citons les bibliothèques mathématiques qui rendent d'utiles services aux professeurs et étudiants. On a également créé, ces derniers temps (sauf à Vienne), des bibliothèques spéciales (Handbibliotheken) qui sont à portée immédiate. A ces bibliothèques sont réunies des collections de modèles et divers instruments mathématiques.

Enfin, dans un dernier chapitre, l'auteur s'occupe du corps enseignant, professeurs, privat-docents, assistants. Il est de première importance que le professeur de mathématiques dans les écoles techniques supérieures soit un mathématicien dans tout le sens du mot. A l'exception de Graz, les chaires de mathématiques sont pourvues d'assistants dont la tâche est d'aider le professeur aux exercices pratiques et dans son travail administratif.

SUÈDE

Etablissements supérieurs de jeunes filles[1].

Die Mathematik an den höheren Mädchenschulen in Schweden. — Sous ce titre ont été réunis deux rapports concernant l'un, les écoles supérieures de jeunes filles, par Mlle A. Rönström, l'autre les écoles normales supérieures d'institutrices, par M. O. Josephson.

I. *Ecoles supérieures de jeunes filles.* — Mlle Rönström commence par un aperçu historique du développement de l'enseignement mathématique dans les écoles de jeunes filles en Suède, développement dont l'origine est de date relativement ancienne, puisque déjà en 1865, les nouveaux programmes élaborés accordent une place importante aux sciences mathématiques et naturelles, jusque-là passablement délaissées.

Le plan d'études d'alors, dû à M. F.-W. Hilton, comprend entre autres dans les classes supérieures, pour l'algèbre : les équations du 1er et du 2me degré; pour la géométrie : 4 livres d'Euclide et la résolution d'exercices géométriques. Suivant ce plan d'études, le but de l'enseignement des mathé-

---

[1] Ces rapports ont été résumés par Mlle R. Masson (Genève).

matiques doit être de développer chez l'élève, la réflexion, l'exactitude du raisonnement et l'effort personnel.

Après l'exposé historique, Mlle Rönström aborde la question de l'enseignement actuel. L'arithmétique est la seule branche des mathématiques qui soit enseignée dans toutes les classes des écoles de jeunes filles, son enseignement occupe une majeure partie du temps consacré aux sciences. Dès la 1re classe, classe préparatoire (enfants de 6 à 7 ans)[1], on lui attribue une place importante.

L'ordre et l'époque de l'enseignement des matières, entre autres pour les fractions décimales et ordinaires, varie avec les écoles, mais dans la majorité des cas, on préfère commencer par une introduction intuitive des fractions ordinaires. L'étude des fractions est généralement terminée avec la 4me ou 5me classe : elle est suivie de celle des règles de trois et bien souvent on perd un temps précieux en voulant appliquer ce calcul à des problèmes qui seraient résolus bien plus aisément à l'aide d'une équation.

D'après le rapport publié en 1888 par la commission scolaire des écoles supérieures de jeunes filles en Suède, le calcul au moyen d'équations n'était alors enseigné que dans 18 écoles de jeunes filles ; actuellement il est enseigné presque partout, à des degrés très divers il est vrai, mais en moyenne dès la 6me ou 7me classe. Même, l'algèbre proprement dite, sous forme de calcul avec des lettres, est aujourd'hui enseignée dans les 2 dernières classes élémentaires (7me et 8me classes) de beaucoup d'écoles. Le programme de la majorité des écoles se borne aux réductions algébriques simples, nécessaires à la résolution des équations. Pour quelques écoles, cependant, il comprend le calcul algébrique fractionnaire, la racine carrée et les équations du 2me degré.

La *géométrie* est en général traitée comme si elle n'avait aucun rapport avec les autres branches des mathématiques et elle a rang de branche facultative, sans aucune raison apparente. En effet, le plan d'étude des écoles normales de 1865 ne la mentionne nulle part comme étant une étude facultative, et malgré cela, le rapport de 1888 de la commission des écoles de jeunes filles signale le fait que la géométrie est une branche facultative dans les écoles de jeunes filles et il se contente de conclure qu'il n'y aurait au reste aucun avantage à rendre cette étude obligatoire, tant que l'ancien manuel et sa méthode surannée seront en vigueur.

Il a paru depuis bien des manuels, mais l'étude de la géométrie n'en est pas moins restée facultative et réservée, à quelques exceptions près, aux classes supérieures.

Le programme comprend ordinairement 3 ou 4 livres d'Euclide.

La *tenue de livre* est parfois enseignée, soit dans les classes supérieures, soit surtout dans les classes complémentaires. Ces classes complémentaires, qui n'existent pas partout, ne présentent pas un grand intérêt au point de vue de l'enseignement mathématique, celui-ci en étant presque complètement exclu.

Le temps total accordé aux mathématiques dans les classes dites élémentaires est en moyenne de 24 h. par semaine (de 30 heures en comprenant les classes préparatoires).

---

[1] Le cycle des études dans les écoles de jeunes filles en Suède, comprend actuellement 3 classes préparatoires et 8 classes dites classes élémentaires, la classe 1 correspond au degré inférieur, la classe 8 à la dernière année d'étude.

Les écoles supérieures de jeunes filles n'ont en général pas d'examen proprement dit. Le certificat de sortie de la dernière classe de l'école normale de l'Etat pour jeunes filles sert de diplôme de capacité, et toutes les écoles supérieures de jeunes filles justifiant d'une organisation équivalente à celle de l'école normale peuvent obtenir les mêmes droits pour leurs certificats de sortie, soit une partie de ceux accordés au diplôme des écoles réales ; de plus ils donnent, entre autres, accès au séminaire supérieur pour institutrices.

Classes supérieures ou gymnases. — Il existe en Suède 8 écoles supérieures en relation avec des *classes superieures* ou *gymnases*, préparant à l'examen de maturité. Parmi celles-ci 3 ont 2 sections, une section réale et une section avec du latin. Ceux de ces gymnases dont l'organisation est terminée sont formés de 3 ou de 4 degrés.

Le plan de l'enseignement se basant sur les exigences de l'examen de maturité, le programme est presque identique à ceux des gymnases de jeunes gens et des écoles moyennes préparant à la maturité.

Le dernier degré comprend le plus souvent, outre une revision générale, les éléments de planimétrie, de trigonométrie et l'emploi des coordonnées cartésiennes ; pour la section réale des notions plus complètes de trigonométrie, la stéréométrie et la géométrie analytique.

Les programmes de ces gymnases subissent actuellement des transformations dont la principale est l'importance croissante donnée à la notion de fonction. La section réale aborde la notion de quotient différentiel déduite des applications graphiques.

Mlle Rönström termine par un exposé des méthodes en vigueur à l'Ecole supérieure élémentaire de jeunes filles, à Lund, bien qu'elles diffèrent en bien des points de celles des autres écoles supérieures de jeunes filles en Suède.

Les fractions y occupent une place prépondérante. Mlle Rönström expose les raisons qui ont amené à traiter les fractions ordinaires avant les fractions décimales.

Les équations sont introduites, tout naturellement, dès la 5me classe, comme traduction en langage mathématique de la donnée des problèmes.

Le cours de la classe supérieure résume les matières étudiées, fait ressortir les relations entre l'arithmétique et l'algèbre et met ainsi en lumière les lois générales du calcul mathématique.

L'enseignement de la géométrie n'est pas facultatif, il commence déjà dans la troisième classe élémentaire (âge moyen : 11 ans). Font partie du programme : le théorème de Pythagore, initiant aux nombres irrationnels ; l'étude du cercle aux nombres transcendants, tels que π ; les théorèmes sur les proportions et leurs applications ; enfin, des notions de géométrie dans l'espace et, pour terminer, un exposé des ouvrages et des méthodes d'Euclide.

II. *Ecole normale supérieure pour institutrices.* — L'importance croissante qu'a pris l'enseignement des mathématiques dans les écoles supérieures de jeunes filles en Suède a comme corollaire naturel une extension de l'enseignement mathématique de l'Ecole normale supérieure pour institutrices, chargée de former des maîtresses pour les écoles supérieures, ainsi que, depuis 1905, pour les écoles moyennes de l'Etat (écoles réales en 6 classes).

Le plan d'études de ces écoles est actuellement en voie de transformation, aussi M. Josephson donne-t-il un aperçu de ce qui a été jusqu'ici. Le cours des études est de 3 ans et comprend des branches obligatoires pour

tous et des branches pour le choix desquelles une certaine liberté est laissée à l'élève. Les mathématiques, obligatoires la première année (3 heures par semaine), sont facultatives les deux dernières.

Il a naturellement fallu tenir compte, dans l'élaboration des programmes, de la préparation acquise par les élèves dans les 8 classes élémentaires des écoles de jeunes filles, où les notions d'algèbre enseignées sont, pour le moment, généralement encore très élémentaires et où l'étude de la géométrie est, dans la majorité des cas, facultative. Il s'ensuit que le programme du séminaire supérieur donne pour l'année obligatoire :

Arithmétique. Les 4 opérations avec les nombres entiers et fractionnaires et leurs applications les plus simples (règles de trois, calcul de pour cent et d'intérêt, règles de société et règles d'alliage).

Géométrie. Application de notions intuitives à des problèmes en planimétrie et en stéréométrie.

Toutes ces notions ont été naturellement étudiées déjà avant l'entrée au séminaire. Le but des études du séminaire est plutôt d'approfondir que d'étendre les connaissances, c'est pourquoi elles consistent en une revision systématique de l'arithmétique et de ses diverses applications; on y adjoint, depuis une dizaine d'années, les éléments de la théorie des équations (équations du 1er degré, principalement à 1 inconnue). Pour la géométrie, le champ parcouru correspond à peu près au 1er et 3me livre d'Euclide; actuellement, les éléments d'Euclide ont été remplacés par un ouvrage plus moderne.

Pour les deux dernières années, le fait que, d'un côté, les cours étant facultatifs, les élèves sont relativement peu nombreuses et que, de l'autre, elles montrent en général de réelles aptitudes, a permis d'embrasser un champ assez étendu.

Les cours sont actuellement de 4 heures par semaine pendant les 2 années et le programme rempli est équivalent à celui du gymnase réal : théorie des équations (1er et 2me degré à une et plusieurs inconnues), logarithmes, progressions arithmétiques et géométriques avec application aux intérêts composés et annuités, trigonométrie plane et stéréométrie. Depuis quelques années il a même été possible de terminer ce programme déjà dans la 2me classe du séminaire, ce qui a permis de consacrer la 3me année à la géométrie analytique et aux éléments de calcul différentiel et intégral. Les cours facultatifs et obligatoires se terminent par un examen. A ces 3 années d'étude est adjoint un 4me cours de mathématiques qui est plus particulièrement destiné aux maîtresses sorties en bon rang du séminaire et qui, après une ou plusieurs années de pratique, ont le désir et le loisir de poursuivre plus spécialement l'étude d'une branche. Le programme de cette 4me année est très variable, il consiste soit en leçons proprement dites, soit en conférences sur certains chapitres de géométrie analytique, de théorie des équations, de calcul différentiel et intégral, etc. Il est délivré des certificats spéciaux pour cette 4me année.

Outre l'étude théorique pure, le séminaire comprend l'enseignement de la méthodologie des diverses branches, enseignement donné sous forme de conférences par les maîtresses supérieures spéciales des écoles normales de l'État pour jeunes filles, tandis que l'enseignement théorique est donné par des maîtres attachés au séminaire.

La nouvelle organisation du séminaire supérieur pour institutrices entrera bientôt en vigueur et marquera un progrès sur ce qui a été déjà accompli. Il est de plus à prévoir que, en ce qui concerne les mathématiques, les

conditions d'admission deviendront plus sévères et qu'il deviendra ainsi possible de terminer déjà dans le degré inférieur le programme parcouru actuellement dans la 3me année d'étude; les 2 dernières années seraient alors employées à l'étude, aujourd'hui réservée pour la 4me, ce qui permettrait d'étendre encore le programme de cette dernière.

Ecoles réales.

Die Mathematik an den schwedischen Realschulen, von E. Hallgren u. E. Göransson. — Le rapport, dont nous indiquons ici les principaux traits, comprend 2 parties; la première, due à M. Hallgren, concerne les écoles réales de jeunes gens et la seconde, par M. Göransson, l'enseignement mathématique dans les écoles réales et mixtes.

L'enseignement mathématique dans les *écoles réales pour jeunes gens*. L'auteur montre le but de ces écoles, dont l'organisation actuelle date de 1904; à cette époque les établissements d'enseignement supérieur en Suède on été divisés en Ecoles réales et Gymnases et ceux de l'enseignement inférieur ont été transformés en écoles réales.

L'école réale est chargée de l'instruction publique moyenne en dehors de l'école primaire. La durée des études y est de 6 ans et ce cycle se termine par l'examen d'école réale « Realschulexamen ». L'enseignement mathématique comporte 5 h. par semaine et par classe, sauf pour la 1re et la 5me où ce nombre est réduit à 4. L'enseignement n'est plus, comme autrefois, basé presque totalement sur la mémoire, il doit, selon l'avis de tous, tendre à développer l'intelligence.

L'enseignement sorti de la nouvelle organisation a changé de principe directeur. Son but étant devenu plus pratique, il ne doit plus être un enseignement formel avec, comme seul idéal, la préparation à l'enseignement supérieur, mais il doit former un tout par lui-même, ce qui ne présente, au reste, pas d'inconvénient grave pour l'enseignement subséquent. Dans les écoles réales l'enseignement mathématique comprend l'arithmétique et la géométrie. Le cours d'arithmétique des 3 classes inférieures comprend, comme auparavant, les 4 règles avec les nombres entiers et fractionnaires et leurs applications, règles de trois, calculs de pourcentage et d'intérêt, ainsi que le système métrique. L'étude des équations commence dans la 4me classe et se continue dans les 5me et 6me classes. Le calcul littéral, autrefois enseigné, a été supprimé, sauf dans la mesure où il sera jugé nécessaire pour la résolution des équations, ces dernières étant considérées non comme un but, mais comme un moyen. Le programme comporte la résolution d'équations du 1er degré à 1 et 2 inconnues. Dans la 6me classe, les élèves abordent les racines carrées et leurs applications principalement à des problèmes du plan, ainsi que les calculs d'intérêts composés pour lesquels il est fait usage de tables. Quelques notions de représentation graphique sont également données. Pour la géométrie un cours élémentaire sur les figures planes et le cercle est donné dans les 3 dernières années. L'enseignement de la stéréométrie est limité à un aperçu sur les propriétés les plus élémentaires des corps géométriques dans l'espace avec, comme application, quelques mesures de surfaces et volumes.

Le plan d'étude prévoit un cours complémentaire sur les principes fondamentaux de la géométrie dans l'espace, mais le manque de temps oblige à

le laisser de côté. L'enseignement de la géométrie est, en général, de 2 h. par semaine dans les 4me et 5me classes et de 1 h. dans la 6me. Les élèves reçoivent également quelques notions de comptabilité. M. Hallgren revient encore à la question du but que doit poursuivre l'enseignement mathématique à l'école réale ; but essentiellement pratique, qui nécessite des méthodes d'enseignement pratiques, d'où l'emploi des équations. Cependant, la résolution d'un problème par une équation ne doit pas exclure systématiquement le raisonnement lorsqu'il peut être utile, les 2 méthodes doivent se compléter et non s'exclure. L'élève devra être familiarisé aussi bien avec le calcul écrit qu'avec le calcul mental.

En ce qui concerne la géométrie, l'enseignement a aussi changé d'aspect ; mené auparavant selon la méthode dite d'Euclide, il est actuellement préparé dans la 3me classe par des constructions pratiques et des exercices de mesures pour devenir peu à peu plus théorique. M. Hallgren indique la place que doit occuper le dessin dans cette étude. Il termine son rapport par les conditions d'admission exigées des titulaires des chaires de professeurs à l'école réale, chaires qui comprennent 2 à 3 branches d'enseignement.

La sous-commission suédoise de la commission internationale de l'enseignement mathématique avait envoyé un *questionnaire* destiné à la renseigner sur l'opinion des maîtres des écoles réales et M. Göransson rapporte sur le résultat de cette enquête, réponses émanant soit des directeurs de ces écoles, soit de la réunion des maîtres en question. M. Göransson passe en revue l'enseignement de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie à la lumière des réponses obtenues ; la place nous fait défaut pour donner un résumé de cette étude. Elle est suivie d'un chapitre contenant des observations générales, intitulé « vœux relatifs à l'enseignement mathématique ». L'opinion presque unanime est que le temps accordé à l'étude des mathématiques est trop restreint. Tous sont d'avis, à quelques exceptions près, qu'il est impossible de restreindre le programme des cours, il serait plutôt nécessaire d'introduire à l'école réale l'étude des éléments de trigonométrie.

M. Göransson termine par une étude de l'*enseignement mathématique dans les écoles mixtes de l'Etat* (écoles mixtes ou écoles de coéducation).

Lors de la réorganisation générale des établissements supérieurs d'instruction, en 1904, quelques écoles furent transformées en écoles mixtes. Ces écoles sont organisées comme les écoles réales et se terminent comme elles par l'examen d'école réale.

En ce qui concerne les mathématiques, l'opinion prévalente est, que seules les jeunes filles bien douées suivent avec fruit un enseignement mathématique qui ne fatigue pas les jeunes gens de capacités moyennes. Dans les 3 classes supérieures spécialement, on constate parfois une certaine incapacité, chez les jeunes filles, à profiter de cet enseignement d'une manière satisfaisante. Il faut ajouter, cependant, que quelques rapports émettent l'opinion absolument opposée, disant qu'« il n'est pas rare que les jeunes filles se montrent supérieures aux jeunes gens dans les études théoriques pures » ou encore que, si les jeunes filles réussissent moins bien pour les mathématiques, cela s'explique par le fait que, venant d'une école de jeunes filles et entrant dans une classe supérieure d'école mixte, elles sont retardées dans l'étude des mathématiques par une préparation antérieure insuffisante.

Les écoles mixtes étant de création récente, M. Göransson estime qu'il est encore impossible de conclure en présence des affirmations contraires, émises par des personnes compétentes.

Les mathématiques dans les universités suédoises.

Die Mathematik an den schwedischen Universitäten, von Dr A. Wiman (Upsala). — En Suède, les mathématiques sont représentées dans les universités d'Upsala et de Lund, universités de l'Etat, et à l'Ecole supérieure de Stockholm, « Hochschule ». Par contre, cette étude n'a pas de représentant à l'Ecole supérieure de Gotenburg. Chacun de ces trois premiers établissements a une chaire comprenant la mécanique rationnelle et la physique mathématique et possède ou possédera bientôt deux chaires de mathématiques pures.

Tandis que, pendant la dernière décade, à Lund, la tendance a été plutôt du côté de la géométrie; dans les 2 écoles supérieures suédoises du nord, l'étude de l'analyse supérieure a prédominé. A Stockholm, le domaine d'enseignement de l'un des professeurs doit être l'analyse mathématique supérieure, et, à Upsala, un édit royal de 1899 décrète que l'un des professeurs traitera spécialement l'algèbre et la théorie des nombres, et l'autre la théorie des fonctions.

En ce qui concerne l'enseignement de l'astronomie, remarquons que celui-ci est donné à Stockholm par les astronomes de l'Académie royale des Sciences. A Upsala et à Lund, il y a à cet effet un professeur et un astronome.

M. Wiman donne des détails sur les exigences anciennes et actuelles au sujet des examens en philosophie et des certificats de capacité d'enseignement. Il consacre également quelques chapitres à l'organisation des examens, aux plans d'études, aux connaissances exigées et aux livres utilisés dans ces établissements. Sauf pour les éléments, les livres se recrutent naturellement surtout parmi les ouvrages de l'étranger.

A propos des méthodes d'enseignement, il est maintenant établi que celui-ci doit être conçu en vue des examens. Les branches qui seront sujet d'examen doivent, chaque année, être traitées dans des conférences et des exercices. Les cours publics consisteront, soit en une vue d'ensemble faisant partie du champ de l'examen, soit en une étude plus approfondie d'un sujet spécial.

Les universités possèdent des collections de modèles et des bibliothèques de séminaire. M. Wiman termine par un résumé des désiderata. Il conclut entre autres qu'il est évident qu'une préparation de 7 semestres seulement est trop courte pour les examens concernant un diplôme, tel que le diplôme général de capacité d'enseignement.

———

BIBLIOGRAPHIE

L. Berzolari. — **Geometria analitica**, I : Il metodo delle coordinate (Collection *Manuali Hoepli*). — 1 vol. 16°, 409 p ; 3 L. ; U. Hoepli. Milan.

Ce nouveau volume de la *Collection Hoepli* est consacré à l'étude des méthodes de coordonnées en usage en Géométrie analytique et projective avec les applications à la mesure des angles, des distances, des aires, etc. C'est, avec quelques compléments, la reproduction des leçons que l'auteur fait à l'Université de Pavie.

A la fois très clair et très concis, l'exposé de M. Berzolari constitue une excellente introduction à la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions.

A. Brill. — **Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen.** — 1 vol. in-8°, 236 p., 7 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Excellent ouvrage destiné à familiariser le jeune mathématicien avec les idées nouvelles qui se sont introduites récemment en Mécanique et ont remis en discussion jusqu'aux principes mêmes de cette science. A côté d'un chapitre introductif consacré au point matériel et au corps rigide, où les idées de H. Hertz sont mises largement à contribution, l'auteur aborde successivement les divers chapitres de la Dynamique des milieux continus, fluides, élastiques, et quasi-élastiques (élasticité de l'éther lumineux dans la théorie de Mac-Cullagh), pour finir par une exposition rapide de la théorie électromagnétique de la lumière et le principe de relativité.

Le traité du savant professeur de Tübingue peut être chaudement recommandé comme une introduction, à la fois concise et suffisamment complète, aux théories fondamentales de la Mécanique physique. C. Cailler (Genève).

F.-G. Farault. — **Astronomie Cambodgienne.** — 1 vol. in-4°, 283 p. ; 20 fr. ; Schneider, Saïgon.

Cette étude historique représente un travail considérable, tant au point de vue des recherches de documents qu'à celui de la langue. Elle apporte d'importantes contributions, non seulement aux astronomes et aussi aux savants indianistes

M. Farault expose d'abord la méthode pour les mesures du temps, les divisions du jour et de la nuit, la semaine, les mois lunaires et solaires, les années et leur nom dans la série duodénaire ainsi que le numéro dans la décade à laquelle chacune appartient et les dates de fondation des quatre ères connues des Khmers ; les mesnres pour fixer dans le ciel la position de tous les Astres et le système planétaire.

Sous une forme européenne, il donne et commente les formules empiri-

ques qui servent aux différents calculs des mouvements du Soleil et de la Lune et des autres planètes.

La première partie comprend :

Les six principaux Eléments, base de cette Méthode astronomique, la détermination des longitudes, moyenne et vraie, du Soleil et de la Lune ; le Nakhattareux, le Tithi, et leur application sur le zodiaque ; les calculs pour fixer le commencement de chaque année solaire et ceux pour dresser le calendrier en mois lunaires, suivant trois types déterminés par les règles des anciens savants khmers ; l'application de tous ces calculs à la vérification des dates des vieux écrits, des inscriptions des monuments du Cambodge, qui peuvent également servir à celle des monuments de Campa du Siam, de la Birmanie, de Java, et de plusieurs pays de l'Inde, dont la Méthode astronomique est la même que celle des Khmers.

L'ensemble de ces articles constitue un travail absolument nouveau qu'aucun ouvrage publié jusqu'à présent sur l'Astronomie de ces différents pays d'Asie ne donne. Il complétera utilement les études épigraphiques et paléographiques en leur fournissant les moyens d'établir les dates exactes des documents historiques.

Vient ensuite l'analyse des calculs d'éclipses de Lune et de Soleil, avec exemples, et l'explication des nouveaux Eléments déterminés, puis enfin le zodiaque.

Cet ouvrage comble une lacune importante dont l'intérêt sera certainement apprécié par le monde savant.

C. Helm. — **Die Grundlehren der höheren Mathematik** zum Gebrauch bei Anwendungen und Wiederholungen zusammengestellt. — 1 vol. in-8°, 419 p. ; 13.40 M. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Ce cours de mathématiques générales est destiné aux étudiants des Ecoles techniques supérieures allemandes ; il correspond à l'enseignement que l'auteur donne à Dresde aux étudiants architectes, ingénieurs ou chimistes. M. Helm a donc dû se limiter aux notions essentielles qui sont indispensables à l'étude des branches techniques. Comme l'exige le but même de l'ouvrage, les problèmes et exercices sont empruntés au domaine des sciences appliquées.

Afin de donner une idée du contenu, nous indiquerons les titres des principaux chapitres : la notion de fonction ; limites et dérivées, applications ; intégration ; vecteurs et moments ; coordonnées polaires ; coordonnées rectilignes ; séries ; dérivées partielles ; intégrales multiples ; géométrie analytique de la droite, de la circonférence et des sections coniques ; équations différentielles ; intégrales indéfinies et intégrales définies ; interpolation ; notions de géométrie analytique de l'espace ; la formule de Taylor.

E. Lebon. — **Paul Appell**. Biographie. Bibliographie analytique des écrits. (Collection des *Savants du Jour*). — 1 fasc. in-8°, 71 p. avec un portrait ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

M. E. Lebon vient d'ajouter un nouveau volume à sa belle collection des *Savants du Jour*, dont les trois premiers sont consacrés à MM. H. Poincaré, G. Darboux et E. Picard. Cette quatrième Notice donne d'intéressants renseignements biographiques, suivis de la bibliographie analytique des écrits

de M. Paul APPELL, doyen et professeur de mécanique à la Faculté des Sciences de Paris.

Nous avons déjà insisté sur la valeur historique que présentent ces Notices en raison du soin tout particulier avec lequel l'auteur a l'habitude de réunir et de présenter les notes bibliographiques.

Paul NATORP. — **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** — (Collection *Wissenschaft und Hypothese*) 1 vol. in-16, 416 p. ; 6 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage fait partie de la Collection *Wissenschaft und Hypothese*. Cette intéressante collection a débuté par la traduction de *La Science et l'Hypothèse* et de la *Valeur de la Science* de M. H. Poincaré et contient, entre autres, un exposé historique et critique de la Géométrie non-euclidienne, par M. R. BONOLA et une étude des fondements de la Géométrie par M. D. HILBERT.

M. Natorp examine les fondements des sciences exactes au point de vue purement logique du philosophe. Il fait une étude critique très approfondie sur les idées de quantité, de nombre, de continuité, d'infini, de temps et d'espace. Toutefois, le lecteur y cherchera en vain un exposé critique des contributions importantes que la Logique déductive doit à M. Peano et à ses disciples.

M. D'OCAGNE. — **Notions élémentaires sur la probabilité des erreurs.** — 1 fasc. in-8°, 32 p., 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Il est indispensable que tous ceux pour qui les mesures de précision sont d'un emploi fréquent, se fassent une idée juste des erreurs. On comprend donc que le Ministère des Travaux publics français ait prescrit qu'à l'Ecole des Ponts et Chaussées de Paris, il soit consacré quelques leçons aux principes de la probabilité des erreurs. C'est de cet enseignement qu'est né cet opuscule que nous signalons à ceux qui, sans approfondir le calcul des probabilités, désirent utiliser ses principes à l'occasion de recherches expérimentales.

L'exposé est divisé en trois parties dont voici les objets traités :

I. *Rappel de notions de calcul des probabilités.* Objet de la théorie des probabilités. Définition de la probabilité. Principe des probabilités totales. Principe des probabilités composées. Exemples de calculs de probabilités. Probabilité des épreuves répétées. Théorème de Bernoulli. Probabilités des causes. Théorème de Bayes. — II. *Théorie de la probabilité des erreurs.* Loi de Gauss. Mesure de la précision. Erreur probable. Erreur moyenne absolue. Erreur moyenne quadratique. Comparaison de l'expérience avec la théorie. Tolérance à admettre sur les déterminations expérimentales. Erreur moyenne résultante. Composition rigoureuse des erreurs. III. *Principe de la méthode des moindres carrés.* Cas où il n'existe pas d'équation de condition. Cas où il existe des équations de condition.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annals of Mathematics, published under the Auspices of Harvard University. Second Series. Vol. XI. — Cambridge, Mass., E. U.

N° 4. — W.-H. Jackson : The Theory of Shadow Rails. — W. Marshall : On a new Method of Computing the Roots Bessel's Functions. — E.-B. van Vleck : A Functional Equation for the Sine. — W.-H. Jackson : Periodic decimal Fractions. — W.-B. Fite : Concerning the Invariant Points of Commutative Collineations. — H. Schapper : A New Construction for Cycloïds. — G. Rutledge : Metric Classification of Conics and Quadrics by Means of Rank. — P.-A. Lambert : A Method of Solving Linear Differential Equations.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. 16. Band. — B. G Teubner, Leipzig und Berlin.

Hefte 2, 3 u. 4. — Study : Zur Theorie der Riccatischen Schwarzschen Differentialgleichungen. — Faber : Zur Theorie der symmetrischen Funktionen. — Sturm : Kleinste Polardreiecke und Polartetraeder. — Reye : Ueber Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren. — Lœwy : Bemerkung zum Satze von Fourier. — Scharheitlin : Neue Einführung in die Kegelschnittlehre. — Godt : Zur Lehre von der Apolarität. — v. Ignatowsky : Ueber ponderomotorische Wirkungen im elektrostatischen Felde. — Blaschke : Ueber einige unendliche Gruppen von Transformationen orientierter Ebenen im euklidischen Raume. — Schüssler : Ueber die Konstruktion von Kegelschnitten, welche nur durch imaginäre Bestimmungsstücke gegeben sind. — Kaluza : Die Tschirnhaustransformation algebraischer Gleichungen mit einer Unbekannten. — Wieleitner : Ueber mehrfach perspektivische Dreiecke. — Steinitz : Ueber Konfigurationen. — Rezensionen. — Sitzunsgsberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XXXVIII. Paris.

Fasc. 3 et 4. — G Fontené : Système différentiel attaché à la coïncidence principale d'un convexe. — H. Lebesgue : Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. — R. Perrin : Sur les halphéniennes ou expressions différentielles qu'annule l'opérateur caractéristique des covariants. — L. Zorretti : Sur les équations du mouvement non stationnaire d'un fluide visqueux. — L. Zorretti : Sur la translation uniforme d'un corps de révolution dans un fluide visqueux. — E. Maillet : Sur les fonctions asymptotiquement périodiques. — De Spare : Note au sujet du pendule conique. — Traynard : Sur une surface hyperelliptique du quatrième degré sur laquelle trente droites sont tracées.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

2e *semestre 1910 (suite).* — 22 août. — M. Fekete : Sur un théorème de M. Landau.

12 septembre. — C. Störmer : Théorème sur les équations générales du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés.

26 sept. — A. Demoulin : Sur les familles de Lamé composées de surfaces possédant des points singuliers. — G. Darboux : Remarques sur la communication précédente. — C. Störmer : Formes générales des équations du mouvement d'un corpuscule dans un champ magnétique et un champ électrique superposés.

3 octobre 1910. — E. Picard : Sur une équation fonctionnelle singulière du type de l'équation de Fredholm.

10 oct. — S. Bernstein : Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard. — F. Robin : Loi de la résistance à l'écrasement de corps cylindriques en fonction de leurs dimensions. (Voir aussi séance du 24 oct.).

31 oct. — H. Larose : Sur l'extinction des discontinuités par réflexion aux extrémités d'une ligne télégraphique.

7 novembre. — A. Demoulin : Sur certains couples de systèmes triples-orthogonaux. — W. Stekloff : Sur le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions fondamentales.

14 nov. — L. Bachelier : Mouvement d'un point ou d'un système matériel soumis à l'action de forces dépendant du hasard.

21 nov. — E. Cartan : Méthode du trièdre mobile appliquée au cas des développables isotropes. — E. Fabry : Recherches sur l'ordre des points singuliers d'une série de Taylor. — A. Chatelet : Quelques applications du calcul des tableaux à la théorie des ordres d'entiers algébriques. — T. Lalesco : Sur une méthode simple d'identification employée par M. B. Heywood dans l'étude des noyaux résolvants. — M. Brillouin : Recherches sur le mouvement discontinu de Helmholtz et le cas des obstacles courbes. — Villat : Détermination de tous les mouvements permanents plans d'un fluide limité par une paroi fixe rectiligne indéfinie et dans lequel un obstacle fixe est immergé.

28 nov. — G. Tzitzeica : Sur un théorème de M. Darboux — W. Stekloff : Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales. — Paul Lévy : Sur l'intégrabilité des équations définissant des fonctions de lignes.

5 décembre. — P. E. Gau : Sur l'intégration par la méthode de M. Darboux, d'une équation aux dérivées partielles du second ordre quelconque. — T. Lalesco : Sur les pôles des noyaux résolvants (v. plus haut). — H. Villat : Sur les mouvements d'un fluide autour d'un obstacle de forme donnée (v. plus haut). — Lambert : Sur une forme des équations du mouvement d'une petite planète.

12 déc. — M. Servant : Sur les transformations des surfaces applicables sur les surfaces du second degré. — E. Bleuel : Sur l'application de la méthode d'approximation de Newton à la résolution approchée des équations à plusieurs inconnues. — L. Autonne : Sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls des quantités hypercomplexes. — Galbrun : Sur la représentation asymptotique des solutions d'une équation aux différences finies pour

les grandes valeurs de la variable. — W. Stekloff : Sur la condition de fermeture des systèmes à fonctions orthogonales.

19 déc. — Distribution des Prix de l'Académie (V. la Chronique de l'*E. M.* du 15 janvier 1911).

27 déc. — M. Servant : Sur les transformations des surfaces applicables sur des surfaces du second degré. — T. Lalesco : Sur les noyaux symétriques gauches. — G. Kowalewski : Sur les formules de Frenet dans l'espace fonctionnel. — L. Zoretti : Sur les équations du mouvement d'un liquide visqueux. — A. Gaillot : Théorie analytique et Tables du mouvement de Jupiter par Le Verrier. Additions et rectifications.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel un Mor. Glöser. — XXXV Jahrg 1910 ; Alfr. Hölder, Wien.

Nos 7 à 12. — K. Frostl : Apparate für physikalische Schülerübungen. — E. Czuber : Die Scheiteltransversalen des gleichseitigen Dreiecks. — J. Dinkhauser : Physikalische Schülerübungen an den österreichischen Mittelschulen. — R. Zdenek : Halbierung der Dreiecksfläche. — E. Hering : Ueber die Erreichung technischer Fertigkeiten als Grundlage für physikalische Schülerübungen. — J. Opl : Eine einfache Darstellung der Fusspunkte der Normalen, die aus einem gegebenen Punkte auf die Parabel gefält werden können. — K. Mack : Einige Bemerkungen zum Geometrie-unterrichte.

Aux nos 7, 9, 10 et 11 sont ajoutés comme *suppléments* les fasc. 2 à 5 des rapports de la sous-commission autrichienne de l'enseignement mathématique.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Dr. H. Schotten. — B. G. Teubner, Leipzig.

Jahrgang 41, Numéros I à 8. — Hack : Beispiele aus der Elementarmathematik und verwandten Gebieten zur Einführung in den Funktionsbegriff. — K. Hagge : Besondere Dreiecke, die mit dem goldenen Schnitt in Beziehung stehen. — K. Bochow : Kettenwurzeln und Winkelfunktionen. — K. Traub : Anschaulicher Beweis für den Inhalt des konvexen Kreisvierecks. — J. Schlesinger : Methodischer Beitrag zum Lehrsatze des Pappus. — Josef Schlesinger : Methodischer Beitrag zum Kapitel der Flächenvergleichung ebener Figuren. — J. Druxes : Konstruktion der Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe 1. Ordnung. — W. Mišař : Arithmetisches und geometrisches Mittel. — Weill : Über die graphische Bestimmung der Kreisfläche. — Grosse : Eulersche Methode der Lösung höherer Gleichungen. — Grosse : Der schiefe Wurf in der Mathematikstunde. — K. M. Happach : Lehrsätze über vier Punkte auf einem Kreise. — Stillcke : Der Lehrsatz des Hippokrates und die Geometrie krummliniger Figuren des Leonardo da Vinci. — E. Eckhardt : Analytische und geometrische Auflösung des sphärischen Dreiecks durch seine 3 Höhen. — K. Hagge : Einfache Behandlung der Siebenzehnteilung des Kreises. — Ernst Meyer : Zum Lehrsatz des Moivre. — K. Krüse : Der Höhenschnittpunkt im Dreieck. — Fritz Schürer : Über die n-Ecke, denen unendlich viel regelmässige n-Ecke einbeschrieben werden können. — E. Milarch : Elementare Ableitung der Sinusreihe und Kosinusreihe. — Wilhelm Lorey : Über die Genauigkeit bei angevandten Aufgaben aus der Trigonometrie. — Joh. Schumacher : Über Einheitswurzeln. — K.

Hagge : Einfache Behandlung der 257-teilung des Kreises. — W. Weber : Eine einfache Beziehung an der Parabel. — M. Wacker u. Mondon : Einfache Methoden zur Bestimmung von Kegelschnittsachsen — H Schotten : Einige Beispiele zur graphischen Darstellung. — H. Weist : Die Nepersche Regel für die rechtwinklige dreiseitige körperliche Ecke.

Literarische Berichte. — Pädag. Zeitung.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Lampe, W. Meyer, E. Jahnke. 17 Band. — B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.

Heft 1. — W. v. Ignatowski : Das Relativitätsprinzip. — H. Wiener : Geometrische Ableitung der Additionssätze für die Hyperbelfunktionen.

Heft 2-3. — Bildnis von Emil Lampe und Widmungsblatt zu seinem 70. Geburtstage. — H. Weber : Ueber die Gauss'sche Methode zur angenäherten Berechnung von Integralen — F.-F. Martens : Rechnungsverfahren für arithmetische Analyse nach Fourier. — Fr. Nölke : Elementare Ableitung der astronomischen Störungsgleichungen. — E. Löffler : Die arithmetischen Kenntnisse der Babylonier und das Sexagesimalsystem. — K. Kommerell : Beiträge zur Flächentheorie. — E. Fœthke : Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen. — O. Biermann : Zur Lehre von den Näherungsfunktionen gegebener Funktionen. — F. Kölmel : Ueber den planimetrischen Ort des Kollineationszentrums zweier Dreiecke, die einen Eckpunkt gemeinsam haben. (Ein Beitrag zur Konstruktion rationaler Kurven vierter Ordnung. — W. Blaschke : Ein Lehrsatz zur Kinematik. — J. Wellstein : Zusammenhang zwischen zwei euklidischen Bildern der nichteuklidischen Geometrie. — G.-A. Miller : Groups involving only a small number of sets of conjugate operators. — O. Perron : Ein neues Konvergenzkriterium für Jacobi-Ketten zweiter Ordnung.

2. Livres nouveaux :

H. Andoyer. — **Cours d'astronomie.** Tome I : Astronomie théorique. — 2e édit. 1 vol. in-8, VI-383 p. ; 12 fr. : A. Hermann & fils, Paris.

E. Beke und S. Mikola. — **Abhandlungen über die Reform des mathematischen Unterrichts in Ungarn.** — 1 vol. in-8, VI-160 p. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

L. Berzolari. – **Geometria Analitica.** I : Il metodo delle coordinate. — 1 vol. in-16, XV-411 p.; Lire 3 ; U. Hœpli, Milan.

R. Bricard. — **Géométrie descriptive** (Coll. de l'Encyclopédie Scientifique). — 1 vol. in-18, VI-269-XII p. ; 5 fr. ; O. Doin & fils, Paris.

G. Darboux. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les Coordonnées curvilignes.** — 1 vol. in-8°, 567 p., 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

H. Dingler. — **Die Grundlagen der angewandten Geometrie.** — Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. — 1 vol. in-8°, VIII-160 p. ; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

E. Fabry. — **Théorie des séries à termes constants.** Applications aux calculs numériques. — 1 vol. in-8°, 198 p.; 6,50 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

C. Färber. — **Grundlehren der Mathematik**, für Studierende und Lehrer. I. Teil: Die Grundlehren des Arithmetik und Algebra. I. Band: *Arithmetik.* — 1 vol. in-8°, XV-410 p.; 9 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

G. Friedel. — **Leçons de cristallographie.** — 1 vol. in-8, IV-310 p.; 10 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

Sir G. Greenhill. — **Report on the Theory of a Stream line past a plane Barrier**, and of the Discontinuity arising at the edge, with an Application of the theory to an aeroplane. — 1 vol. in-4°, 96 p.; Wyman et Sons, Londres.

A. Hess. — **Trigonometrie für Maschinenbauer und Elektrotechniker.** — 1 vol. p. in-8, VII-128 p.; 2 M. 80; J. Springer, Berlin.

L. Jacob. — **Le calcul mécanique.** — Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs (Coll. de l'Encyclopédie scientifique). — 1 vol. in-18, 428 p.; 5 fr.; O. Doin & fils, Paris.

V. Kommerell und K. Kommerell. — **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen.** II. Band. 4 (Collection Schubert, XLIV). 2me édit. — 1 vol. in-16, VI-188 p.; 5,80 M.; G.-J. Göschen, Leipzig.

V. Kommerell und K. Kommerell. — **Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme** (Collection Schubert, LXII). — 1 vol. in-16, VI-171 p., 4,80 M.; G.-J. Göschen, Leipzig.

G. Lazzeri und A. Bassani. — **Elemente der Geometrie** (Unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). — Aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. — 1 vol. in-8, XVI-491 p.; B.-G. Teubner, Leipzig.

H. Mettler. — **Graphische Berechnungsmethoden**, im Dienste der Naturwissenschaft und Technik. — 1 vol. in-16, 71 p.; 2 fr.; G. Leemann & C°, Zurich-Selnau.

G. Noodt. — **Leitfaden der Naturlehre**, für Lyzeen (Höhere Lehrerinnenseminare) I. Band. — 1 vol. in-8°, 230 p.; 3,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Ostwald. — **Grosse Männer.** — Studien zur Biologie des Genies. — 3me et 4me édit. — 1 vol. in-8°, 424 p.; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

J. Sommer. — **Introduction à la théorie des nombres algébriques.** — Traduit de l'allemand par A. Levy. — 1. vol. g. in-8, X-376 p.; 15 fr.; A. Hermann & fils, Paris.

Dr Suini. — **La Confutazione della Geometria non-euclidea e la Teoria Naturale delle Parallele.** — 1 fasc. in-8°, 27 p., V. Porta, Piacenza.

J. Tannery. — **Leçons d'Arithmétique théorique et pratique.** — 1 vol. in-8°, 545 p., 7 fr.; Armand Colin, Paris.

G. Vailati. — **Scritti di G. Vailati** (1863-1909). — 1 vol. in-4, 66 et 972 p.; 16 fr. 50; J.-A. Barth, Leipzig. B. Seeber, Florence.

C. Voros. — **Elementoj de la Geometrio Absoluta.** — 1 vol. in-8, 106 p.; 2 Sm.; L. Kokai, Budapest.

Andreas Voigt. — **Theorie der Zahlenreihen u. der Reihengleichungen.** — 1 vol. in-8, 133 p.; 4 M.; G. J. Gœschen, Leipzig.

C. Wargny. — **Trigonometria Esferica.** — 1 vol. in-8°, 219 pages, 6 fr.; Valparaiso.

C. Wargny. — **Los Metodos de la integracion.** — 1 vol. in-8°, 233, p., 5 fr.; Santiago de Chili.



CHARLES MÉRAY
1835-1911

CHARLES MÉRAY
(1835-1911)

Le savant dont le nom précède n'était pas un inconnu pour les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. A vrai dire, il ne l'était pour aucune des personnes qui s'intéressent à la science et à l'enseignement, soit en France, soit dans tous les pays où sont cultivées les mathématiques. Et l'on peut affirmer, sans nulle exagération, que la date du 2 février 1911, celle de la mort de Méray, doit compter comme un jour de deuil chez tous les mathématiciens.

C'est un deuil plus spécialement cruel pour ceux qui ont eu le privilège de connaître l'homme et non pas seulement ses œuvres, et qui ont été si douloureusement surpris par la nouvelle de son décès. Malgré les années, sa robuste constitution, sa vigueur physique, égale à sa puissance intellectuelle, semblaient lui promettre encore de longs jours. Une opération chirurgicale, voulue par lui, mais à laquelle il eût peut-être été sage de ne pas se prêter aussi vite et aussi facilement, a amené l'issue fatale.

Charles Méray était né à Chalon-sur-Saône le 12 novembre 1835. Il entra en 1854 à l'Ecole normale supérieure et fut, à sa sortie, professeur au Lycée de Saint-Quentin pendant deux années (1857-1859); mais la tournure personnelle de son esprit inventif et original le destinait plutôt à l'enseignement supérieur, dans lequel s'est écoulée presque toute sa carrière et où il a si brillamment marqué sa place. Après un congé de quelques années, suivi d'un court passage à la faculté des sciences de Lyon, il arrivait en 1867 à celle de Dijon, qu'il n'a plus quittée qu'à l'heure de sa retraite, vers la fin de 1905, et où il comptait depuis lors comme professeur honoraire.

L'Académie des sciences l'avait élu membre correspondant, pour la section de Géométrie, le 11 décembre 1899.

Cette nomination était la consécration officielle d'une série de travaux d'analyse mathématique que cet esprit infatigable n'avait cessé de prodiguer sous forme d'articles, de notes, de mémoires dans la plupart des périodiques. Il les avait coordonnés ensuite dans ses *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, dont les quatre volumes furent successivement publiés de 1894 à 1898, et qui resteront comme l'œuvre maîtresse de Méray aux yeux de la plupart des mathématiciens. C'est là que, donnant un corps à toutes ses recherches précédentes, aux idées qu'il avait répandues dans son enseignement, il construisait une théorie des fonctions sur des bases nouvelles. Les éléments esssentiels de cette doctrine, dans leur domaine le plus simple, ont pénétré depuis dans l'enseignement officiel où figurent actuellement les fonctions définies par des séries entières.

Cependant, malgré toute la solidité de cette œuvre, malgré la somme considérable de travail et la puissance intellectuelle qu'il fallait pour la mener à bien, je crois que ce ne sera pas le plus grand titre de Méray à la reconnaissance de la postérité, à l'admiration qu'on accordera justement à sa mémoire. Ce qu'il a fait pour la réforme de l'enseignement de la géométrie me semble avoir une portée bien plus considérable encore, en dépit de l'apparence élémentaire du sujet.

Les *Eléments de géométrie*, qu'il publia en 1874, furent accueillis dans l'administration de l'enseignement par une indifférence qui n'excluait pas l'hostilité. Toutes les puissances routinières, se coalisant, prirent à tâche d'organiser contre ce perturbateur la conspiration du silence. On l'excommuniait, pour ainsi dire ; on arrachait son livre des mains des maîtres ou des élèves, si on l'y trouvait. Cependant, des disciples tenaces s'étaient groupés autour de l'auteur ; ils eurent la patience et le courage de persévérer, de propager dans l'enseignement la méthode nouvelle. Peu à peu, en présence des résultats excellents obtenus et qu'on

ne pouvait contester, les résistances officielles fléchirent ; et les idées de Méray ont fini par pénétrer dans les programmes ministériels, sans que l'on ait eu la bonne foi de prononcer seulement son nom.

Un nouveau volume concernant cette méthode d'enseignement fut publié par lui en 1903, puis un autre encore en 1906, sous le même titre : *Nouveaux éléments de géométrie*. Bien que la publication de 1906 ne soit présentée que sous la forme d'une nouvelle édition, c'est, en réalité, une refonte complète, mieux adaptée à l'usage pédagogique.

J'ai eu l'occasion d'exposer ici même, il y a longtemps déjà, sous le titre *Une exhumation géométrique*, les observations que me suggérait la lecture de l'ouvrage de 1874, le seul publié alors sur ce sujet. Je ne saurais y revenir dans cette notice à laquelle je ne dois pas donner le caractère d'une analyse bibliographique. Mais il est bon, cependant, de faire remarquer les causes de la colère sourde, de l'indignation même, que soulevait et que ne pouvait manquer de soulever la tentative de Méray.

Depuis l'antiquité, le monde savant était à genoux devant le monument élevé par Euclide ; sa géométrie était, disait-on, la plus pure des sciences ; elle n'empruntait presque rien au monde extérieur, simplement une toute petite collection d'axiomes. Et sur cette base minuscule, par la toute puissance et la seule puissance de la Logique, se trouvait élevé un merveilleux édifice, digne de l'admiration des hommes, triomphe de l'esprit scolastique. Devant une telle œuvre s'était prosterné tout le moyen âge et se prosternait encore l'Université, continuatrice du moyen âge.

Et voilà qu'arrivait ce trouble-fête, ne craignant pas de dénoncer les sophismes, montrant qu'on escamotait les axiomes nécessaires, qu'il y avait beaucoup plus qu'on ne l'avouait à emprunter au monde extérieur ; affirmant qu'il est vain et puéril de vouloir fonder la science de l'étendue sans considérer la notion de mouvement, dont on ne saurait se passer.

Au point de vue pédagogique, il montrait que d'un enseignement qui aurait dû être attrayant, vivant, on avait fait

une étude ennuyeuse et déconcertante, où la mémoire jouait un rôle à peu près exclusif. A tout instant l'élève était porté à se demander pourquoi on devait admettre *ceci* et démontrer *cela*, lorsque *cela* lui semblait au moins aussi évident que *ceci*.

A une doctrine conventionnelle, Méray venait substituer une doctrine hautement scientifique. A une éducation de sophistes, il en opposait une franchement rationnelle. Comment cet hérétique n'eût-il pas soulevé des clameurs presque unanimes parmi les adorateurs du passé ? Les dévots n'ont jamais assisté sans fureur à la démolition de leurs églises.

J'aurais voulu, après avoir indiqué ce qu'a été l'œuvre du mathématicien, dire ce que fut l'homme privé, mettre en relief les qualités de caractère et de cœur de l'ami, montrer cette intelligence en éveil sur toutes choses, associée constamment à la plus exquise bienveillance. Il ne m'avait été donné d'entrer en relations personnelles avec lui que depuis un peu plus de dix ans, et dès lors s'étaient établis entre nous deux des rapports d'amitié tellement sincères qu'il me semblait comme un compagnon d'enfance, et que sa perte m'a affecté autant que l'eût fait celle d'un parent proche.

Mon témoignage, dans ces conditions, pourrait sembler suspect et je ne sais trop si je parviendrais à exprimer ma pensée dans toute la mesure où je devrais le faire et sans paraître tomber dans l'exagération. Je préfère donc me livrer à quelques emprunts faits aux excellents discours prononcés lors des obsèques de Charles Méray.

Voici comment s'exprime M. Bataillon, doyen de la faculté des sciences de Dijon :

« C'est un culte que ses élèves ont eu pour lui, culte auquel Méray répondit toujours par un dévouement sans bornes. Chez lui, le tempérament de l'homme valait celui du savant. Une figure comme la sienne supporterait mal le fard des éloges de circonstance. Nous devons à sa mémoire de ne dire que des choses auxquelles il pourrait souscrire.

« Le cœur de Méray n'était pas ouvert à tout venant comme une simple hôtellerie. Prompt à se faire une opinion sur les hommes, il avait des répulsions arrêtées comme des amitiés définitives. Et l'amitié, chez lui, c'était la confiance absolue, une liberté d'allure juvénile, la franchise brutale de l'expression dans les discussions les plus paradoxales.

« .....Avec le sens pratique qu'il mettait en toutes choses, avec la belle franchise de ses jugements, avec l'originalité révolutionnaire de son activité intellectuelle, Charles Méray m'apparaît homogène et exempt de tout trait banal. Ceux qui, comme nous, dans la pratique journalière, ont mieux apprécié le charme séducteur de cette grande figure, peuvent mesurer le vide profond que la mort vient de creuser dans notre milieu scientifique. »

« Sans ambition personnelle — dit M. Boirac, recteur de l'Université — sans ombre de vanité ou d'orgueil, conscient de sa valeur, mais n'éprouvant pas le besoin de la faire sentir aux autres, simple de manières, d'une franchise un peu rude parfois, mais toujours pénétré de délicatesse et de bonté, volontiers contredisant et paradoxal en ses propos, non pour le vain plaisir de surprendre son interlocuteur, mais pour mieux l'amener à envisager la vérité sous toutes ses faces ; un peu brusque, ou même bourru d'apparence, au fond très affectueux, très sensible, éternellement reconnaissant du plus petit service, touché jusqu'au cœur de la plus légère marque d'amitié, tel était l'homme que nous avions appris à aimer et dont tous ceux qui l'ont connu garderont pieusement le souvenir.

« .....L'adhésion enthousiaste de M. Méray à la langue internationale Esperanto fut sans doute une autre suite de ce même esprit d'indépendance, de ce même besoin de logique et de clarté qu'il apportait en toutes choses. Jusqu'à lui, l'œuvre du docteur Zamenhof n'avait guère rencontré chez les hommes de science, chez ceux qu'on nomme parfois les intellectuels, qu'une dédaigneuse indifférence, sinon une hostilité décidée. La simplicité et la régularité de cette langue quasi géométrique séduisirent M. Méray plus encore

peut-être que sa souplesse et son harmonieuse sonorité ; mais ce qu'il vit en elle de plus précieux, ce sont les services qu'elle pouvait rendre à la science et à la civilisation, si elle devenait jamais l'instrument universel des communications internationales. Aussi se dévoua-t-il à la répandre et à la défendre avec l'ardeur d'un véritable apôtre. »

Voici enfin le croquis très juste que nous trace en quelques lignes M. Pionchon, professeur à la faculté des sciences de Dijon :

« Caractère ouvert ; bonne humeur ; esprit fin, original, caustique parfois, mais toujours avec une foncière bienveillance ; verve abondante, pittoresque, pleine du meilleur sel bourguignon ; bonté délicate ; cordiale confiance ; absolue franchise ; impeccable droiture ; dévouement à toute épreuve ; bref, tous les dons les plus propres à attirer et à attacher à lui ceux qui étaient amenés à pénétrer dans son intimité, il les eut de façon privilégiée ; et il en était si riche qu'il a pu les prodiguer toute sa vie sans les épuiser et sans pourtant que jamais ombre de banalité ait diminué la valeur des marques d'affection ou d'intérêt que recevaient de lui ses très nombreux familiers. Néanmoins, il savait nuancer ses sentiments et les proportionner, avec une très équitable justesse, aux vrais mérites de chacun, car sa bonté n'était ni faible ni aveugle, parce que sa haute intelligence n'abdiquait jamais ses droits. En lui, l'esprit géométrique coexistait avec l'esprit de finesse, si bien qu'il fut toujours un très avisé psychologue et, par conséquent, un très pénétrant connaisseur d'hommes. »

L'*Enseignement mathématique*, dont Charles Méray fut un dévoué collaborateur et qui a très probablement publié son dernier travail, se devait à lui-même de retracer rapidement cette belle figure d'un savant et d'un honnête homme.

Il le fait avec tristesse, mais aussi avec l'espoir que l'exemple d'une vie aussi belle, aussi pure, ne sera pas perdu pour les jeunes générations de travailleurs. En s'inspirant d'un tel modèle, ils prendront pour constante devise : Aimer la science et faire le bien.

C.-A. Laisant.

LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DES QUINCONCES

1. On appelle *quinconce* l'ensemble indéfini des intersections de deux systèmes de parallèles équidistantes, numérotées à partir de deux d'entre elles, prises comme *directrices*, elles-mêmes numérotées zéro (fig. 1).

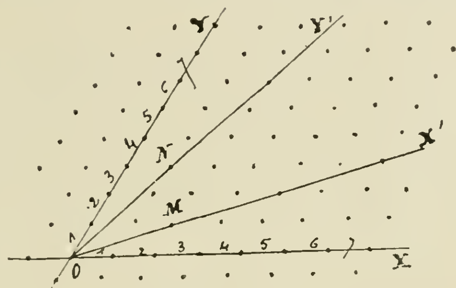


Fig. 1.

L'étude de cette figure constitue une sorte de géométrie analytique en nombres entiers, dans laquelle les coordonnées sont, non plus des longueurs, mais des numéros.

Un quinconce étant défini par l'angle φ des directrices et les longueurs OA, OB des *équidistances*, un point quelconque du quinconce se désigne par son numéro-abscisse x et son numéro-ordonnée y, et se note (x, y).

Si les deux systèmes de parallèles sont tracés, la figure est un *réseau*, divisant le plan en parallélogrammes égaux. Le réseau s'appelle plus particulièrement *quadrillage*, quand les directrices sont rectangulaires et les deux équidistances égales.

Un quinconce n'est donc autre que l'ensemble des intersections d'un réseau. On comprend qu'à un quinconce quelconque correspondent une infinité de réseaux, lesquels sont dits dans ce cas *équivalents*.

2. *Une droite joignant deux points quelconques d'un quinconce, en rencontre une infinité d'autres, qui sont équidistants.*

3. *Les nombres* a *et* n *étant premiers entre eux, la droite* $ax - ny = 0$, *déterminée par l'origine et par le point* (n, a) *du quinconce rencontre une infinité de points équidistants représentés par la formule* (kn, ka), k *désignant les nombres* $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Elle n'en rencontre pas d'autres; car puisque $ax = ny$, et que a et n sont premiers entre eux, a doit diviser y, et n diviser x.

La droite $ax - ny = af - ng$, menée par le point (f, g) du quinconce parallèlement à la droite précédente, est dans le même cas et rencontre le quinconce en une infinité de points équidistants.

Soit $af - ng = b$; on a ainsi graphiquement les solutions, en nombre infini, de l'équation $ax - ny = b$.

4. *Étant donné trois points quelconques* (x, y), (x', y') et (x'', y'') *d'un quinconce, on peut, de trois manières différentes, déterminer un quatrième point qui forme avec les trois premiers, un parallélogramme.* Tel est le point

$$\left(\frac{x' + x'' - x}{2}, \frac{y' + y'' - y}{2}\right)$$

diagonalement opposé au point (x, y).

Il suffit de remarquer que la demi-somme des ordonnées de deux sommets opposés est égale à celle des deux autres.

5. L'angle des directrices étant φ; que l'on pose $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{ac}}$ et que les équidistances soient appelées $\sqrt{a}$ sur les abscisses, et $\sqrt{c}$ sur les ordonnées; le quinconce représentera la forme $(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, a et c étant positifs; puisque le carré de la distance du point (x, y) à l'origine est $(x\sqrt{a})^2 + (y\sqrt{c})^2 + 2x\sqrt{a}\, y\sqrt{c} \cos\varphi$ [1].

En outre, la surface de chaque parallélogramme élémentaire est égale à $\sqrt{\Delta}$, Δ désignant la valeur de l'expression $ac - b^2$ (Gauss).

On verra facilement qu'aux formes (a, o, c) et (a, b, a) cor-

---

[1] x représente le nombre des divisions de l'abscisse; y, celui des divisions de l'ordonnée; et non des longueurs.

respondent un quinconce rectangulaire et un autre quinconce formé de losanges.

6. Les directrices étant OX, OY, on peut rapporter le quinconce à deux autres directrices OX′, OY′ déterminées par l'origine et deux de ses points M, N : il est alors défini par l'angle Y′OX′ et les deux équidistances OM, ON.

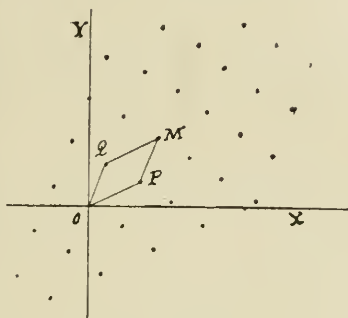


Fig. 2.

7. L'ensemble des points $x = ax' + by'$, $y = cx' + dy'$, expressions dans lesquelles a, b, c, d désignent des entiers fixes, x' et y' tous les entiers positifs ou négatifs, — figure un certain quinconce (fig. 2) qu'on symbolise ainsi $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ et qui n'est plus rapporté à ses directrices[1]. En effet on a :

$$[a(x' + \alpha) + b(y' + \beta)] + [a(x' - \alpha) + b(y' - \beta)] = 2(ax' + by')$$
$$[c(x' + \alpha) + d(y' + \beta)] + [c(x' - \alpha) + d(y' - \beta)] = 2(cx' + dy') .$$

Ce quinconce représente les solutions de l'équation $ax + by = ct$, où x et y désignent des coordonnées, et t un coefficient variable.

L'expression $ad - bc$ s'appelle la *norme* du quinconce et s'indique par la notation $N\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$: elle représente, comme on s'en assurera aisément, la surface de l'un des parallélogrammes élémentaires.

Si le quinconce $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ contient tous les points de $\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix}$, on dit qu'il en est le *multiple :* de là, l'assimilation de cette représentation aux nombres premiers ou composés : ainsi le produit des quinconces $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$.

[1] Pour plus de simplicité, la figure suppose rectangulaires les axes de coordonnées ; mais il est facile d'étendre la théorie au cas où les coordonnées ne se coupent plus sous un angle droit.
x' et y' désignent les équidistances sur les axes de coordonnées, et OP, OQ celles sur les directrices.

Le quinconce est *premier* si sa norme est un nombre premier.

Par le moyen des substitutions $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, du quinconce $\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$, on déduit un autre quinconce $\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix}$ lié au premier par la formule

$$N\begin{bmatrix} a'b' \\ c'd' \end{bmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma) N \begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix},$$

de sorte que si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, les deux quinconces sont identiques; leur groupement seul diffère, étant effectué sur des systèmes de parallèles formant deux réseaux équivalents.

Par des considérations d'un autre ordre, on arrive à une nouvelle interprétation analytique des quinconces. La longueur du côté OP du parallélogramme OPMQ a pour expression

$$a(am^2 + 2bm\mu + c\mu^2),$$

en appelant $am + b\mu$ et $\mu\sqrt{\Delta}$ les coordonnées rectangulaires du point P. Cette longueur représente donc la forme (a, b, c), au facteur a près.

Soient appelés (x, y) et (ξ, η) les points P et Q; les côtés OP, OQ peuvent être figurés ainsi :

$$t = x + yi, \qquad \tau = \xi + \eta i.$$

L'expression $[t, \tau] = zt + \zeta\tau$ représentera un quinconce, qui sera déterminé si on se donne les nombres z et ζ, et on aura :

$$N[t, \tau] = x\eta - \xi y.$$

Posons

$$u = \alpha t + \beta\tau, \qquad v = \gamma t + \delta\tau,$$

on obtiendra un quinconce placé généralement et qui donnera

$$N[u, v] = (\alpha\delta - \beta\gamma) N[t, \tau].$$

Cette géométrisation des formes quadratiques, — dont les éléments sont seuls donnés ici[1], — est due à M. Poincaré

[1] A citer ces deux problèmes : *reconnaître si un quinconce est identique à un autre quinconce donné*, et *trouver les transformations qui changent un quinconce en lui-même*; la *réduction* des formes et leur *composition*.

J. E. P., 1880) ; elle a été retrouvée par M. Klein (*Vorl. über ausgew. Kap. der Zahlentheorie*, Leipzig, 1895).

8. Appelons *quinconce de module* n. la partie d'un quinconce comprise entre les axes et les coordonnées portant le numéro *n*.

Les nombres a *et* n *étant premiers entre eux, et* a < n, *considérons sur le quinconce de module* n, *les points* (x, y) *pour lesquels l'ordonnée* y *est égale au reste de la division de* ax *par* n : *ces* n *points sont disposés sur le quinconce suivant des parallélogrammes égaux* (Gand) (fig. 3). Cela résulte de

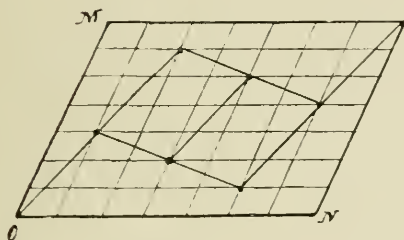


Fig. 3.

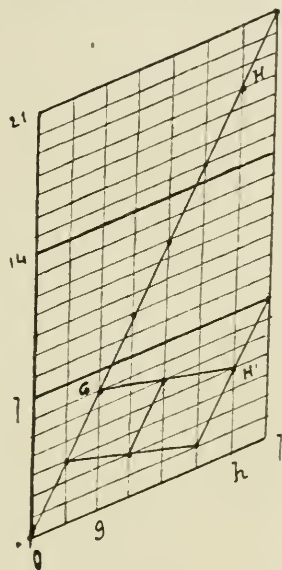


Fig. 4.

la régularité même de la construction : en effet, le premier point est à l'origine ; sur la première ordonnée, on monte de *a* ; sur la deuxième, on monte encore de *a*, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on sorte du quinconce, et alors on complète l'ascension de *a* sur l'ordonnée suivante.

La figure 4 fournit une autre démonstration intuitive de la proposition : car elle se réduit à la figure 3, en rabaissant jusqu'à l'axe des x la partie située au-dessus de la droite $y = n$, puis la partie au-dessus de la droite $y = 2n$, et

ainsi de suite. Les diverses ascensions se trouvent reportées dans le quinconce inférieur, telles quelles, ou bien fragmentées.

L'ensemble des n points ainsi définis s'appelle un *satin*, nom qu'il tire d'un tissu d'origine chinoise bien connu et établi d'après ce principe[1]. La figure 3 représente le satin 7_3 correspondant aux données $n = 7$, $a = 3$.

9. *Le satin* n_{n-a} *est le symétrique*, ou l'envers, *du satin* n_a (Gand).

10. *Chaque parallèle à l'axe des* x *contient un point du satin et n'en contient qu'un* (Gand). Si on avait, par exemple, $H'h = Gg$ (fig. 4), il s'ensuivrait[2] $Hh \equiv Gg$, et HH' serait à la fois de la forme nz et de la forme aw avec $z < a$ et $w < n$; or cela est impossible.

Cette proposition n'est autre que le lemme fondamental.

11. *Les équidistances sur les parallèles étant appelées* d *et* e, *la surface de chacun des parallélogrammes formés de quatre points voisins est égale à* nde, *de sorte qu'il y a dans le satin* n *parallélogrammes égaux ou fragmentés* (Gand). Cela découle immédiatement de ce que le quinconce a une surface de n^2de, et que les n parallélogrammes sont égaux, par suite de la symétrie de la construction.

En général, le parallélogramme dont trois sommets sont l'origine et les points (x, y) et (x', y'), a pour surface $(dx')(ey) - (dx)(ey')$; or on a $ey \equiv axd$ et $ey' \equiv ax'd$; d'où il suit que la surface est $\equiv 0$.

Le plus souvent, les axes sont rectangulaires et les équidistances d et e sont égales et se représentent alors par le nombre 1 : on peut dire, dans ce cas, que la surface de chaque parallélogramme est égale à n.

12. Le satin n_a peut être considéré par rapport au côté OM pris comme axe des x (fig. 3), et alors on a le symétrique d'un satin n_α tel que, pour un point quelconque (x, y) du premier, qui est le point $(-y, x)$ du second, on a :

$$ax \equiv y, \qquad \alpha y \equiv x, \qquad \text{d'où} \qquad a\alpha \equiv 1.$$

[1] Les satins 2_1 et n_1 ont reçu les noms particuliers de *toile* ou *damier* et de *serge* ou *diagonale*. Il n'en sera pas question ici.

[2] On sous-entendra partout la mention « (mod n) ».

Ainsi le satin 7_3, de la figure 3, devient le satin 7_5 : 3 et 5 étant les valeurs de la première ordonnée dans les deux sens.

Les deux nombres a et α sont dits *associés*. Il est clair que *chaque entier* a *premier avec* n, *a son associé*, c'est-à-dire un nombre α tel que $a\alpha \equiv 1$. Cette démonstration est d'Ed. Lucas.

13. Il est facile de déterminer dans chaque cas, le nombre de satins d'un *module* donné n : on cherche les valeurs de a pour lesquelles ce nombre est premier avec n et inférieur à sa moitié[1]. On les groupe par associés deux à deux et on ne conserve que les plus petits termes dans chaque groupe. Ce nombre n'est pas susceptible d'être représenté par une formule simple, sauf si n est premier, auquel cas il est $\frac{n-1}{4}$ ou $\frac{n-3}{4}$, selon que n est 4 ± 1.

14. Les axes seront maintenant toujours supposés rectangulaires, et les équidistances égales.

Si n *est la somme de deux carrés premiers entre eux,* g^2 *et* h^2, *il existe une valeur* f *de* a, *qui donne* $a^2 + 1 \equiv 0$, *et les parallélogrammes du satin sont des carrés* (Gand). Soit γ l'associé de g; de $g^2 + h^2 = n$, on tire, en multipliant par γ et posant $h\gamma \equiv f$, la congruence $f^2 + 1 \equiv 0$.

Le carré de la distance des deux points (x, y) et (x', y') du satin est égal à

$$(fx' - fx)^2 + (x' - x)^2 = (f^2 + 1)(x' - x)^2 \equiv 0$$

chacun des parallélogrammes a ainsi une surface égale à n, et des côtés de la forme $n\sqrt{k}$, $n\sqrt{l}$, ce qui ne peut avoir lieu que si ces parallélogrammes sont des carrés.

Le tableau suivant donne les *satins carrés* de modules inférieurs à 100 :

n = 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29, 34, 37, 41, 50, 53, 58, 61, 65, 73, 74, 82, 85, 85, 89, 97 ;

f = 2, 3, 5, 4, 7, 5, 12, 13, 6, 9, 7, 23, 17, 11, 8, 18, 27, 31, 9, 13, 38, 34, 22 .

[1] Inutile de chercher les valeurs $> \frac{n}{2}$, puisque le satin n_{n-a} est le symétrique du satin n_a.

La figure 5 représente le satin carré 10_3.

Cor. I. *Un satin carré reste identique à lui-même quand on le fait tourner d'un quart de tour;* puisque de $f^2 \equiv -1$, on tire $fx \equiv y$ et $fy \equiv (n - x)$.

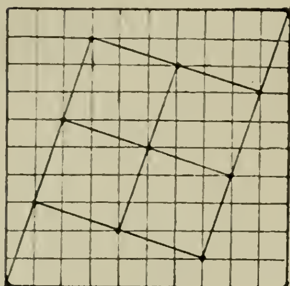


Fig. 5.

II. *Si on appelle* q *et* r *le quotient et le reste de la division de* n *par* f, *on a* : $q^2 + r^2 \equiv 0$ *et* $q \equiv rf$. Conséquences de la congruence $fq \equiv -r$.

15. Le satin n_a peut être considéré comme le lieu des points (x, y) définis par la relation $y \equiv ax$.

Si $n = g^2 + h^2$, c'est-à-dire si le satin est carré, on a

$$x^2 + y^2 \equiv x^2 + a^2x^2 \equiv 0 .$$

Le nombre $g^2 + h^2$ divisant $x^2 + y^2$, il divise aussi

$$g^2(x^2 + y^2) - y^2(g^2 + h^2) = g^2x^2 - h^2y^2 ;$$

il divise donc l'un des deux nombres $A = gx + hy$, $B = gx - hy$; or il est facile de voir qu'il divise $gA - hB$: il divise donc A et B. On verra de même qu'il divise les deux nombres $hx \pm gy$.

Ainsi g *et* h *désignant des entiers premiers entre eux, et* n, *le nombre* $g^2 + h^2$, *le lieu du point* (x, y) *défini en coordonnées rectangulaires par l'une ou l'autre des quatre relations*

$$gx \pm hy \equiv 0 , \qquad hx \pm gy \equiv 0$$

est un satin carré. Il en est de même de ceux définis par une relation de la forme $gx \pm hy \equiv gl \pm hm$, mais alors l'origine des coordonnées n'est pas un point du satin.

16. *Si* n *divise un nombre de la forme* $x^2 - 1$, *la valeur* $a = x$ *donne des losanges, et le satin est symétrique par rapport à la diagonale* (GAND). De $a^2 - 1 \equiv 0$, on tire en effet $xy \equiv a^2xy$; d'où, en posant $ax \equiv y$, cette autre relation $x \equiv ay$: les points (x, y) et (y, x) du satin n_a sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Les satins suivants sont dans ce cas :

$n = 8, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 24, 24, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 40, 40, 42, 44, 45, 48, 48, 48, 52$;

$a = 3, 5, 4, 7, 9, 8, 5, 7, 11, 13, 11, 15, 10, 6, 17, 14, 9, 11, 19, 13, 21, 19, 7, 17, 23, 25$.

D'autres satins forment également des losanges, mais ne sont pas symétriques : tel est le satin 40_7, et en général ceux pour lesquels la somme du quotient et du reste de la division de n par a est égale à $a^2 + 1$. D'autres satins, d'une définition moins simple, sont dans le même cas. (Voir LAISANT, *A. F.*, 1877.)

17. *Déformons le satin* n_a *de manière que, la première ordonnée restant à sa place, la* a^e, *qui a pour valeur* α, *devienne la* 2e ; *la* α^e, *qui a pour valeur* β, *devienne la* 3e ; *la* β^e, *qui a pour valeur* γ, *devienne la* 4e ; ... *la* k^e *ordonnée sera* $\equiv a^k$, *et on aura de cette sorte le graphique des solutions de la congruence* $a^x \equiv y$. Ainsi, pour $a = 10$, n n'étant ni pair, ni multiple de 5, la figuration sera celle de la période décimale du quotient de 1 par n (LAISANT).

De même, soit à trouver les restes de la division de a^k par n : on cherchera ceux de la division par n des nombres a, $2a$, $3a$, ... : le reste de a est a ; celui α de a^2 est le a^e reste ; celui β de a^3 est le α^e reste ; ... (ARNOUX).

18. La théorie des satins a été donnée par GAND en 1867, dans le *Bull. de la Soc. d'Amiens*. L'application suivante, due au même auteur (*le Transpositeur ou Improvisateur de tissus*, Paris 1871), montrera le parti qu'on peut en tirer dans l'industrie textile, pour obtenir des motifs nouveaux, en nombre indéfini.

On a une bande de papier divisée en vingt-neuf carrés égaux, de diverses nuances (fig. 6), qu'on déplace successivement de sa largeur ; mais en la montant, la première fois de $R\frac{12}{29}$ cases [1] ; la seconde fois, de $R\frac{2.12}{29}$ cases ; la troisième fois, de $R\frac{3.12}{29}$ cases ; la quatrième, de $R\frac{4.12}{29}$ cases ; ... ; on

[1] On entend par le symbole $R\frac{a}{b}$, le reste de la division de a par b.

aura ainsi un *satin carré composé*, de 29^2 cases, dont une partie est donnée, fig. 7.

19. Si dans l'expression $u^2 + kv$, u et v désignent tous les entiers imaginaires possibles, et k, l'imaginaire fixe $\alpha + \beta i$; cette expression prendra une infinité de valeurs de la forme $x + yi$, qu'on représentera en hachurant la case (x, y), c'est-à-dire la y^e case de la xe colonne verticale. Si en outre, $x + yi$ est divisible par $\alpha + \beta i$, la case (x, y) sera entièrement noire. Cette représentation a été proposée par THIELE, en 1873. (Voir *A. F.* 1874.)



Fig. 6.

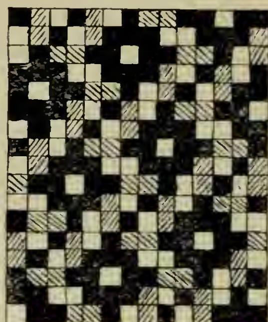


Fig. 7.

Si $k = 1 + i$, on aura un damier de cases noires et de cases grises. Si $\beta = 0$, le dessin est encore assez simple, car il dérive du damier. Mais dans le cas général, il présente un ensemble de motifs élégants mais compliqués, simulant chacun quatre spirales grises ou blanches autour de chaque case noire : voir par exemple les fig. 8 et 9 [1].

[1] Voir aussi *(op. cit.)*, outre ces deux figures, et celles qui seront décrites plus loin, surtout celles qui correspondent aux valeurs $k = 8 + 5i$, $8 + 7i$, $10 + i$ et $17 + 8i$, données par BROCH.

20. On peut d'abord vérifier que *les cases noires des dessins de Thiele forment le satin carré de module* $n = \alpha^2 + \beta^2$. En effet, si $x + yi$ est divisible par $\alpha + \beta i$, $(x + yi)(\alpha - \beta i)$

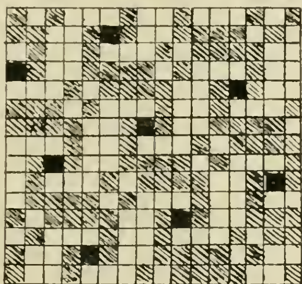


Fig. 8

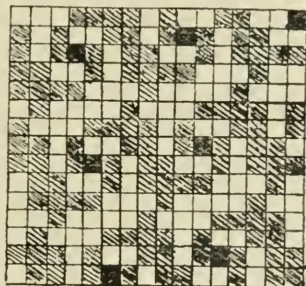


Fig. 9.

$= (\alpha x + \beta y) + (\alpha y - \beta x) i$ est divisible par $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$, ce qui a lieu si les deux expressions $A = \alpha x + \beta y$ et $B = \alpha y - \beta x$ le sont, conditions qui n'en font qu'une, car on a :

$$\alpha A + \beta B = nx ,$$

d'où on conclut que la divisibilité de A entraîne celle de B. On a donc bien $\alpha x + \beta y \equiv 0$, ce qui caractérise un satin carré (15).

Les cases grises correspondantes, dans les diverses répétitions du motif, forment des satins identiques, mais placés d'une manière différente. Soit en effet

$$u = u' + u''i \ , \quad v = v' + v''i \ ;$$

il viendra

$$\alpha x + \beta y = \alpha u'^2 + 2\beta u'u'' - \alpha u''^2 + nv' ,$$

d'où

$$\alpha(\alpha x + \beta y) \equiv \alpha^2 u'^2 + 2\alpha\beta u'u'' - \alpha^2 u''^2 \equiv \alpha^2 u'^2 + 2\alpha\beta u'u'' + \beta^2 u''^2$$
$$\equiv (\alpha u' + \beta u'')^2 .$$

Ainsi *la case* (x, y) *est grise si* $\alpha(\alpha x + \beta y)$ *est un résidu*, ce qui permet d'exécuter la construction assez aisément. Mais les considérations qui suivent la rendent encore beaucoup plus facile.

Soit (ξ, η) une case noire, c'est-à-dire telle que $\alpha\xi + \beta\eta \equiv 0$; chaque case grise (ξ, y) de la même colonne est déterminée par la relation $\alpha(\alpha\xi + \beta y) \equiv r$, r désignant l'un des résidus de n. De là, la condition $\alpha\beta(y - \eta) \equiv r$. Or de $\alpha^2 + \beta^2 = n \equiv 0$, on tire $(\alpha + \beta)^2 \equiv 2\alpha\beta$; $2\alpha\beta$ est donc résidu, et $\alpha\beta$ est ou n'est pas résidu en même temps que 2. Le nombre $\alpha\beta$ et par suite le nombre $y - \eta$, sont donc résidus si n est un nombre premier $8 + 1$ ($k = 4 + i$, $5 + 4i$, $8 + 3i$, $8 + 5i$, $8 + 7i$, $9 + 4i$, $11 + 4i$, $12 + 7i$, $13 + 8i$, ...) et non-résidu si n est un nombre premier $8 + 5$ ($k = 2 + i$, $3 + 2i$, $5 + 2i$, $5 + 4i$, $6 + i$, $6 + 5i$, $7 + 2i$, $10 + i$, $10 + 3i$, $10 + 7i$, $10 + 9i$ ...). Par conséquent, les valeurs de r étant $1, r, r', r'', \ldots$ la 1[ere], la r^e, la r'^e, la r''^e, ... case située au-dessus d'une case noire sera grise ou blanche, suivant les deux cas qui viennent d'être indiqués[1]. Ainsi

pour $k =$ ... les cases grises sont celles qui précèdent ou suivent les cases noires de

$2 + i$,	2 rangs ;
$3 + 2i$,	2, 5 rangs ;
$4 + i$,	1, 2, 4, 8 rangs ;
$5 + 2i$,	2, 3, 8, 10, 11, 12, 14 rangs ;
$8 + 7i$,	1, 2, 4, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 22, 25, 26, 28, 30, 31, 32, 36, 41, 44, 49, 53, 56 rangs.

Les figurations de Thiele ne sont donc autres qu'une application très particulière ; — mais à la vérité très intéressante, — de la méthode de Gand, celle où la y^e case de l'ordonnée mobile (fig. 6) est grise ou blanche selon que y est un résidu ou un non-résidu.

21. Les problèmes du tissage constituent une application des plus intéressantes de la théorie élémentaire des nombres et sont très propres à en faire saisir les méthodes. Il semble donc que la construction des congruences concrètes ainsi réalisées est un bon exercice, à différents points de vue, et qu'un mot sur les combinaisons de carreaux serait à sa place dans un traité sur les nombres.

---

[1] Dans le premier de ces deux cas, la figure ne change pas quand on la fait tourner d'un quart de tour ; dans le second cas, les cases grises sont changées en cases blanches et vice versa.

La combinaison la plus simple est le damier indéfini. On peut le généraliser en le déformant de plusieurs manières : par exemple on peut a upler les largeurs de la (kb)^{me} colonne et de la (kb)^{me} rangée, k prenant les valeurs ± 1, ± 2, ± 3,... Le cas de $a = 3$ et $b = 5$ est fréquemment employé.

On aurait d'autres dérivés du damier de n^2 cases, n désignant un nombre impair, en mettant noire ou blanche la case (x, y) selon que $\mathrm{R}\,\frac{xy}{n}$, ou $\mathrm{R}\,\frac{x^2+y^2}{n}$, etc., est pair ou impair ; ou encore selon que xy est congru à un résidu ou à un non-résidu. Cette étude sera développée plus tard.

Les effets des diagonales donnent des motifs bien plus variés[1]. On peut réunir plusieurs bandes en diagonales : les couder en zigzags ; les briser ; les couder et les briser, à chaque coude ou à chaque rangée ; alterner les nuances, de k rangées en k rangées.

Mais c'est surtout avec la méthode si simple de Gand, pour les satins (**18**), qu'on obtient les résultats les plus élégants et les plus variés. Ainsi la fig. 6, qui par son ascension successive de douze cases, produit la fig. 7, peut en donner douze autres, en effectuant des ascensions de deux, trois, quatre cases ; ces sortes de cristallisations différentes des mêmes carreaux de la fig. 6 étonneront par l'inattendu des motifs obtenus : celles qui correspondent aux nombres 3, 7, 8, 9, 11, 13 surtout en donnent de très jolis. Pour plus de facilité, on ne prendra que les cases noires[2].

22. Le cas du satin dont le module n est un nombre premier réel p, mérite un examen spécial. Il ne peut y avoir alors, que dans un seul cas, un nombre a qui soit l'associé de son complément, c'est-à-dire tel que $a^2 + 1 \equiv 0$. Soit en effet $b^2 + 1 \equiv 0$; il viendra $a^2 - b^2 \equiv 0$ ou $(a + b)(a - b) \equiv 0$, d'où $a + b \equiv 0$ et $b = p - a$. Le groupe a, $\alpha = p - a$ ne peut donc se présenter qu'une fois. D'un autre côté,

---

[1] Voir par exemple le *Cours de tissage*, de GAND, ou le *Traité* de BONNA, etc.

[2] Le moyen mécanique suivant permet de construire un satin composé, sans aucun calcul, à l'aide de cubes noirs et blancs. Construisons avec ces cubes k colonnes identiques ; montons de h rangs les $k - 1$ dernières colonnes et replaçons d'un bloc au-dessous les cubes qui dépassent en haut ; montons de même de h rangs les $k - 2$ dernières colonnes et replaçons d'un bloc au bas les cubes qui dépassent au-dessus ; montons de même les $k - 3$ dernières colonnes et replaçons au bas les cubes excédents ; et ainsi de suite.

il n'y a que les nombres 1 et $p - 1$ qui soient leurs propres associés, car la congruence $x^2 \equiv 1$ donne $(x + 1)(x - 1) \equiv 0$, d'où $x \equiv 1$ et $x \equiv - 1$.

Si p est un nombre premier $4 + 1$, les entiers 2, 3, 4, ... $p - 3$ se partagent en $\frac{p-5}{4}$ groupes de quatre nombres associés ou complémentaires, et en un groupe des deux nombres a, α, à la fois associés et complémentaires. On a ainsi $a^2 + 1 \equiv 0$. Donc *tout nombre premier* $4 + 1$ *divise une somme de deux carrés.*

Si p est un nombre premier $4 - 1$, les mêmes entiers se partagent en $\frac{p-3}{4}$ groupes de quatre nombres complémentaires ou associés, et de plus distincts ; car autrement on aurait plus d'une fois $x(p - x) \equiv 1$. On ne peut donc écrire $x^2 + 1 \equiv 0$ et *aucun nombre premier* $4 - 1$ *ne divise une somme de deux carrés et à fortiori ne peut être une somme de deux carrés.*

Ainsi *les seuls nombres premiers* $4 + 1$ *divisent* $x^2 + 1$, et même $y^2 + \xi^2$, en faisant $x\xi \equiv y$. Or dans ce cas, le satin est formé de carrés ayant tous p pour côté et inclinés sur les axes : p est donc lui-même de la forme $x^2 + y^2$ et on a la démonstration de ce théorème de Fermat : *tout nombre premier* $4 + 1$ *est décomposable en une somme de deux carrés,* — en même temps que la décomposition de p. (Ed. Lucas).

On peut remarquer en outre que pour $p = 4 - 1$, les entiers 1, 2, 3, ... $p - 1$ se partagent en $\frac{p-3}{4}$ groupes de quatre termes g, γ, $p - g$, $p - \gamma$, tels que $g\gamma \equiv t$, et un groupe h et $p - h$ tel que $h^2 \equiv t$ ou $h(p - h) \equiv t$. Ainsi, *pour* $p = 4 - 1$, *on a, quelque soit* t, *l'une ou l'autre des deux congruences* $x^2 \equiv t$, $x^2 \equiv - t$. Mais de t à $p - t$, il y a au moins deux valeurs, s, $s + 1$, qui donnent l'une $y^2 \equiv s$, $z^2 \equiv -(s + 1)$; d'où, en additionnant, $y^2 + z^2 + 1 \equiv 0$, ce qui démontre cette proposition d'Euler : *le nombre premier* $p = 4 - 1$ *divise toujours une somme de trois carrés, dont l'un est l'unité.*

23. Désignant par 1, a, b, ... $n - 1$, les $\varphi(n)$ nombres plus petits que n et premiers avec lui ; traçons dans le quinconce module n, les droites $y = x$, $y = ax$, $y = bx$, ... et notons

ces droites par les indications 1, a, b, ... (fig. 10 et 11) : on aura la *table de division* (*mod.* n)[1], de M. Arnoux (*F. Arith.*,

8	4				2	7				5	1
7	8				4	5				1	2
6	3	2	5	8	6	3	1	4	7	6	3
5	7				8	1				2	4
4	2				1	8				7	5
3	6	1	4	7	3	6	2	5	8	3	6
2	1				5	4				8	7
1	5				7	2				4	8
1	2		3		4	5		6		7	8

Fig. 10

Paris 1894). Il est aisé de voir que le nombre (x, y) satisfait à la condition $x(x, y) \equiv y$, ce qui montre qu'il n'est autre

12	6	4	3	5	2	11	8	10	9	7	1
11	12	8	6	10	4	9	3	7	5	1	2
10	5	12	9	2	6	7	11	4	1	8	3
9	11	3	12	7	8	5	6	1	10	2	4
8	4	7	2	12	10	3	1	11	6	9	5
7	10	11	5	4	12	1	9	8	2	3	6
6	3	2	8	9	1	12	4	5	11	10	7
5	9	6	11	1	3	10	12	2	7	4	8
4	2	10	1	6	5	8	7	12	3	11	9
3	8	1	4	11	7	6	2	9	12	5	10
2	1	5	7	3	9	4	10	6	8	12	11
1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Fig. 11

que le quotient par x, du nombre y augmenté d'un certain multiple de n.

Cette table jouit de nombreuses propriétés, dont celles-ci :

Elle donne immédiatement la solution de l'équation $ax - nz = b$.

Un terme quelconque est l'associé de son abscisse, car $x(x, 1) \equiv 1$.

L'une des diagonales ne contient que le terme 1, *et l'autre*,

[1] Entrevue par Euler et Gand.

le nombre n — 1. En général, *dans une même parallèle à une diagonale, deux termes également éloignés des extrêmes sont associés*, ce qui suit de ce que les relations

$$x(x\,,\,y) \equiv y \quad \text{et} \quad y(y\,,\,x) \equiv x\,,\quad x(x\,,\,y) \equiv y$$
$$\text{et} \quad (n-y)(n-y\,,\,n-x) \equiv n-x$$

donnent par multiplication les suivantes

$$(x\,,\,y)(y\,,\,x) \equiv 1 \quad \text{et} \quad (x\,,\,y)(n-y\,,\,n-x) \equiv 1\,.$$

De même, *le produit de deux termes voisins dans la parallèle la plus voisine de la diagonale* $y \equiv x$ *est congru au terme de la deuxième parallèle compris entre ceux-ci*. En général, *si on considère un carré de termes* ABCD *ayant le sommet* A *sur cette diagonale, le produit des nombres situés aux sommets* B, C, *est congru à celui du sommet* D, c'est-à-dire qu'on a :

$$(x\,,\,n-x+k)(x+k\,,\,n-x) \equiv (x+k\,,\,n-x+k)\,.$$

24. Si on déplace les colonnes de la table de division (mod n), de telle manière que les nombres de la rangée inférieure soient à leurs places naturelles, on aura la *table de multiplication* (mod n), du même auteur, et dont un terme

8	7		3	4		3	1
7	5		1	8		4	2
6	3		6	3		6	3
5	1		2	7		8	4
4	8		7	2		1	5
3	6		3	6		3	6
2	4		8	1		5	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Fig. 12.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Fig. 13.

quelconque est défini par la relation $(x, y) \equiv xy$. La g^e colonne de la première table est devenue la γ^e de la seconde, γ étant l'associé de g (fig. 12 et 13).

Les coordonnées du terme 1 *sont des nombres associés*, puisque, dans ce cas, on a $xy \equiv 1$.

Les nombres de la diagonale $y = x$ *sont les résidus de* n, *et ceux de l'autre diagonale, leurs compléments à* n.

25. GAUSS, le premier, s'est avisé du rôle que peut jouer le quinconce pour représenter les lois des nombres entiers, quantités essentiellement discontinues auxquelles la géométrie ne semble pas, à priori, pouvoir s'appliquer. Il paraît même avoir, par ce moyen, fait quelques-unes de ses découvertes, entre autres celle de la composition des formes.

EISENSTEIN ainsi que HERMITE et MINKOWSKI ont également utilisé le même moyen et se sont rencontrés avec Gauss en plusieurs points.

BRAVAIS a employé les quinconces du plan et de l'espace, en vue de ses études cristallographiques (*J. E. P.*, 1850).

LEBESGUE s'en est servi pour expliquer la formation des tables de diviseurs numériques (*Tables*..., 1862).

Mais c'est surtout GAND qui, par sa théorie des satins, en a montré l'importance, tant comme figuration du lemme fondamental, que par celle des propriétés des formes $x^2 - 1$ et $x^2 + 1$. Son objectif était simplement la régularisation des procédés empiriques suivis jusque-là dans l'industrie textile ; mais Ed. LUCAS a repris cette théorie au point de vue mathématique et avait projeté d'écrire une *Géométrie du tissage*, dont on n'a que quelques aperçus[1].

Comme cela a été dit plus haut, la théorie générale du quinconce a été poursuivie ces dernières années jusque dans les applications les plus élevées de l'arithmétique. On étudiera avec fruit sur ce sujet la *Neuere Zahlentheorie* de BACHMANN (Leipzig, 1907).

L'idée de Thiele, de représenter les résidus quadratiques imaginaires[2] ne paraît pas avoir fixé l'attention, autant qu'elle le méritait : toutefois ce qui en a été dit plus haut semble suffisant pour faire connaître ce qui pourrait en être dit dans un traité élémentaire.

A. AUBRY (Dijon).

[1] Il a montré aussi les rapports de cette théorie avec celle de certains carrés magiques qu'il a appelés diaboliques.

[2] Il a aussi montré à représenter les résidus cubiques, en employant trois directrices faisant entre elles des angles de 60°.

UNE CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE COMME LIEU DE POINTS ET COMME ENVELOPPE

Une considération de l'hyperboloïde de rotation à une nappe m'a fourni quelques relations qui peuvent être employées pour une construction simple de l'hyperbole (deux axes $2a$ et $2b$ étant donnés) et, en même temps, pour la construction des tangentes dans les points déterminés de la courbe.

Comme les constructions connues de l'hyperbole et de ses tangentes ne sont pas nombreuses, je donne ici encore cette construction nouvelle en espérant qu'on pourra en faire usage dans l'enseignement.

Soit P un point de l'hyperbole, ayant x_1, y_1 comme coordonnées; désignons par a et b les demi-axes de la courbe. La tangente en P

$$(t) \qquad b^2 x_1 x - a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$$

coupe l'axe a (qui est situé sur l'axe des x) en un point T, ayant les coordonnées

$$x = \frac{a^2}{x_1}, \qquad y = 0 .$$

La droite $x = \frac{a^2}{x_1}$ (parallèle à l'axe des y) coupe le cercle k, décrit du centre O avec a comme rayon, en deux points, dont l'un seulement (T_1) sera pris en considération. Les coordonnées du point T_1 seront, par rapport à l'équation

$$(k) \quad x^2 + y^2 = a^2 ,$$

les suivantes :

$$x = \frac{a^2}{x_1} . \qquad y = -\frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} ,$$

La droite de jonction PT_1 aura l'équation :

$$(PT_1) \quad y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}{x_1^2 - a^2}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

Elevons en T_1 la perpendiculaire (g) à PT_1 ; la droite g aura l'équation

$$y + \frac{a}{x_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1 y_1 + a\sqrt{x_1^2 - a^2}}\left(x - \frac{a^2}{x_1}\right) .$$

En posant ici $y = 0$, nous obtiendrons l'abscisse du point (M) d'intersection de la droite g avec l'axe des x. On aura

$$a y_1\sqrt{x_1^2 - a^2} + \frac{a^2}{x_1}(x_1^2 - a^2) = (a^2 - x_1^2)x + (x_1^2 - a^2)\frac{a^2}{x_1} ,$$

alors, en posant ici

$$a y_1 = + b\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

(ce qui résulte de l'équation de l'hyperbole donnée), nous aurons la distance cherchée $\overline{OM}$

$$x = \overline{OM} = -b .$$

Toutes les perpendiculaires g passent, par conséquent, par le point fixe (M).

Déterminons maintenant le point (T_2) commun aux rayons OT_1 et PN, où N est le point sur l'axe des x, ayant pour abscisse $\overline{ON} = b$.

Nous aurons

$$(OT_1) \quad y = -\frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} x ;$$

l'autre rayon PN, comme droite passant par les points avec les coordonnées (x_1, y_1), $(b, 0)$, aura l'équation

$$(PN) \quad y - y_1 = \frac{-y_1}{b - x_1}(x - x_1) .$$

En éliminant y entre les deux équations dernières, on obtient l'abscisse du point cherché T_2 :

$$x' = \frac{aby_1}{(x_1 - b)\sqrt{x_1^2 - a^2} + ay_1} ,$$

et si l'on pose ici comme précédemment :

$$ay_1 = +b\sqrt{x_1^2 - a^2} ,$$

on aura

$$x' = \frac{b^2}{x_1} .$$

L'ordonnée y' du point T_2 sera obtenue à l'aide de l'équation de la droite OT_1 en y remplaçant x par sa valeur x' déterminée ci-dessus, or :

$$y' = -\frac{b^2}{ax_1}\sqrt{x_1^2 - a^2} .$$

La somme des carrés de x' et y' donne :

$$x'^2 + y'^2 = \frac{b^4}{a^2} .$$

Le point T_2 décrit alors un cercle k' dont le rayon est la grandeur $\frac{b^2}{a}$, c'est-à-dire une fonction des demi-axes seuls de l'hyperbole.

La longueur $\frac{b^2}{a} = r$ peut être construite aisément, parce

qu'on a

$$\frac{r}{b} = \frac{b}{a} = \tang \varphi ,$$

où φ désigne la moitié de l'angle asymptotique.

Si l'on tire par le point N la parallèle à une asymptote, le point Q, commun à cette parallèle et à l'axe des y, sera un point de la circonférence du cercle k'.

Voici donc comment on procédera dans la détermination constructive d'un point P de l'hyperbole, donnée par ses axes. On porte sur l'axe réel les segments $OM = ON = b$, et on décrit les deux cercles k et k' restant fixes pendant toute la construction. En faisant passer une droite quelconque (p) par le centre O, on obtient les points T_1 et T_2 comme intersections respectives avec les circonférences k et k'. Si l'on tire les droites de jonction T_1M et T_2N et si l'on élève à la première une perpendiculaire (s) au point T_1, les deux droites T_2N et s donnent en leur point commun P *un point* de l'hyperbole. Le pied T de la perpendiculaire, abaissée du point T_1 sur l'axe réel, joint au point P donne la *tangente t* de la courbe au point P.

La droite T_2N étant une fois tirée, on déterminera aussi le deuxième point d'intersection T_2' avec la circonférence k', et on obtiendra par le même procédé tout de suite encore un autre point de l'hyperbole.

Une tangente t de l'hyperbole étant donnée, on détermine le point de contact P de la manière suivante. On élève une perpendiculaire sur l'axe réel par le point d'intersection de cet axe avec la tangente t. La perpendiculaire coupe le cercle k au point T_1. Si l'on joint ce point T_1 au point M et si l'on élève une perpendiculaire (s) sur T_1M au point T_1, cette perpendiculaire coupe la tangente au point de contact cherché P.

On ne peut pas employer cette construction si l'on donne $a = b$; la construction sera d'autant plus précise que la différence $\pm (a - b)$ est plus grande (pour les deux cas, où l'on donne $a > b$ ou $a < b$).

Georges MAJCEN (Agram).

RÉGIONS DÉFINIES PAR UNE HYPERBOLE

---

1. **Objet.** — Dans cette Note je me propose de construire la théorie de l'hyperbole sans faire aucun appel à l'intuition graphique; je me fonderai uniquement pour cela sur des propositions établies — ou supposées telles — dans les premiers livres de géométrie. Parmi ces propositions, il en est de nombreuses qui ont pour objet des propriétés d'*ordre* (points sur une droite, sur un cercle, droites autour d'un point) de *positions relatives* des figures élémentaires (points, droites, cercles) et l'*énumération complète* des cas possibles de figure. Toutes ces propositions se rattachent au deuxième groupe d'axiomes d'Hilbert.

Peut-être cet essai intéressera-t-il ceux qui réfléchissent sur la portée de l'enseignement de la géométrie élémentaire et qui ont pris parti dans le débat actuel institué sur le sens qu'il convient de lui donner.

J'espère que « logiciens » et « intuitifs » trouveront un *document* dans ce chapitre de géométrie élémentaire, édifié *logiquement* sur des matériaux fournis par l'*intuition*, penseront ceux-ci, par le raisonnement déductif déjà en fonction, diront les autres.

Et serait-il téméraire de penser qu'un exposé de ce genre pourrait être fait — après d'autres leçons — devant de bons élèves de mathématiques élémentaires afin de leur montrer comment on peut traiter certaines questions que leur caractère même semble mettre à part des problèmes qu'ils sont habitués à résoudre ? Ce serait une excellente occasion de leur dire que cette étude est un problème simple de *géométrie de situation* (topologie des courbes).

Comme la matière de cette étude est très élémentaire, je

me bornerai à une rapide esquisse sans souci de compléter les démonstrations quand une indication succinte pourra suffire ; je demande cependant aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique* la permission de ne pas perdre patience si je prends la peine — en leur donnant celle de me suivre — d'étudier complètement les cas, justement les plus simples.

Uniformément, au début de chaque problème, je rappellerai brièvement les propositions que j'utilise ; j'espère donner ainsi plus de concision et de clarté à mon exposé.

2. **Définitions.** — L'*hyperbole* est le lieu des centres des cercles tangents à un cercle fixe, le *cercle directeur* que je désignerai par ($C_{F'}$) et passant par un point fixe extérieur, le *foyer* F. J'appellerai (F), (E), (F') les trois régions et (*f*), (*f'*) les deux branches de l'hyperbole.

Propositions rappelées. **A.** — α) L'un par rapport à l'autre, deux cercles peuvent être : extérieurs, tangents extérieurement, sécants, tangents intérieurement, intérieurs, soit *cinq positions.*

β) Quand on *distingue* les deux cercles, il y a lieu de considérer deux circonstances pour les deux derniers cas, suivant que le premier est intérieur ou extérieur au deuxième.

γ) Si l'on astreint l'un des cercles à passer par un point extérieur à l'autre cercle, une seule circonstance peut se produire. Dans ces conditions il y a donc seulement cinq cas possibles.

Enumération des domaines. — Soit P un point quelconque du plan. J'aurai constamment à considérer et je désignerai par C_P le cercle de centre P passant par F. Le cercle C_P pourra occuper par rapport au cercle directeur $C_{F'}$ l'une des cinq positions rappelées ; chacune d'elle sera caractéristique des cinq domaines du point P.

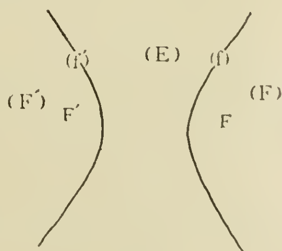


Fig. 1.

En voici l'énumération : le cercle C_P est 1°, extérieur à $C_{F'}$, le point P est dans la région intérieure (F) contenant F ; 2°, tangent extérieurement à $C_{F'}$. P est sur la branche (*f*) voisine de F ; 3°, sécant

à $C_{F'}$. P est dans la région extérieure E); 4°, tangent intérieurement à $C_{F'}$. P est sur la branche *f*) voisine de F'; 5° il renferme $C_{F'}$. P est dans la région intérieure F') contenant F'.

Remarque. L'équivalence de ces définitions avec celles qu'on adopte ordinairement est évidente.

3. **Problème fondamental.** — Position d'une droite par rapport à l'hyperbole. Intersection.

Propositions rappelées. **B.** — Je considère un cercle $C_{F'}$, un point extérieur F et une droite D. J'appelle Φ le symétrique de F par rapport à D. Soit P un point mobile se déplaçant dans un certain sens sur la droite D et, comme ci-dessus C_P le cercle de centre P assujetti à passer par F, donc par Φ. Pour étudier la position relative du cercle fixe $C_{F'}$ et du cercle mobile C_P, je distingue deux cas :

1° D ne passe pas par F';

2° D passe par F'.

B_1. *Premier cas.* J'utilise les propriétés de l'*axe radical.*

α) Un cercle est déterminé par un point et par l'axe radical qu'il doit avoir en commun avec un cercle déjà tracé.

La position relative de ces éléments suffit pour caractériser la position du cercle ainsi défini par rapport au cercle tracé.

β) Tous les axes radicaux des couples $C_{F'}$, C_P [$C_{F'}$ est fixe, C_P passe par deux points fixes] passent par un point fixe I situé à distance finie sur FΦ. Pour faire la *discussion* des divers cas possibles, il est avantageux de faire jouer à F et Φ des rôles dissymétriques[1]; j'en omets ici le détail, j'en donnerai seulement les résultats ci-dessous en les utilisant.

γ) Ayant déterminé la position du point I et connaissant le centre P du cercle mobile C_P on construit l'axe radical d'un couple $C_P C_{F'}$ en abaissant de I une perpendiculaire sur F'P.

δ) On déduit de cette construction que l'axe radical tourne de 180° autour de I, dans un sens déterminé, à partir de la position IF, quand P décrit toute la droite dans un certain sens. La discussion des différentes circonstances qui peuvent

[1] Cf Guichard, *Traité de géométrie*, n° 378.

se produire constitue, relativement au premier cas, l'objet même du « problème fondamental ».

B$_2$. *Deuxième cas*. L'étude peut être faite ici à partir des propriétés de la *ligne des centres;* elle se conduirait d'une manière tout analogue.

α) Pour connaître la position relative de deux cercles il suffit d'étudier la position de leurs intersections avec leur ligne des centres.

β) D est constamment la ligne des centres des couples $C_{F'}$, C_P.

γ) Quand on connaît la position de P il est très simple de construire les deux points du cercle C_P situés sur D.

δ) Cette construction permet de suivre le mouvement des points sur l'axe quand P décrit la droite D dans un certain sens.

C. — Je considère un cercle $C_{F'}$ et les deux tangentes issues d'un point extérieur F.

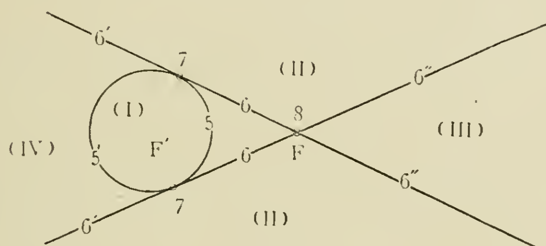


Fig. 2.

α) Le cercle est tout entier à l'intérieur d'un angle des tangentes.

β) Une droite menée par le sommet F, à l'intérieur de l'angle, rencontre le cercle, menée à l'extérieur, elle ne rencontre pas le cercle.

γ) Les réciproques sont vraies.

δ) Il serait aisé, dans la figure étudiée, d'énumérer les régions, leurs frontières et les points remarquables des frontières[1].

[1] Voir Guichard, *Compléments de géométrie*, p. 294.

Discussion. — Je définis et je caractérise les positions diverses de D par celles de Φ.

Quand D passe par F, Φ coïncide avec F, il faudra se donner la perpendiculaire en F à D et les mêmes raisonnements demeurent.

J'écarterai le cas où D passe par F′, Φ se trouvant sur le cercle de centre F′ et passant par F ; s'il en était ainsi, on ferait une discussion semblable à la suivante ; celle-ci est relative au premier cas, celle-là se rapporterait au second. [Voir ci-dessus les propositions **B**.]

La discussion [$\mathbf{B}_1\,\beta$] amène à étudier Φ dans chacun des huit domaines définis ci-dessus [**C** δ].

J'examinerai seulement les deux premiers cas ; la méthode est uniforme.

1er cas. Φ est à l'intérieur du cercle $C_{F'}$: région (I).

Tout cercle C_P qui passe par Φ coupe nécessairement le cercle $C_{F'}$ [voir **D** γ]. Donc tous les points de D sont extérieurs ; ils appartiennent à (E).

La droite est dite *extérieure*.

2me cas. Φ est à l'extérieur de l'angle des tangentes : région (II). La droite FΦ ne rencontre pas le cercle [**C** β]. Le point I centre radical fixe est à l'extérieur du cercle [**C** α]. Du point I je mène les tangentes au cercle, la droite IF est située à l'extérieur de l'angle des tangentes [**C** γ]. Quand P se déplace sur D dans un certain sens, l'axe radical tourne de 180° autour de I à partir de la position IF dans un sens déterminé [$\mathbf{B}_1\,\delta$] et, d'après la remarque [$\mathbf{B}_1\,\alpha$], les deux cercles C_P et $C_{F'}$ sont successivement : *intérieurs*, *tangents intérieurement*, *sécants*, *tangents extérieurement*, *extérieurs*, c'est-à-dire que le point P se trouve successivement dans les régions ou sur les branches : (F′) (*f*′) (E) (*f*) (F).

Si P avait cheminé en sens inverse, on eût trouvé dans l'ordre inverse (F) (*f*) (E) (*f*′) (F′).

On dit que la droite est *sécante* aux deux branches.

On discuterait de même les cas 3, 4, 5, 6 et 7 en ne distinguant pas les domaines marqués d'un accent (voir la fig. ci-dessus). Le 8me cas est parasite et se ramène aux précédents 2, 3 ou 6.

Après avoir étudié les positions de Φ écartées au début, on a enfin le tableau complet suivant.

Tableau résumant la discussion. — La droite est

1° *extérieure* : ... (E)

2° *sécante* aux deux branches : (F) (f) (E) (f′) (F′)

3° *sécante* à la branche (f) : (E) (f) (F) (f) (E)

4° *sécante* à la branche (f′) : (E) (f′) (F′) (f′) (E)

5° *tangente* à l'une ou l'autre branche : (E) (f) (E) ou (E) (f′) (E)

6° *parallèle* à l'une ou l'autre asymptote : (E) (f) (F) ou (E) (f′) (F′)

7° *asymptote* à la courbe : (E).

Remarque. La symétrie entre F et F′, voilée dans toute l'étude précédente, réapparaît dans ce tableau final.

Corollaires. Propriétés des *régions* et des *branches*.

I. Si le point P appartient à la région (F) et si le point Q est extérieur à cette région, le segment PQ rencontre la branche (f), car la droite qui supporte le segment PQ peut occuper seulement l'une ou l'autre des positions 2, 3, 6. De plus, le point d'intersection borne l'ensemble des points situés dans (F) : la branche (f) est dite la *frontière* de la région (F).

II. Si P et Q sont dans la région (F) ou sur la branche (f), tout le segment PQ est contenu dans (F). On dit que le domaine (F) est *convexe*. Le domaine (F′) jouit de la même propriété.

III. On verrait de même que la frontière de la région (E) est composée des deux branches (f) et (f′). Si P et Q sont sur les deux branches, le segment PQ est tout entier dans (E). Pour compléter l'étude de (E), il est nécessaire de résoudre au préalable un second problème.

4. **Autre problème.** — Positions diverses des droites issues d'un point. Tangentes [voir la définition dans le tableau].

Propositions rappelées. **D.** — α. Quand une droite D tourne de 180° autour d'un point fixe P, le symétrique Φ d'un point fixe F décrit toute une circonférence C_P de centre P passant par F. Le déplacement angulaire de Φ autour de P est de même sens et double du déplacement angulaire de la droite.

β. Quand deux cercles se coupent, chaque circonférence est partagée en deux arcs par les deux points d'intersection; l'un des arcs est intérieur, l'autre est extérieur au second cercle.

γ. Réciproque. Quand une circonférence passe par deux points dont l'un F est à l'extérieur, l'autre Φ à l'intérieur d'une deuxième circonférence, les deux cercles se coupent.

Discussion. — Les sept cas du tableau complet peuvent se résumer dans les trois suivants :

1° Φ est à l'intérieur du cercle directeur $C_{F'}$; la droite D est *extérieure* à l'hyperbole.

2° Φ est sur le cercle directeur $C_{F'}$; la droite D est *tangente* à l'hyperbole.

3° Φ est à l'extérieur du cercle; la droite D est *sécante* à l'hyperbole.

De même, à cause de la symétrie de F et F', on peut réduire à trois les positions d'un point par rapport à une hyperbole : le point est intérieur, sur la courbe ou extérieur. Dans le premier cas, on montre que toutes les droites sont sécantes, dans le second, qu'on peut tracer une tangente, toutes les autres droites sont sécantes; enfin dans le troisième, qu'il y a deux tangentes distinctes, des droites sécantes et des droites extérieures. Je vais l'examiner en détail.

Comme le point P est dans (E), le cercle C_P coupe le cercle $C_{F'}$, et d'après la remarque [**D** β] les deux points d'intersection limitent sur C_P deux arcs dont l'un est intérieur, l'autre extérieur à $C_{F'}$. Or, quand D tourne autour de P de 180° dans un certain sens, Φ décrit tout le cercle C_P dans un sens déterminé [**D** α] en parcourant successivement les deux arcs. Les droites sécantes sont donc comprises dans un angle des tangentes, les droites extérieures dans l'autre. Cette propriété, démontrée ici pour l'hyperbole, a été admise pour le cercle [C_β].

Corollaire IV. Si P et Q appartiennent à la région (E) ou à sa frontière (*f*) (*f'*), on peut tracer de P à Q un chemin continu tout entier contenu dans (E), sauf peut-être les extrémités.

Je distingue trois cas.

1° L'un des deux points est à l'intérieur du domaine (E), soit Q. On peut toujours tracer par P une droite p dont tous les points — sauf peut-être P — sont extérieurs, et par Q une droite extérieure q seulement assujettie à rester dans un angle, on pourra donc la choisir non parallèle à p. Des segments convenables de p et q réalisent le chemin cherché.

2° Les deux points sont sur la même branche ; les tangentes en P et Q ne sont pas parallèles [la démonstration complète en serait aisée] et fournissent un chemin satisfaisant.

3° Les deux points sont sur les deux branches ; le segment PQ est entièrement dans (E) [voir corollaire III].

On énonce la propriété précédente en disant que la région (E) est *d'un seul tenant*[1].

Remarques. I. On peut faire une première étude des régions de l'hyperbole en n'utilisant que des droites issues d'un foyer[2] ; dans l'analyse plus complète qui précède, j'ai construit des chemins continus avec des droites quelconques ; là se borne la puissance des méthodes élémentaires.

II. On pourrait établir d'une manière aussi entièrement déductive toutes les propriétés de l'hyperbole.

P. Poyet (Bordeaux).

[1] Voir Hadamard, *Géométrie dans l'espace*. Ex. 772, p. 217.

[2] Voir par exemple Vacquant et Macé de Lépinay, *Éléments de géométrie*, p. 514 et suiv.

LE PROBLÈME DE TRANSON EN GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

Étant sur le point de faire paraître mes recherches personnelles sur le *Problème de Transon*, ainsi que je l'ai annoncé dans diverses Notes publiées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1910, j'ai pensé qu'une exposition de l'histoire de ce problème important pourrait offrir un certain intérêt pour les lecteurs de l'*Enseignement mathématique*. Je vais donc résumer ici les recherches de Transon, de M. Darboux et de Lie.

Le développement des études de géométrie réglée, en ce qui concerne les complexes, est certainement en retard par rapport à la théorie des congruences de droites, notamment du point de vue des propriétés métriques : la théorie des congruences, en effet, a donné lieu à de nombreuses recherches se rapportant surtout à la géométrie projective. « Les « propriétés infinitésimales des congruences, écrit M. G. « Kœnigs[1], sont connues depuis beaucoup plus longtemps « que celles des complexes. Elles se sont présentées aux « géomètres dès les premières recherches sur la théorie des « surfaces. Dans son *Traité de géométrie*, M. Darboux leur a « consacré une place importante et a ajouté à l'intérêt que « les géomètres leur prêtaient déjà en les rattachant aux « recherches de Laplace sur les équations linéaires aux « dérivées partielles du second ordre. »

Parmi les quelques recherches qui sont relatives aux propriétés infinitésimales des complexes, se trouve l'étude du problème considéré, pour la première fois en 1861, par Abel Transon et qui peut être énoncé ainsi : « *Un complexe étant donné, déterminer toutes les congruences de droites qui appartiennent à ce complexe et qui sont des congruences de*

[1] G. Kœnigs, *La géométrie réglée et ses applications*, ch. IV, § 66, (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI, 1892, p. 65).

normales ». Outre le grand intérêt géométrique que présente cette question, elle offre aussi un intérêt physique, puisqu'elle est équivalente à la détermination des systèmes de rayons lumineux jouissant d'une propriété donnée. Au même problème de Transon, Lie[1] rattache d'ailleurs le problème qui consiste à déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les tangentes à une famille à un paramètre de géodésiques appartiennent à un complexe de droites donné.

Dans son *Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace, suivant une loi continue*[2], Transon attache à tout point M (x, y, z) de l'espace une droite D dont les cosinus directeurs X, Y, Z sont trois fonctions données des coordonnées de M. Si l'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

est intégrable, on sait que la totalité des droites données se répartit en groupes respectivement normaux aux différentes surfaces particulières que renferme son intégrale générale. Mais la répartition des droites en de tels groupes n'est nullement subordonnée à l'intégration de cette équation : quelles que soient les fonctions données, il y a toujours une infinité de manières de répartir l'ensemble donné, lorsque c'est un complexe, en groupes normaux à des surfaces distinctes et dans le cas même où l'équation ci-dessus est intégrable, la répartition qu'elle procure n'est qu'un mode particulier entre une infinité d'autres. Toute surface (S) — que Transon appelle *résolvante* — intégrale de l'équation linéaire

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)p + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)q = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

est un lieu de *points de départ* M de rayons D d'une certaine congruence de normales. Il en résulte qu'à toute intégrale de cette dernière équation correspond une congruence de normales appartenant au complexe et réciproquement.

---

[1] Sophus Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differientialgleichungen* (*Math. Ann.*, V, 1872, § 52).

[2] *Comptes rendus*, 1861, LII, p. 245-247. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1861, XXII, 38e cahier, p. 195-208.

Tel est le résumé du Mémoire remarquable de TRANSON, Mémoire qui fut l'objet d'un rapport de CHASLES[1].

L'équation linéaire de TRANSON est d'une forme digne d'intérêt : je ferai remarquer que c'est l'équation des surfaces de tourbillon dans le champ de vecteurs (X, Y, Z) ; et j'ai pu obtenir cette équation en appliquant le théorème d'AMPÈRE-STOKES. Les caractéristiques sont les lignes de tourbillon et, dans le cas du complexe tétraédral convenablement défini, j'ai obtenu leurs équations sous la forme des trois équations d'EULER pour le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et qui n'est soumis à aucune force. L'intérêt de la méthode de TRANSON est donc grand, d'autant plus que j'ai pu obtenir une équation plus générale pour des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques.

Mais, à côté de certains avantages, se trouvent de très grands inconvénients, provenant principalement du choix des points de départ des droites du complexe lorsque celui-ci est défini, non plus analytiquement, mais géométriquement. J'ai bien pu obtenir des règles permettant de choisir des points de départ, dans divers cas particuliers, mais lorsqu'on se trouve en présence d'un complexe tel que le complexe de PAINVIN, on est d'abord embarrassé : il ne s'agit pas, en effet, de choisir des points de départ quelconques, mais ce qu'il ne faut pas perdre de vue c'est l'équation finale qui doit être simultanément simple et élégante. La méthode de TRANSON échoue totalement dans le cas du complexe de PAINVIN, alors, que par une autre méthode, j'ai pu obtenir une équation, non plus linéaire, il est vrai, mais possédant une intégrale quadratique ; le problème est alors équivalent à la détermination des géodésiques pour un certain élément linéaire de surfaces harmoniques.

La définition d'un complexe à l'aide des points de départ présente aussi l'inconvénient de ne pas toujours fournir un complexe, mais parfois une congruence de droites : si l'on se donne, par exemple, une quadrique et si à chaque point de l'espace, on attache les focales du cône circonscrit à la

[1] *Comptes rendus*, 1861, LII, p. 1013-1018.

quadrique, on constitue une congruence isotrope remarquable.

Dans le cas où la méthode de TRANSON est praticable, on obtient, non pas les surfaces dont les normales appartiennent au complexe, mais les surfaces résolvantes qui, malgré l'interprétation géométrique donnée par OSSIAN BONNET[1], ont des rapports plutôt lointains avec le complexe. Il est d'ailleurs bien naturel qu'il en soit ainsi et que les surfaces résolvantes ne soient pas intimement liées au complexe, puisque les surfaces dépendent du choix des points de départ, lequel choix est arbitraire, dans le cas d'un complexe défini géométriquement.

Il convenait donc de reprendre le problème sous un autre jour et d'avoir principalement en vue la détermination des surfaces dont les normales appartiennent au complexe. Ces surfaces, pour abréger, je les désignerai sous le nom de *surfaces trajectoires*. Le premier, en 1870, M. DARBOUX[2] énonça incidemment le théorème suivant : *Étant donné un complexe de droites dont on connaît* a priori *une famille à un paramètre de surfaces trajectoires, non parallèles, la solution complète du problème de Transon pour le complexe considéré s'obtient sans introduction de nouvelles quadratures*. Des conséquences de ce théorème fondamental ont été développées par M. DARBOUX lui-même dans deux Communications récentes à l'Académie[3] « *Sur les congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe* », qui, comme l'indique le titre, contiennent des résultats plus généraux et relatifs aux congruences de courbes quelconques.

L'importance du théorème de M. DARBOUX n'a point échappé à SOPHUS LIE[4] qui rattacha l'étude du problème de TRANSON à ses recherches sur les transformations de contact. Sous la dénomination de *problème des normales*, LIE[5] considéra le problème de TRANSON et établit que l'équation aux dérivées

---

[1] *Comptes rendus*, LII, p. 1082.

[2] G. DARBOUX, « *Sur les systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* » (Bulletin des Sciences mathématiques, 1870, p. 351).

[3] Séances des 15 et 22 novembre 1909.

[4] LIE et SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 273 et p. 675-685.

[5] LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe*, (M. A. 1872).

partielles du premier ordre dont dépendent les surfaces trajectoires est caractérisée par son invariance dans la transformation infinitésimale constituée par la dilatation. Je ferai remarquer que cela revient à dire que l'équation du problème de Transon, pour un complexe quelconque, est l'équation du premier ordre la plus générale qui possède une intégrale développable isotrope.

Tel est le résumé des recherches qui furent faites sur le problème de Transon, pour un complexe quelconque. Il convient d'observer qu'en ce qui concerne des complexes particuliers on connaît, indépendamment de toute théorie générale, des surfaces dont les normales appartiennent à ces complexes : c'est ainsi que Monge[1] avait déterminé, bien antérieurement à Transon, les surfaces dont les normales appartiennent au complexe spécial des tangentes à une surface développable, ou à une sphère. Plus généralement pour un complexe spécial quelconque, le problème, qui est équivalent à la détermination des lignes géodésiques de la surface de singularité, peut être considéré comme ayant été résolu par Geisenheimer, dans son Mémoire *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface*[2], et par tous les géomètres qui se sont occupés du problème des géodésiques.

Dans le cas du complexe linéaire, le problème fut résolu par Lie et par M. É. Picard qui, dans sa Thèse de Doctorat (1877, p. 31), établit d'une manière purement géométrique que les surfaces trajectoires sont des hélicoïdes.

Après ce résumé succinct de l'historique du problème de Transon, je ne crois pas devoir abuser en résumant ici des recherches que les lecteurs pourront lire dans un Mémoire plus complet. Ils trouveront d'ailleurs des exemples de problèmes de Transon, résolus en appliquant le théorème de M. Darboux, dans les Notes parues dans les *Nouvelles Annales* de 1910 auxquelles je faisais allusion au début de cet article.

É. Turrière (Alençon).

---

[1] *Application de l'analyse à la géométrie*, p. 246-321.
[2] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1872.

SUR LES FONCTIONS SYNECTIQUES

L'objet de cette Note est de mettre en évidence une interprétation géométrique, ressortissant à la Géométrie réglée, des relations qui caractérisent les fonctions synectiques.

Étant donné un système d'axes rectangulaires $O(x, y, z)$, de chaque point m de coordonnées x, y, dans le plan Oxy, est supposée partir une droite d de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3 :

$$p_1 = P \cos \theta + Q \sin \theta \,,$$
$$p_2 = P \sin \theta - Q \cos \theta \,,$$
$$p_3 = \sqrt{1 - P^2 - Q^2} \;;$$

P et Q, dans ces formules, sont deux fonctions, quelconques pour l'instant, des variables x et y; quant à θ, c'est un paramètre constant et quelconque.

Les droites d ainsi définies constituent, pour des fonctions P et Q données et pour chaque valeur du paramètre θ, une congruence de droites; lorsque θ varie, la congruence précédente se déforme en engendrant un complexe de droites; ce complexe peut être défini indépendamment de la considération des congruences : il est constitué par les génératrices de cônes de révolution de sommets situés dans une région du plan Oxy, d'axes parallèles à Oz, et dont les demi-angles V aux sommets sont déterminés par la formule

$$\sin^2 V = P^2 + Q^2 \,.$$

Le paramètre θ ayant une valeur fixée, la congruence qui lui correspond n'est pas une congruence de normales, dans le cas général où les fonctions P et Q sont quelconques. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'expression

$$p_1 dx + p_2 dy$$

soit une différentielle exacte, ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\sin\theta = 0.$$

Cette dernière relation est identiquement vérifiée quel que soit θ, lorsque P et Q sont liées par les conditions simultanées,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

et dans ce cas seulement. Il en résulte donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence des droites* d *soit une congruence de normales, pour toutes valeurs du paramètre* θ, *est que* P *et* Q *soient deux fonctions synectiques.* En d'autres termes, $P + iQ$ doit être fonction de la variable complexe $z = x + iy$.

Telle est la propriété qui constitue une interprétation géométrique des relations qui lient les fonctions synectiques. Je terminerai cette Note par une propriété du complexe des droites d.

Soit

$$P + iQ = f(z):$$

le complexe peut être envisagé comme défini par les génératrices du cône de révolution, de sommets situés dans Oxy, d'axes parallèles à Oz, de demi-angles aux sommets déterminés par la formule

$$\sin V = |f(z)|;$$

le point m est assujetti à l'unique condition d'appartenir à la région du plan Oxy pour laquelle le module de la fonction $f(z)$ est inférieur à l'unité. D'après ce qui précède, le complexe est engendré par une congruence de normales variable qui dépend d'un paramètre ; d'un théorème de M. Darboux, il résulte donc que toutes les congruences de

normales qui appartiennent à ce complexe, sont déterminables immédiatement, sans introduction de quadratures autres que celles qui pourraient figurer dans l'équation des surfaces trajectoires orthogonales des droites de la congruence associée au paramètre θ.

Quant à ces dernières surfaces, il est aisé de les déterminer. Soit M le point d'incidence de la normale d sur une des surfaces trajectoires, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point M; en introduisant la distance $\overline{mM} = \lambda$ inconnue et à déterminer, on a

$$X = x + \lambda p_1 , \quad Y = y + \lambda p_2 , \quad Z = \lambda p_3 ;$$

en utilisant la relation

$$p_1 dX + p_2 dY + p_3 dZ = 0 ,$$

il vient :

$$- d\lambda = (P dx - Q dy) \cos \theta + (Q dx + P dy) \sin \theta ;$$

de cette relation résulte l'expression de λ

$$2\lambda = - \left\{ e^{-i\theta} \int f(z)\, dz + e^{i\theta} \int f(z_0)\, dz_0 \right\} + \text{const} ,$$

dans laquelle z_0 désigne la variable complexe conjuguée de z; la distance λ est donc définie par la formule

$$\lambda = - \text{partie réelle de } [e^{-i\theta} \varphi(z)] + \text{const} ,$$

en introduisant la nouvelle fonction de variable complexe

$$\varphi(z) = e^{-i\theta} \int f(z)\, dz ,$$

afin de faire disparaître tout signe d'intégration dans les formules finales.

É. Turrière (Alençon).

DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉE

Dans tous les pays civilisés, on s'efforce actuellement d'introduire, dans les écoles moyennes, des éléments du Calcul différentiel et intégral qui, autrefois, était entièrement réservé à l'université. Dans ces écoles, on suit généralement les mêmes procédés que dans les cours universitaires, et l'on peut se demander si cette façon de faire est bien conforme au but poursuivi.

Tout d'abord, la notation présente déjà des difficultés[1], car dans l'expression $\frac{dy}{dx}$ ni dy, ni dx, ni la barre de fraction n'a de signification, mais seulement le symbole entier; on ne doit pas non plus conclure des règles concernant les fractions que $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$.

A ceci viennent se joindre immédiatement les règles sur la différentiation des fonctions de fonctions, $u \cdot v$ et $u : v$, de telle sorte que l'élève a l'impression qu'il s'agit d'un calcul tout nouveau n'ayant aucun rapport avec celui qu'il a vu précédemment. De même le calcul de

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

est facile, il est vrai, au point de vue mathématique, mais difficile à comprendre, car une vision claire du sujet fait encore défaut. Comme exemple classique, je choisis la tangente en un point donné. La détermination d'une direction exige dans tous les cas deux points, ou une portion de droite

[1] Voir dans cette Revue, t. I, p. 106 à 110, un article de M. H. Poincaré, sur la *Notation différentielle et l'enseignement*, dans lequel l'auteur recommande que l'on commence par la notation des dérivées. — *N. de la Réd.*

aussi courte que l'on veut du reste ; tout le calcul ne peut donc avoir un sens que si l'on utilise un point voisin du point donné, ou si la courbe se confond avec la tangente le long d'une petite portion de droite. Une méthode qui pose $\Delta x = 0$ me paraît obscurcir le véritable sens du problème. Il ne serait pas non plus permis de diviser par Δx lorsqu'on aurait $\Delta x = 0$. On rencontre donc ici une difficulté provenant de cette façon purement arithmétique de traiter la chose, difficulté qui ne disparaîtra pas par le calcul, mais seulement par l'axiome que l'erreur peut être rendue plus petite qu'une quantité quelconque si petite qu'elle soit. Il est remarquable que dans l'enseignement, on ne mentionne généralement pas l'axiome à cette place, ou, lorsqu'on le fait, comme par exemple dans Hessenberg[1], l'exposé qu'on en donne est trop peu clair pour les commençants.

Toutes ces difficultés se présentent aussi dans le calcul intégral, car la définition $F(x) = \int f(x)\,dx$ lorsque $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ suppose connue la notion de dérivée. Ajoutons à cela que l'on suppose parfois que la dérivée est donnée, comme par exemple, la vitesse ; mais dans la plupart des cas, c'est la *différentielle* qui forme le véritable point de départ. Il en est ainsi dans la détermination des moments de rotation et d'inertie et celle également des surfaces et des volumes. Ce sont là les raisons qui expliquent pourquoi le calcul intégral est beaucoup moins traité dans l'enseignement que le calcul différentiel, quoique tous deux présentent une égale importance. Mais comme nous ne nous occupons dans l'enseignement élémentaire que de fonctions qui sont développables en séries de puissances, nous pouvons faciliter l'accès au Calcul infinitésimal, si à côté de la dérivée nous considérons également la *différentielle*.

Le mot « *différentielle* » est employé dans un sens différent. Je ne parle pas des fameuses quantités qui sont plus petites que toutes les autres sans cependant être nulles,

---

[1] *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, 1906, p. 167, l'auteur écrit

$$\left(\frac{x-b}{x-a} - h' < q \quad \text{lorsque} \quad x - a < p\right)$$

ni des valeurs introduites par la définition $dy = f'(x) \cdot dx$; mais j'entends les petites quantités finies qui sont employées constamment en Physique, Astronomie, Géodésie et dans toutes les Mathématiques appliquées, par exemple, le travail pour un déplacement ds, soit $dW = Fds$; le moment statique $dS = dm \cdot r$. L'expression « petite » sera caractérisée par le fait qu'on pourra négliger dx^2 et $dx \cdot dy$ relativement à dx. Etant donné cette hypothèse, le calcul ne sera tout d'abord qu'une approximation ; mais il se présente très clairement et n'exige aucune règle spéciale. Par exemple :

1. — $y = \frac{a}{x}$ donne successivement

$$(y + dy)(x + dx) = a \ , \quad xdy + ydx = 0 \ , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{a}{x^2} \ .$$

2. — $y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$, $y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - a^2$,

$$y^2 + 2ydy - 2xy - 2xdy - 2ydx = -a^2 \ , \quad dy(y - x) = ydx \ ,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - x} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ .$$

Puis, lorsque l'importance du calcul aura été clairement établie par de nombreux exercices, on montrera qu'en choisissant un dx suffisamment petit (0,001, 10^{-6}, 10^{-10}, 10^{-100}...) l'erreur peut être rendue plus petite qu'une petite quantité quelconque, et que ce procédé, par conséquent ne fournit pas un résultat *approché*, mais bien *rigoureusement exact*. La notion d'intégrale vient alors faire directement suite à ce qui précède. Par exemple, pour la parabole $y = cx^2$, la surface d'une petite bande sera

$$dS = ydx + \frac{1}{2} dxdy = cx^2dx$$

la surface sera donc $S = \frac{cx^3}{3} = \frac{xy}{3}$; il ne resterait qu'à considérer les limites.

On déterminera de la même façon les volumes engendrés par la rotation d'une surface plane autour d'un axe situé dans son plan, puis la vitesse, le chemin parcouru, le mo-

ment de rotation et d'inertie, le travail, etc. On peut facilement prouver à l'aide des sommes de puissances, ou par un procédé purement géométrique, que l'erreur provenant du fait qu'on néglige de petits triangles ou anneaux, tend vers zéro ; il en résulte que ces formules sont également rigoureuses. On trouvera des développements plus précis dans mon recueil d'exercices [1].

A la place des trois notions différentes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad dy = f'(x)\,dx$$

que les commençants ont beaucoup de peine à distinguer les unes des autres, il suffit, pour les besoins de l'enseignement et des mathématiques appliquées, d'introduire uniquement les petites quantités dx et dy, au moyen desquelles on obtient des résultats complètement rigoureux en négligeant les puissances supérieures.

A. Schülke (Königsberg, Prusse).

(Traduction de M. J.-P. Dumur, Genève.)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Courtis Standard Test in Arithmetic.

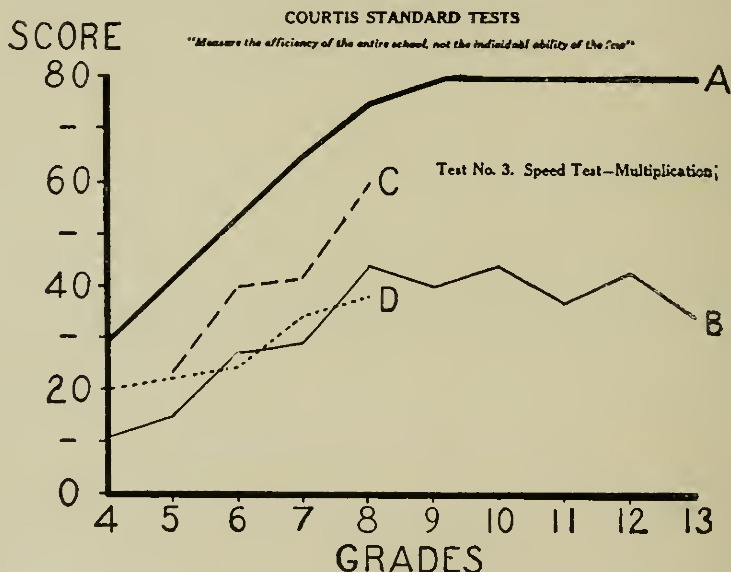
Un professeur américain, M. S.-A. Courtis, chef du département des sciences et mathématiques à l'Ecole de Détroit *(Detroit Home and Day School)*, a établi un système d'épreuves permettant de mesurer d'une façon pratique et rapide les résultats de l'enseignement de l'arithmétique, en se basant non pas sur le travail individuel des élèves, mais sur l'ensemble des travaux de la classe. Sa méthode d'enquête est le résultat d'une longue expé-

[1] *Aufgaben-Sammlung* von A. Schülke. Leipzig, B. G. Teubner, 1910.

rience; elle peut rendre de grands services en permettant d'apprécier le travail progressif d'une classe entière, de comparer diverses méthodes d'enseignement, ou d'établir un parallèle entre les classes correspondantes de plusieurs écoles différentes.

Les examens habituels mesurent l'étendue de la connaissance d'un élève et l'augmentation de difficulté d'année en année. Les épreuves comparatives, par contre, mesurent non seulement ce que l'on sait, mais comment on le sait; on devra les faire exécuter, dans chaque classe et chaque degré, dans des conditions absolument identiques. Elles sont au nombre de 8 et comportent les sujets suivants : 1. addition, — 2. soustraction, — 3. multiplication, — 4. division, — 5. copie de chiffres, — 6. raisonnement, — 7. les quatre opérations, — 8. raisonnement.

Les épreuves 1, 2, 3 et 4 comportent un certain nombre d'opérations très simples; l'élève devra en résoudre un aussi grand nombre que possible dans un intervalle de temps limité. Dans l'épreuve 5, il s'agit de copier dans le temps indiqué le plus grand nombre de chiffres possible. Le n° 6 comprend 16 pro-



blèmes qui peuvent être résolus respectivement par l'une des quatre opérations; l'élève n'a pas à résoudre le problème, mais doit simplement indiquer le genre d'opération correspondant. L'épreuve 7 comporte un certain nombre d'opérations (additions, soustractions, multiplications, divisions) plus compliquées que

celles des 4 premières épreuves; l'élève peut les résoudre sur un espace blanc réservé sur la feuille d'épreuve. Le n° 8, enfin, contient 8 problèmes qui peuvent être également résolus sur un espace blanc.

Dix mille séries de ces épreuves ont été envoyées dans diverses écoles des Etats-Unis. On les fait exécuter par tous les degrés et dans les mêmes conditions, et les résultats sont renvoyés pour servir à etablir les moyennes et les graphiques correspondants. Nous reproduisons, à titre d'exemple, l'épreuve 3 et un graphique qui s'y rattache.

"*Measure the efficiency of the entire school, not the individual ability of the few*"

SCORE

No. attempted

No. right

ARITHMETIC—Test No. 3. Speed Test—Multiplication

Write on this paper, in the space between the lines, the answers to as many of these simple multiplication examples as possible in the time allowed.

2 3 9 0 7	9 5 4 7 6	4 2 7 4 9	3 4 9 0 5
1 3 6 5 4	1 2 8 0 5	1 9 6 0 5	2 7 8 2 6
8 2 7 5 4	2 5 6 0 7	1 2 7 0 8	1 2 8 1 5
1 6 9 0 6	3 5 9 8 3	6 8 7 6 3	9 5 7 1 3
6 2 8 9 5	4 3 9 8 6	1 3 7 6 5	3 2 6 0 8
1 7 4 0 7	2 6 7 0 4	2 5 8 0 9	1 4 7 1 5
1 3 6 0 3	1 6 8 0 9	1 4 8 0 4	7 3 9 2 4
7 4 8 0 9	4 2 8 7 3	5 4 9 3 5	1 8 9 0 3
5 8 6 0 5	1 9 8 0 3	2 5 4 3 7	1 6 9 1 7
1 2 3 9 4	3 2 6 4 7	2 8 9 0 5	8 2 4 0 2
9 5 4 7 6	2 3 9 0 7	3 4 9 0 5	4 2 7 4 9
1 2 8 0 5	1 3 6 5 4	2 7 8 2 6	1 9 6 0 5

Name *School* *Grade*

La courbe A représente, aux yeux de l'auteur, les résultats que devraient obtenir en juin les diverses classes placées sous son contrôle (degrés 4-13 . La courbe B donne les résultats réels en

septembre, début de l'année scolaire, et C les résultats en octobre. D représente le graphique d'une autre école examinée également en octobre, la même semaine.

Ces épreuves comparatives seront probablement utilisées en Angleterre, en Allemagne, en France et dans d'autres pays. Elles sont fournies, au prix de revient, par M. S.-A. Courtis, qui enverra son *Manual of instructions for Giving and Scoring the Courtis Standard Tests in Arithmetic*, à tous ceux qui lui en feront la demande.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

I. — RÉUNION DE MILAN

18-20 septembre 1911.

Séances du Comité central.

Lundi, 18 septembre, à 9 h. du matin ; éventuellement à 4 h. de l'après-midi, séance en commun avec les sous-commissions spéciales A et B.

Réunion préparatoire.

Lundi soir, 18 septembre, à 8 h. $^1/_2$ (le lieu sera indiqué ultérieurement dans le programme définitif qui sera adressé aux délégués au commencement de juin). — Cette réunion, qui est principalement destinée aux présentations, permettra aux mathématiciens de prendre contact.

Séances des délégués et des membres des sous-commissions nationales.

Ecole polytechnique, place Cavour.

1re séance. *Mardi* 19 septembre, à 9 h. du matin.

1. Allocution du président.
2. Etat des travaux dans les principaux pays ; présentation des rapports des sous-commissions nationales. — Discussion.

2me séance. *Mardi* 19 septembre, à 4 h. de l'après-midi.

1. Suite de la discussion.
2. Les mathématiques dans l'enseignement moyen :

Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des mathématiques? — La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.* (Question A). — Discussion.

3me séance. *Mercredi* 20 septembre, à 9 h. du matin.

1. La question des rapports à présenter au Congrès de Cambridge.
2. L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles et aux étudiants ingénieurs. (Question B). — Discussion.

Séance générale publique.

Mercredi 20 septembre, à 4 h. de l'après-midi, à l'Ecole polytechnique.

1. Allocution d'un représentant de l'Italie.
2. Allocution de M. le prof. F. Klein, président de la Commission.
3. Conférence de M. le prof. F. Enriques (Bologne).

Excursion aux Lacs italiens.

Jeudi 21 septembre. — La réunion sera suivie d'une excursion aux Lacs italiens, organisée par les soins du Comité local.

Les adhésions et les demandes de renseignements doivent être adressées au secrétaire-général, M. H. Fehr, Florissant, 110, Genève.

II. — SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Allemagne. — La sous-commission allemande vient de faire paraître le 10me fascicule des *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.* C'est le 1er fascicule du 3me volume. Il contient la préface du 3me volume, par M. F. Klein, et un rapport sur le mouvement de réforme de l'enseignement mathématique en Allemagne, par M. R. Schimmack. (146 p.). En voici le titre :

III. Band. Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts. Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Heft. Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland, von Dr. R. Schimmack.

Autriche. — Le fascicule 7 des *Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich* vient de paraître. C'est un rapport sur l'enseignement mathématique dans les universités, par M. R. v. Sterneck. (50 p.) :

7. Heft. Der mathematische Unterricht an den Universitäten, von Dr. R. v. Sterneck. — Nous en donnons un résumé sous la rubrique « Notes et Documents » du présent numéro.

Suède. — La sous-commission suédoise a publié le 8me et dernier fascicule de ses *Berichte und Mitteilungen.* Il est consacré à un rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les gymnases suédois, par M. E. Göransson. (51 p.).

Die Mathematik and den schwedischen Gymnasien, von Dr. E. Göransson, Oberlehrer in Stockholm.

Le même fascicule contient une préface de M. le prof. H. v. Koch, délégué suédois, pour l'ensemble des huit fascicules qui seront réunis sous le titre : *Der mathematische Unterricht in Schweden.*

Russie. — La sous-commission russe vient de faire paraître le rapport suivant : *Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen,* von K.-W. Vogt, Direktor der IIten Realschule in St-Petersburg (16 p.).

IVe Congrès international de Philosophie.

Le IVe Congrès international de Philosophie a été tenu à Bologne, du 6 au 11 avril 1911, sous la présidence de M. F. Enriques. Un programme riche et varié avait attiré un grand nombre de savants représentant presque toutes les branches de la pensée humaine. Il comprenait en première ligne des conférences générales, parmi lesquelles il convient de citer ici celle de M. Henri Poincaré, sur l'*évolution des lois,* lue par M. Emile Borel, et celle de M. Langevin, sur l'*évolution du mécanisme.*

Les rapports et communications avaient été répartis sur huit sections. Nous nous bornerons à signaler les travaux intéressant plus particulièrement les mathématiciens et présentés à la section III, *Logique et théorie de la Science :*

Giuseppe Peano (Turin), *Stato attuale della logica matematica.* Les rapports de la Logique et de la Grammaire. — Gregorius Itelson (Berlin), *Grundzüge des Nomologismus.* — Alessandro Padoa (Gênes), *D'où convient-il de commencer l'arithmétique.* — E. Goblot (Lyon), *Le raisonnement déductif.* — D. Roustan (Bordeaux), *Déduction et induction.* — Pierre Boutroux (Paris), *En quel sens la recherche scientifique est-elle une analyse ?* — E.-S. Russell (Londres), *On Vitalism.* — R. d'Adhémar (Lille), *Sur le point de vue philosophique dans les sciences positives; utilité et inconvénients.* — Federigo Enriques (Bologne), *Sul concetto di*

numero. — Maximilien WINTER (Paris), *Note sur l'infini mathématique.* — E.-E. CONSTANCE JONES (Cambridge), *A new law of thought and its implications.* — Gustavo PECSI (Esztergom-Hongrie), *Le false leggi di moto le quali servivano finora come fondamento delle scienze naturali, e le vere leggi di moto.*

Plusieurs de ces communications ont donné lieu à d'intéressantes discussions sur lesquelles nous aurons peut-être à revenir dans cette *Revue.*

Ve Congrès international des mathématiciens.

Le Congrès aura lieu en Angleterre, à Cambridge, du *22 au 28 août 1912.* Il sera organisé par la *Cambridge Philosophical Society* avec le concours de la *London Mathematical Society.*

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *La Société mathématique allemande (Deutsche Mathematiker-Vereinigung)* se réunira cette année à Carlsruhe, du 24 au 30 septembre, sous la présidence de M. le prof. SCHUR. Le Comité d'organisation cherche à concentrer les communications le plus possible sur deux branches, la *théorie des fonctions automorphes* d'une part, et la *Mécanique,* d'autre part.

— *La Société allemande pour le progrès de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (Verein zur Förderung des mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterrichts)* tiendra sa XXme assemblée générale à Münster i. W., du 5 au 8 juin 1911, sous la présidence de M. le prof. THAER (Hambourg).

— *La 51me réunion des philologues et professeurs allemands* aura lieu à *Posen* du 3 au 6 octobre 1911. Les travaux de la section des sciences mathématiques et physiques seront dirigés par MM. SPIES et THIEME.

— M. A. ACKERMANN-TEUBNER (Leipzig) a été nommé docteur-ingénieur honoraire de l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

M. M. DEHN a été nommé professeur extraordinaire à l'Université de Kiel.

M. GAST a été nommé professeur de Géodésie à l'Ecole technique supérieure d'Aix-la-Chapelle.

M. D. HILBERT, professeur à l'Université de Gœttingue, a été nommé membre correspondant à l'Académie des Sciences de Paris.

M. E. LAMPE a été nommé docteur-ingénieur honoraire de l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg.

M. J. ROSANES, professeur à l'Université de Breslau, a pris sa retraite.

M. L. Schlesinger, nommé à Budapest, a été nommé professeur à l'Université de Giessen.

M. Th. Vahlen a été nommé professeur à l'Université de Greifswald.

Angleterre. — *Cambridge.* La Commission des *Prix Smith* et *Rayleigh* a accordé une distinction honorable aux mémoires suivants :

Sur la théorie des corps relatifs, par W. E. H. Berwick, Collège de Clare.

Une théorie de la cause des orages magnétiques, par C. G. Darwin, Collège de Trinity.

La dispersion d'un courant de particules minuscules par la matière, par S. Lees, Collège de S[t] John.

L'influence de la densité sur la position des lignes de l'émission et l'absorption dans un spectre de gaz, par G. H. Livens, Collège de Jésus.

Note de Géométrie projective, par A. W. H. Thompson, Collège de la Trinity.

MM. Livens et Berwick ont été nommés respectivement premier et second « *Smith's Prizes* », et le « Rayleigh Prize » est décerné à M. Berwick.

Belgique. — J. Massau. *L'Association des Ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand* a décidé de réimprimer, en annexes à ses *Annales,* les « Leçons de Mécanique rationnelle », de J. Massau. M. L. Flamache, docteur en sciences, surveille l'impression et met l'édition en concordance avec l'enseignement du maître, tel qu'il le donnait pendant les dernières années de sa vie (1906-1907). La première partie (Géométrie vectorielle, statique) est en vente à la librairie Van Goethem, rue des Foulons, Gand, Belgique. Les autres parties (Cinématique, Dynamique) paraîtront dans le courant de l'année.

Espagne. — Les mathématiciens espagnols viennent de fonder une Société mathématique dont le siège est à Madrid, 51, San Bernardo. La séance de constitution a eu lieu à l'Université de Madrid, le 5 avril dernier. M. José Echegaray a été choisi comme président. La Société publiera un Bulletin qui sera rédigé par MM. Cecilio Jiménez Rueda, Lui Octavio de Toledo, Augusto Krahe, Julio Rey Pastor.

Hollande. — M. H. A. Lorentz, professeur à l'Université de Leyde, a été nommé membre associé étranger de l'Académie des Sciences de Paris et membre correspondant de l'Académie des Sciences de S[t]-Pétersbourg.

Suisse. — M. G. Du Pasquier a été nommé professeur à l'Université de Neuchâtel.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales[1].

(3e article.)

AUTRICHE

Les mathématiques dans les Lycées de jeunes filles.

Der mathematische Unterricht an den Mädchenlyzeen[2], von Prof. Dr Th. KONRATH (Wien). — La première partie du rapport de M. Konrath est consacrée à un tableau de l'état actuel de l'enseignement mathématique des jeunes filles en Autriche. Les établissements d'instruction supérieure pour jeunes filles sont :

1° Les écoles primaires (6 à 14 ans).

2° Les écoles primaires supérieures (11 à 14 ans).

3° Les lycées (10 à 16 ans).

4° Les gymnases (10 à 18 ans).

5° Les écoles normales (15 à 19 ans).

6° Les écoles professionnelles (17 à 18 ans).

Ces écoles donnent, soit une instruction identique à celle des écoles correspondantes pour jeunes gens, soit un programme mathématique plus restreint. Le lycée seul n'a pas d'analogue dans les établissements pour jeunes gens, aussi M. Konrath se limite à l'étude de ces lycées de jeunes filles.

Institués, en 1900, par un décret ministériel, sous l'influence du mouvement féministe, les lycées ont pour but d'ouvrir l'accès des universités aux jeunes filles. Leur nombre croissant, en 1901, 9 avec 1700 élèves, en 1910 53 avec 9748 élèves, est une preuve indiscutable de leur raison d'être.

Les lycées de jeunes filles sont classés dans la catégorie d'écoles moyennes leur cycle est de 6 classes avec un âge d'admission minimum de 10 ans. L'arrêté ministériel indiquant comme but de l'enseignement lycéal, plus spécialement la culture des langues et la culture générale, il n'est pas étonnant que l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles y soit peu développé.

Le programme mathématique est, en effet, extrêmement restreint et cela,

---

[1] Voir l'*Ens. math.* du 15 janvier et du 15 mars 1911.

[2] *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich*, Heft 4, p. 1-16. — Résumé par Mlle R. MASSON (Genève).

en grande partie, sous prétexte que les jeunes filles n'ont pas d'aptitudes pour les mathématiques, alors que les maîtres de mathématiques des jeunes filles disent, au contraire, que c'est l'enseignement qu'on leur donne qui ne leur est pas adapté.

Les connaissances en arithmétique dont elles auront besoin dans la vie leur sont seules demandées, à l'exclusion du développement logique et scientifique.

Le programme de la dernière classe comprend des calculs d'intérêts composés à l'aide de tables (sans logarithmes) et des éléments de comptabilité et tenue de livres.

La géométrie est encore plus mal partagée que l'arithmétique. Il suffit, au reste, de remarquer que l'enseignement du français, seul, comporte 2 heures de plus que celui des branches mathématiques et physiques ensemble.

En ce qui concerne les *examens* M. Konrath note qu'un arrêté ministériel de 1908 a supprimé les mathématiques de l'examen de maturité facultatif qui termine le cycle des études du lycée.

Il aborde ensuite la question des *méthodes* d'enseignement; la méthode dogmatique tend de plus en plus à être remplacée par la méthode heuristique consistant à amener les élèves à trouver par eux-mêmes les notions nouvelles, et cela principalement dans les écoles de jeunes filles.

L'esprit pratique étant, chez les jeunes filles, généralement plus développé que l'esprit logique, celles-ci s'intéressent plus au but et à la signification d'une loi mathématique qu'à sa construction logique rigoureuse. Un plan d'étude purement déductif serait donc généralement déplacé mais il ne faudrait cependant pas le prohiber systématiquement.

En ce qui concerne l'enseignement méthodique de chaque branche, M. Konrath est d'avis qu'il y a encore bien des progrès à réaliser. Il faudrait éviter l'écueil consistant à attacher plus d'importance au *calcul* d'un cas particulier qu'à la *méthode* de résolution du problème.

Les *manuels* sont ceux des écoles moyennes, mais il en existe deux spécialement destinés aux lycées de jeunes filles. Basés sur la méthode dogmatique, ni l'un ni l'autre ne semblent avoir subi l'influence du courant moderniste. M. Konrath fait leur procès tant au point de vue théorique que pratique.

Les lycées de jeunes filles faisant partie des écoles moyennes, le recrutement de leur personnel enseignant devrait être le même que pour ces écoles, mais on a créé des examens spéciaux pour les candidates à l'enseignement dans les lycées de jeunes filles.

Pour cet examen, les connaissances exigées en mathématiques se bornent aux mathématiques élémentaires (principalement le programme enseigné dans les lycées de jeunes filles). Le dessin géométrique comprend des notions de géométrie descriptive dans la mesure où elles restent intuitives. L'obtention du diplôme est suivi d'un stage d'une année dans un lycée de jeunes filles ou dans un autre établissement d'instruction supérieure.

La seconde partie de ce rapport traite des tendances modernes de réforme de l'enseignement dans les lycées.

Il est aujourd'hui notoire que l'enseignement des lycées de jeunes filles n'est plus conforme aux exigences modernes, en tous cas pour les mathématiques et les sciences naturelles.

Deux courants de réforme lycéenne sont en présence. Le premier veut un développement de l'enseignement lycéal à 7 (éventuellement 8) années et la

transformation du lycée en une sorte de gymnase réal. Le second conserverait les 6 classes actuelles avec quelques modifications conformément au plan d'étude du gymnase réal. Ce lycée réformé (dans lequel le latin serait facultatif) serait suivi d'un cours de 2 ou 3 ans sous forme de lycée supérieur (Oberlyzeum) lequel se consacrerait soit à préparer les jeunes filles à devenir étudiantes régulières à l'Université, soit à former par une année d'étude les élèves pour les écoles normales primaires. L'enseignement purement pratique serait assuré par une école ménagère. Ce lycée réformé aurait l'avantage de conserver l'unité des écoles moyennes pour jeunes filles, la distinction en école préparant à l'Université, en séminaire et en école ménagère n'ayant lieu que dans le lycée supérieur.

Au sujet de la question très controversée de la coéducation, M. Konrath estime que l'éducation séparée est généralement préférable, le but devant être d'obtenir non pas une instruction *identique*, mais une instruction *équivalente* pour les deux sexes.

Nulle part la réforme de l'enseignement n'est aussi urgente que dans le domaine de l'enseignement mathématique, les jeunes filles ayant terminé le lycée n'ont, par exemple, aucune notion des nombres imaginaires, des logarithmes de la trigonométrie, etc. ; il serait, au reste, relativement facile de remédier à cet état de chose et les quelques réformes qui ont déjà été tentées ont pleinement réussi.

L'ambition est notablement plus développée chez les jeunes filles que chez les jeunes gens, aussi l'auteur estime que pour les écoles de jeunes filles le système d'examens et d'épreuves est utile et même nécessaire.

La suppression des mathématiques pour l'examen de maturité ne semble pas être un progrès.

Selon M. Konrath, si un maître sait rendre son enseignement intuitif et vivant, il lui sera facile de conduire les jeunes filles dans les domaines les plus complexes et de leur rendre compréhensible des discussions logiques quelconques. Il préconise, pour la géométrie, l'étude simultanée dans le plan et dans l'espace. Il ne faudra pas négliger la représentation graphique d'expressions algébriques. L'histoire des mathématiques peut également être enseignée avec fruit. Les exercices pratiques ainsi que les exercices de mesure et d'arpentage seront un précieux auxiliaire pour réaliser les principes de l'enseignement intuitif.

L'avis unanime est que le privilège accordant l'admission à l'Université aux jeunes filles sortant des lycées devrait être supprimé tant que l'instruction qu'ils donnent reste ce qu'elle est.

La préparation des professeurs de l'enseignement moyen.

Die praktische Ausbildung für das höhere Lehramt in Oesterreich [1], von Landesschulinspektor Dr J. Loos (Linz). — M. Loos étudie l'organisation actuelle de l'année de stage, puis le développement qu'il faudrait lui donner. Le stage, pour les candidats au professorat, existe en partie depuis 1811. Son organisation a subi des transformations successives dont la plus importante a été celle de 1856. M. Loos expose plus complètement les résultats

---

[1] *Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich*, Heft 4, p. 17 à 37. — Résumé par Mlle R. Masson (Genève).

de la dernière transformation faite en 1897, transformation qui marque un progrès réel sur celle de 1876 sans toutefois être très supérieure à celle de 1884.

Actuellement, en théorie, le stage est indispensable pour obtenir une place, à l'exception de certains cas particuliers où les candidats ont eu l'occasion de faire leurs preuves, soit comme membre d'une école normale, soit comme maître auxiliaire. En pratique le manque de maîtres pour les écoles moyennes a obligé parfois à ne pas tenir compte de ces exigences pour le choix des maîtres du gymnase et de l'école réale.

L'auteur expose ensuite la manière dont est organisée l'année de stage. Le stagiaire, placé sous la direction d'un seul maître, assiste aux leçons, puis, après quelque temps, en donne lui-même. Il semble que des changements soient à désirer, soit dans les prescriptions elles-mêmes, soit surtout dans leur application.

Le fait que le stagiaire est sous la direction d'un maître unique, peut, évidemment, présenter de grands avantages, mais il peut, également, avoir de graves inconvénients. L'élève dépend, dans une grande mesure, de la seule personnalité du maître. De plus, ce système supprime l'émulation, les stagiaires étant ordinairement seuls. Parmi les essais de réforme tentés, citons l'introduction de la pédagogie pratique à l'université. Les candidats au professorat donnent des leçons, les jours de congé, à des élèves de bonne volonté, sous la direction du professeur de pédagogie. Willman, à Prague, et Kulczinski, à Krakau, ont fait des essais dans ce sens. M. Loos estime que les succès qu'ils ont obtenus proviennent beaucoup plus de leur propre compétence que de la valeur du système lui-même. Des circonstances aussi favorables étant l'exception, il faut trouver une autre solution.

Soit en Allemagne, soit en Autriche, on a réclamé des écoles d'application adjointes aux universités. M. Loos propose que les futurs maîtres fassent des cours du soir aux ouvriers, pendant leurs études à l'université; ces cours traitant de sujets élémentaires, cela leur fournirait l'occasion de faire leurs premiers essais et de se rendre compte des difficultés et de l'importance de cet enseignement élémentaire, enseignement qui, sauf de rares exceptions (Halle et Iéna), est complètement exclu des programmes du candidat au professorat secondaire. Les vues de M. Loos à ce sujet on été exposées dans sa conférence au 50me Congrès des philosophes allemands en 1900, à Graz.

Les propres expériences de M. Loos l'ont conduit à la conclusion que le meilleur remède à l'état de chose existant est la création d'un séminaire annexé aux écoles moyennes, séminaire de gymnase, appelé, actuellement en Autriche, Développement de l'année de stage.

En Allemagne, on a reconnu la nécessité d'une préparation plus approfondie des maîtres, et une décision de 1890, complétée en 1908, a fait précéder l'année de stage d'une année de séminaire. En Prusse, il existe 115 de ces séminaires de gymnases. En 1892, M. Loos avait été envoyé étudier la question en Allemagne, et, en 1893, il a été nommé directeur d'un gymnase d'Etat à Vienne, avec le mandat d'organiser un séminaire de gymnase, qu'il a dirigé de 1893 à 1898. Voici les caractères principaux de ce séminaire.

Le directeur et un professeur de branche, sous la direction desquels chaque candidat est placé, l'initient à la pratique à l'aide des moyens suivants :

1° Les élèves assistent aux leçons.

2° Ils donnent des leçons avec l'aide et sur les indications du maître.

3° A partir du 2me semestre, les élèves donnent des leçons sans aide du professeur.

4° Conférences et discussions sur tous les sujets scolaires.

Les candidats assistent aux conférences de maîtres et, une fois qu'ils enseignent, ont le droit d'y prendre la parole.

M. Loos a aussi présidé à la formation d'une sorte de séminaire aux gymnases de l'Etat, à Linz et à Salzbourg, sous une forme un peu différente de celle de Vienne. A Vienne même, le nombre plus restreint de stagiaires a nécessité des adjonctions et modifications subséquentes.

Douze ans d'expérience ont amené M. Loos à conclure que cette organisation de séminaire peut être conservée dans ses grandes lignes, mais elle devrait maintenant passer à l'état d'institution définitive, sous le nom de séminaire d'école moyenne.

Le moment serait propice pour créer, en Autriche, une dizaine de ces séminaires, le nombre des candidats étant actuellement assez considérable.

Le rapport de M. Loos donne les traits principaux de la question : elle est présentée avec plus de développement dans son « Enzyklopädischen Handbuch ».

M. Fries s'est également occupé de ce sujet ; au reste, M. Loos adjoint à son rapport la bibliographie du sujet.

La préparation des candidats à l'enseignement est de toute importance, car, comme le dit M. Loos pour terminer : En formant soigneusement le personnel enseignant, on travaille pour la jeunesse ; à quoi serviraient, en effet, les meilleurs programmes et manuels, si on ne peut les mettre entre les mains de maîtres capables de les appliquer et de les employer dans leur véritable esprit pour le bien des élèves.

L'enseignement mathématique dans les universités.

Der mathematische Unterricht an den Universitäten[1], von Dr. R. v. Sterneck. — Pour faciliter la préparation de ce rapport, un questionnaire, renfermant 20 questions, a été envoyé aux universités autrichiennes, à tous les professeurs ordinaires de mathématiques et à quelques professeurs extraordinaires.

Etant donné le caractère essentiellement libre de l'enseignement universitaire, le rapporteur estime qu'il n'est pas possible d'en présenter un exposé uniforme ; il faut, au contraire, tenir compte de l'enseignement spécial de chaque professeur, mentionner les diverses méthodes en vigueur et signaler, au besoin, les propositions de réforme individuelles. C'est pourquoi le présent rapport doit être plutôt considéré comme la réunion d'un certain nombre de données concernant l'enseignement mathématique universitaire, qu'un rapport général détaillé.

Dans un premier chapitre, l'auteur expose l'organisation générale des huit universités autrichiennes ; *Vienne, Prague* (allemande), *Prague* (bohème), *Graz, Innsbruck, Czernowitz, Cracovie, Lemberg*, et la répartition des pro-

[1] *Berichte über den mathematischen Unterricht in Œsterreich.* Heft 7, 50 p. — Résumé par M. J.-P. Dumur (Genève).

fesseurs (professeurs ordinaires, professeurs extraordinaires et privat-docents).

Les *cours généraux* (Hauptkollegien) ont un double but : 1° fournir les connaissances théoriques fondamentales aux candidats qui étudient les mathématiques dans un but purement scientifique et se proposent de terminer leurs études par le doctorat; 2° préparer aussi les étudiants qui se destinent au professorat.

En vue spécialement de ce second but, ces cours généraux sont, le plus souvent, constitués en cycles durant de 3 à 4 ans; mais on s'arrange avant tout, surtout si l'on dispose de plusieurs professeurs, à avoir chaque année un cours accessible aux commençants, et à leur enseigner le plus tôt possible le calcul différentiel et intégral, nécessaire également pour l'étude de la physique théorique.

Suit une liste des cours qui ont été annoncés dans les universités autrichiennes, pendant les 5 dernières années 1905-06 à 1909-10. Bornons-nous à reproduire ceux de Vienne. Chaque cours n'est indiqué qu'une fois, même dans le cas où il serait donné plus souvent, ou même par plusieurs professeurs.

Université de Vienne. — Calcul différentiel et intégral, 5 heures pendant 2 semestres.

Théorie des nombres, 5 heures pendant 2 semestres.

Théorie des équations différentielles, 5 heures pendant 2 semestres.

Calcul des probabilités, 3 heures.

Intégrales définies et calcul des variations, 5 heures pendant 2 semestres.

Théorie des équations différentielles linéaires, 5 heures.

Fonctions elliptiques, 5 heures.

Théorie des fonctions, 5 heures pendant 2 semestres.

Algèbre, 5 heures pendant 2 semestres.

Géométrie analytique, 4 heures pendant 2 semestres.

Théorie des invariants avec applications géométriques, 2 heures.

Courbes algébriques, 2 heures.

Courbes et surfaces du 3me ordre, 2 heures.

Géométrie synthétique, 4 heures pendant 2 semestres.

Géométrie différentielle, 2 heures pendant 2 semestres.

Géométrie linéaire, 2 heures.

Groupes continus, 2 heures.

Géométrie non-euclidienne, 2 heures.

Mathématiques d'assurance, 4 à 6 heures pendant 2 semestres.

Statistique mathématique, 3 heures.

Assurance contre les maladies et accidents, 2 heures.

Voici, en outre, quelques détails sur ces *cours généraux* des professeurs ordinaires, en nous limitant toujours à l'Université de Vienne (le rapport donne également les détails nécessaires concernant les autres universités).

M. le prof. ESCHERICH donne un cycle de cours qui dure généralement 3 ans. La première année comprend le calcul différentiel et intégral 1er semestre : théorie des nombres irrationnels, séries de puissances, calcul différentiel ; 2me semestre : calcul intégral). La deuxième année traite le même sujet, mais d'une façon plus générale, en y introduisant également les quantités complexes ; en outre, les intégrales multiples, les fonctions d'une et de deux variables, l'étude assez détaillée des ensembles, la notion de courbe, de surface, etc. ; vient ensuite le cours sur la théorie des fonctions, en par-

tant, selon la méthode de Cauchy, de l'intégrale définie, mais en utilisant aussi la théorie de Weierstrass. Les fonctions doublement périodiques et elliptiques ne sont traitées que d'une façon générale, en évitant les détails trop approfondis. — M. le prof. MERTENS donne, en outre d'un cours général d'introduction sur le calcul infinitésimal, des cours détaillés sur l'algèbre et la théorie des nombres, chacun de 5 heures pendant 2 semestres. — Enfin, M. le prof. WIRTINGER, dans un cours de 6 semestres, traite principalement de la théorie des fonctions et de celle des équations différentielles.

Les éléments d'analyse sont traités d'une façon complète dans les cours du professeur Escherich. — Le professeur Wirtinger les traite également par une méthode analogue à celle qu'on trouve dans les ouvrages de De la Vallée-Poussin ou Goursat. — Le professeur Mertens, par contre, ne s'arrête par trop longtemps sur les éléments proprement dits afin de pouvoir aborder les chapitres plus élevés de l'analyse, de l'algèbre et de l'arithmétique.

Le calcul numérique n'entre que très peu en considération dans les cours et exercices de l'enseignement universitaire.

Les cours théoriques ne pénètrent guère non plus dans le domaine des mathématiques appliquées. A Vienne, le professeur Wirtinger traite, à l'occasion, dans ses cours, quelques applications de physique mathématique. Du reste, il n'est guère possible de s'y arrêter trop longtemps, étant donné le temps relativement restreint dont on dispose et qui souvent suffit à peine pour achever la partie théorique.

En ce qui concerne les *cours spéciaux* (besondere Vorlesungen), citons tout d'abord ceux qui ont pour but de compléter et d'approfondir le champ des écoles moyennes qui précèdent l'université. Ces cours sont d'une très grande importance pour tous les étudiants en mathématiques. Actuellement, il n'existe qu'un cours sur les mathématiques élémentaires, il se donne à l'université de Graz et a été institué à la suite de démarches de la faculté de philosophie de cette ville. Il reprend la matière des écoles moyennes en la traitant de la façon la plus complète possible, en insistant sur les éléments qui servent de base à l'arithmétique et à l'algèbre. Dans ce cours, par contre, il n'est pas possible d'obtenir une rigueur aussi complète en ce qui concerne les principes fondamentaux de la géométrie; on cherche surtout à y acquérir un certain degré de rigueur et d'ordre logique, sans entreprendre ces recherches théoriques difficiles concernant l'établissement des principes géométriques, comme, par exemple, l'indépendance des axiomes. — Comme la trigonométrie sphérique ne figure pas dans le programme des gymnases, on l'a introduite dans plusieurs universités. — La géométrie descriptive semble également y pénétrer toujours davantage. Selon l'avis de bien des personnes compétentes, son introduction est nécessaire. M. le prof. E. Müller[1], entre autre, s'exprime ainsi : « Je suis absolument convaincu que tout maître de mathématiques devrait avoir suivi la géométrie descriptive et le dessin constructif. Pour rendre cela possible, il faut que la géométrie descriptive soit enseignée dans chaque université et qu'on y pratique également les exercices de construction qui s'y rapportent. — Citons encore pour Vienne le cours de M. le professeur TAUBER sur les mathématiques d'assurance, de 4 à 6 heures, pendant deux semestres, des cours sur le calcul des probabilités et la statistique mathématique qui ont lieu alter-

[1] *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Jahrgang 1910, p. 23.

nativement chaque semestre à raison de 3 heures par semaine, et un cours de 3 heures pendant deux semestres sur la statistique mathématique. — Il faut enfin mentionner les nombreux cours de privat-docents dont le rapport donne une liste.

En outre des cours généraux et spéciaux dont on vient de parler, on pratique dans toutes les universités autrichiennes des exercices de *séminaire*. Ces exercices ont pour but de développer l'initiative des étudiants par l'application pratique de la théorie; ils se divisent en deux catégories, ceux qui sont destinés aux commençants (et qui constituent ce qu'on appelle quelquefois le « *Proseminar* », par opposition au « *Seminar* » proprement dit) et ceux qui concernent les étudiants plus avancés.

L'auteur aborde ensuite la question des examens. — Ils sont de deux sortes : les examens de doctorat *(Doktorsprüfungen)* et l'examen de professorat *(Lehramtsprüfung)*. Les premiers seuls doivent être considérés comme des examens universitaires proprement dits, tandis que les seconds sont organisés par une commission spéciale de l'Etat, dont les membres sont, à vrai dire, pour la plupart des professeurs à l'université, mais qui, en cette qualité, ne sont pas considérés comme faisant partie de l'université. Les conditions nécessaires à l'obtention du doctorat sont indiquées dans les ordonnances des 16 mars 1899, 27 janvier 1900 et 22 avril 1902 du Ministère d'éducation et d'enseignement. L'auteur du rapport en donne les principales dispositions. — Il faut regretter que dans les universités autrichiennes le nombre des thèses de mathématiques et des examens sur cette branche soient très rares. La valeur pratique minime du doctorat envisagé comme tel, et la difficulté de présenter une thèse en mathématiques présentant quelque chose de nouveau, empêchent, en effet, souvent les étudiants d'aborder un pareil travail. — Cela montre que trop souvent les mathématiques sont envisagées comme un simple gagne-pain et qu'on se borne le plus généralement à les étudier uniquement en vue de l'obtention d'une place de maître dans les écoles moyennes. — Les conditions concernant les examens du professorat se trouvent dans l'ordonnance ministérielle du 30 août 1897. Bornons-nous à mentionner celles qui se rapportent aux mathématiques comme branche principale : connaissance de l'arithmétique générale, de la géométrie synthétique et analytique, du calcul différentiel et intégral et de ses applications à la géométrie; éléments du calcul des variations; principes de la nouvelle théorie des fonctions. — Chaque examen comprend trois parties : le travail fait à la maison, l'examen écrit, l'examen oral. Le rapport fournit d'amples renseignements sur chacune de ces parties.

En fait de moyens d'instruction, il faut signaler les bibliothèques mathématiques des séminaires, les collections de modèles et la littérature mathématique des bibliothèques universitaires. L'université de Vienne est la seule qui possède une bibliothèque de séminaire un peu complète, surtout en ce qui concerne la littérature mathématique moderne. — Les collections de modèles sont aussi très pauvres et se bornent la plupart du temps à quelques modèles de fils représentant les surfaces du second degré et quelques-uns de carton ; seule l'université d'Innsbruck est un peu plus privilégiée.

Dans un dernier chapitre, l'auteur s'occupe des tendances actuelles de réforme. Il est un point sur lequel tous les mathématiciens autrichiens sont d'accord, c'est la nécessité d'un plus grand nombre de chaires de mathématiques dans les différentes universités. Dans l'année universitaire 1909-1910, les nombres des professeurs ordinaires et extraordinaires des universités

autrichiennes, à l'exception de Vienne, n'ont jamais une somme supérieure à 2. Cet état de chose a déjà engagé les Facultés de philosophie à présenter en 1907 une pétition au Ministère d'éducation et d'enseignement. Le rapport qui l'accompagnait a été traduit et reproduit dans cette Revue [1], Depuis un demi-siècle, les exigences auxquelles l'enseignement mathématique universitaire doit faire face se sont profondément transformées et multipliées.

Cet enseignement ne doit plus être simplement la continuation de celui des gymnases, les mathématiques élémentaires doivent aussi y trouver place. En outre, de nouvelles branches se sont développées, et les sciences mathématiques en se développant se sont divisées en plusieurs domaines. Pour les mathématiques pures, on doit pour le moins distinguer : 1. la théorie des nombres et l'algèbre supérieure. — 2. l'analyse supérieure, comprenant le calcul différentiel et intégral, la théorie des équations différentielles, le calcul des variations, la théorie des fonctions, etc. — 3. la géométrie analytique et synthétique y compris la théorie des groupes de transformation. — Il faut y ajouter ceux des domaines des mathématiques appliquées qui ne peuvent être enseignés que par des mathématiciens de profession, c'est-à-dire, abstraction faite de l'astronomie théorique et de la physique mathématique : 1. le calcul des probabilités. — 2. la mécanique analytique. — 3. la géométrie descriptive. — D'autre part, étant donné les conditions actuelles, l'enseignement des mathématiques comme branche secondaire doit avoir une organisation indépendante de celui des mathématiques comme branche principale. Si l'on tient compte de ces diverses considérations, on voit que les facultés de philosophie des différentes universités autrichiennes devraient posséder au moins trois chaires de mathématiques avec les attributions suivantes : 1. Théorie des nombres et algèbre supérieure. — 2. Analyse mathématique. — 3. Géométrie. — En outre deux de ces chaires au moins devraient disposer d'assistants. De plus, certaines universités devraient posséder une organisation permettant de pousser plus loin des études scientifiques spéciales. Ces universités-là devraient posséder, en outre des chaires déjà citées : 1. une deuxième chaire ordinaire pour l'analyse supérieure. — 2. une chaire ordinaire, pourvue d'assistants, pour les mathématiques appliquées.

Si l'on compare les nombres moyens des professeurs de mathématiques pures et appliquées dans les différents pays, on constate que l'Autriche est notablement en retard. Toutes ces raisons font ressortir l'absolue nécessité d'une réforme dans ce sens.

Le rapport se termine par les propositions de réforme du professeur Escherich : 1. Pour la préparation des candidats au professorat, on devrait organiser, en outre des cours de mathématiques théoriques, des cours de mathématiques appliquées (géométrie descriptive, géodésie, méthodes graphiques). — 2. Des cours sur des sujets spéciaux, par exemple les mathématiques élémentaires y compris les principes, la géométrie descriptive, devraient être obligatoires pour les candidats à l'enseignement. — 3. Donner une plus grande importance aux exercices, séminaires et proséminaires. — 4. Remplir les conditions extérieures pour rendre possible l'enseignement ainsi conçu (salles de lecture, de travail, de séminaire, de dessin ; collections ; nombre suffisant de privat-docents et d'assistants).

---

[1] Rapport sur la réforme de l'enseignement mathématique dans les universités autrichiennes. *L'Ens. math.* du 15 nov. 1908, p. 516-522.

BIBLIOGRAPHIE

F. Barbette. — **Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance.** — 1 vol in-4° : 154 + XII p., 12 fr. 50 ; H. Vaillant-Carmanne E. Gnusé, Liège, 1910.

Les intéressants et difficiles problèmes que M. Barbette aborde dans son travail appartiennent à un domaine peu exploré où les théorèmes généraux sont assez rares et les méthodes générales font entièrement défaut. Quelles sont toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes, dont la plus grande est x^p, égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance ? Quelles sont toutes les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance donnée ? Quelles sont les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances consécutives égales à une puissance $p^{\text{ième}}$? Tels sont les trois problèmes principaux traités par M. Barbette ; d'autres questions se rattachant à cette étude, mais appartenant à des domaines différents, plus connus et mieux explorés, sont étudiées à côté de ces problèmes, comme par exemple la résolution de certaines équations indéterminées, qui jouent un rôle auxiliaire dans cette recherche, ou bien la décomposition des nombres en facteurs, qui en est une application.

Dans l'introduction, M. Barbette indique un procédé élémentaire, permettant d'obtenir l'expression des sommes des puissances semblables des premiers nombres naturels, à l'aide de relations récurrentes qui le conduisent aux polynômes de Bernoulli. Ces polynômes lui servent de base dans l'étude des trois problèmes. Deux cas sont en effet logiquement possibles : ou bien la somme de $p^{\text{ièmes}}$ puissances, égale par hypothèse à une $p^{\text{ième}}$ puissance, contient la suite complète des puissances de 1^p à x^p ; le premier membre est alors un polynôme de Bernoulli ; ou bien cette somme présente des lacunes ; dans ce cas il suffira d'ajouter les termes qui manquent. Evidemment cette transformation affecte la forme du second membre, qui devient une somme, mais la recherche effective des solutions s'en trouve simplifiée.

Dans la première partie de son travail, M. Barbette étudie le cas de $p = 1$, la seconde est consacrée au cas de $p = 2$ et la troisième au cas général de p supérieur à 2. Lorsque $p = 1$, le polynôme de Bernoulli est un nombre triangulaire, les trois problèmes se traitent alors très facilement. C'est l'étude de ce cas particulièrement simple qui conduit M. Barbette à traiter de la décomposition des nombres en facteurs, en s'appuyant sur des considérations présentant une certaine analogie avec celles dont s'est déjà servi Fermat. Dans le cas de $p = 2$, l'étude des trois problèmes et la recherche effective des solutions est évidemment moins facile, mais les vraies difficultés ne commencent que pour p supérieur à 2. Certainement les procédés de l'auteur permettent dans chaque cas particulier et quelle que soit la valeur de p, de trouver les solutions, si elles existent, mais déjà la recherche des

sommes de 4^{ièmes} puissances ne dépassant pas 14^4 exige des calculs assez longs, et les difficultés augmentent rapidement pour p supérieur à 4. Dans le cas de $p = 5$ M. Barbette se borne à la recherche des sommes dont la plus grande ne dépasse pas 11^5, et il retrouve la solution comme donnant la représentation de 12^5.

M. Barbette fait remarquer à la fin de son travail que ses procédés s'appliquent également à l'étude des sommes des $p^{ièmes}$ puissances des nombres polygonaux. Le rôle des polynômes de Bernoulli est joué dans ce cas par les sommes des puissances semblables des premiers nombres polygonaux que l'auteur détermine dans la 4me et dernière partie de son travail. Enfin, M. Barbette donne, en annexe, une table des 5000 premiers nombres triangulaires.

Les procédés de recherche dont se sert M. Barbette sont élémentaires et peuvent être rapprochés de ceux de M. Arnoux ou de M. Laisant dans son « Initiation Mathématique ». La représentation graphique tient en effet une place importante dans son étude des sommes, surtout dans la recherche des diviseurs d'un nombre, bien que son rôle soit moins considérable que dans les travaux de M. Arnoux. Les exemples abondent et le volume se lit facilement, malgré quelques lacunes dans la partie théorique et les démonstrations.

D. Mirimanoff (Genève).

Raoul Bricard. — **Géométrie descriptive.** (Collection de l'*Encyclopédie scientifique*). — 1 vol. in-18, cart. toile, de 275 pages, avec 107 fig. 5 fr. ; O. Doin et Fils, Paris.

On trouvera dans ce volume, malgré ses dimensions restreintes, un exposé assez complet des méthodes de la Géométrie descriptive. L'auteur a surtout insisté sur les principes généraux, en les illustrant par des exemples convenables. Il a laissé de côté l'examen des cas particuliers sans intérêt, les discussions plus longues qu'instructives. C'est ainsi, pour donner un seul exemple, qu'à propos de la construction d'un trièdre déterminé par trois de ses éléments, il s'est abstenu de rechercher les conditions de possibilité. Elles s'obtiennent beaucoup plus simplement par la géométrie élémentaire, et il n'y a aucun profit à les retrouver sur l'épure. D'une manière générale, on a systématiquement éliminé tous les problèmes inventés en vue de conférer à la géométrie descriptive une importance artificielle. La géométrie descriptive n'est pas une science qui trouve en elle-même son propre but. Elle est uniquement un instrument de représentation au service de la géométrie pure et des arts, et c'est en méconnaître le caractère que de la considérer autrement.

Les chapitres I à VIII traitent des principes fondamentaux, de la droite et du plan, des polyèdres, des cônes et des cylindres, de la sphère, des surfaces de révolution, des surfaces du second ordre. Ce sont, en ajoutant la théorie des ombres et celle des projections cotées, les matières qui constituent le programme de notre enseignement secondaire (mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales).

Le chapitre IV contient des procédés de construction des polyèdres réguliers, nouveaux ou du moins peu connus. Ils sont plus simples que les procédés généralement indiqués et sont immédiatement applicables à l'exécution de modèles solides.

Les chapitres IX à XII sont relatifs aux surfaces réglées, aux problèmes qui font intervenir la courbure des surfaces, au tracé des ombres.

Les trois derniers chapitres concernent les projections cotées et les surfaces topographiques, les projections (ou perspectives) axonométriques, et enfin les applications pratiques de la géométrie descriptive.

Bücher der Naturwissenschaft herausgegeben von Prof. Dr. Siegm. Günther. — *Band* 5. **Licht und Farbe** von Rob. Geigel; 1 vol. in-16, 200 p., 4 planches et 75 fig.; 1 M. - *Band* 6. **Der Sternenhimmel**, von J. B. Messerschmitt; 1 vol. in-16, 196 p., 13 pl. et 24 fig.; 1 M.; G. J. Gœschen. Leipzig.

Nous avons déjà signalé cette collection populaire de monographies publiées sous la direction de M. le prof. Sigm. Gunther. Deux nouveaux volumes viennent de paraître. L'un donne un aperçu des théories actuelles de la *lumière* et de la *couleur*.

L'autre, intitulé : « Der Sternenhimmel » (le ciel étoilé), contient les notions élémentaires d'Astronomie ; il traite des objets suivants :

Sphère céleste. Mouvement diurne de la Terre. Mouvement annuel du Soleil et de la Terre. Le système solaire. Précession. Nutation. Parallaxe. Aberration. Les planètes. Etoiles fixes. La voie lactée. L'art de l'observation.

E. Fabry. — **Théorie des séries à termes constants.** Applications aux calculs numériques. — 1 vol. in-8°. 198 p.; 6 fr. 50; Hermann et fils. Paris.

Ce petit Traité des séries à termes constants rencontrera le meilleur accueil auprès des professeurs et auprès des étudiants. Il sera particulièrement apprécié de ceux qui sont appelés à appliquer les séries aux calculs numériques.

Après un premier chapitre consacré aux notions générales, l'auteur étudie les séries à termes positifs ; il donne les principales règles de convergence avec de nombreux exemples. Puis viennent les séries à signes variés, séries absolument convergentes, séries simplement convergentes, séries à signes alternés, séries imaginaires, séries de puissances.

Les calculs numériques et les transformations de séries font l'objet des deux chapitres suivants. On y trouve les méthodes classiques avec les applications au calcul de $L2$, de π et de π^2. Les séries semi-convergentes sont examinées dans le dernier chapitre et donnent lieu à l'étude d'exemples et de constantes qui se rattachent à la fonction Γ ou $L\Gamma(x)$.

L'Ouvrage se termine par une Note supplémentaire sur la plus grande limite.

W. Gallatly. — **The modern Geometry of the triangle.** — 1 vol. de 70 p. in-18 ; F. Hodgson. Londres.

Cette petite brochure contient un exposé clair et en quelques points nouveau, des propriétés du triangle appartenant à la branche de la géométrie que l'on nomme : nouvelle géométrie du triangle. L'auteur a réuni dans ce volume la presque totalité des petites notes ou des questions qu'il avait publiées dans l'*Educational Times*, dans la *Mathematical Gazette*, dans

Mathesis et dans l'*American mathematical Monthly*. Il y fait presque constamment usage des coordonnées normales, angulaires et tripolaires et il montre clairement les ressources considérables qu'offre ce système.

La brochure contient sept brefs chapitres : dans le premier, il considère les points de Lemoine et de Brocard et le quadrilatère harmonique ; le second comprend un résumé de la théorie des coordonnées angulaires et tripolaires et des applications aux triangles orthologiques, aux points hysodynamiques, etc. Dans le troisième chapitre, l'auteur signale les triangles pédales et antipédales d'un point et il en donne les applications à certains points singuliers ; dans le quatrième chapitre, il donne plusieurs propriétés du triangle médiale et du cercle des neuf points avec deux démonstrations remarquables du théorème de Feuerbach : dans le cinquième chapitre, il applique les coordonnées normales à l'étude de la droite de Simson et à la démonstration que l'enveloppe d'une telle ligne est une hypocycloïde. Dans le sixième chapitre, il donne quelques propriétés et cas particuliers de l'orthopôle d'une droite ; et enfin, dans le dernier chapitre, il fait un résumé de la projection orthogonale, suivant les recherches de M. Neuberg contenues dans son Mémoire : *Projections et contre-projections*.

C. Alasia (Albenga, Italie).

Sp.-C. Haret. — **Mécanique sociale**. 1 vol. gr. in-8°, 256 p. ; 5 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, et Göbl, Bucarest.

M. Haret s'est proposé une tâche aussi difficile qu'intéressante : introduire la rigueur mathématique dans un domaine d'où elle paraît exclue, en montrant que chaque théorème de mécanique rationnelle a son correspondant dans la science sociale.

Si l'on assimile un corps social, c'est-à-dire un groupe d'individus soumis à leurs actions réciproques et à des actions extérieures, à un corps matériel dont les atomes seraient les individus, et si l'on représente les forces sociales par des vecteurs, on peut appliquer au corps social, en les interprétant par analogie, tous les théorèmes de la mécanique rationnelle. On admet ainsi que l'on peut définir la situation sociale d'un homme par un nombre fini de coordonnées et appliquer le calcul vectoriel aux forces sociales. La critique logique de ce postulat nous éloignerait trop du point de vue strictement scientifique où s'est placé l'auteur ; bornons-nous à faire remarquer que pour appliquer cette théorie à un exemple concret, il faudrait probablement connaître tant de coefficients que le calcul en deviendrait impossible. Ce n'est pas une raison de repousser une méthode qui, peut-être, complétera nos connaissances qualitatives sinon quantitatives des phénomènes sociaux. En attendant que l'expérience prononce, avouons toutefois nos craintes que M. Haret n'ait fait une assimilation surtout verbale du monde social au monde physique.

Le livre de M. Haret offre le grand intérêt de toute œuvre qui vise à ramener des choses complexes à des principes simples ; il fait une foule de rapprochements ingénieux ; il y a longtemps, par exemple, qu'on a remarqué que les hommes veulent le maximum de jouissances avec le minimum de peines, mais il est piquant d'en chercher la raison dans le principe de la moindre action.

On peut regretter que M. Haret n'ait pas mieux tenu compte des travaux semblables aux siens. Walras et Jevons montrent qu'on peut raisonner en

mathématicien sans identifier l'économie politique à la mécanique rationnelle. Les critiques adressées à l'école de Lausanne n'ont pas toutes grande valeur, faute d'émaner de personnes sachant assez bien les mathématiques pour comprendre la question ; un mathématicien comme M. Haret, curieux des questions de méthode et versé dans les sciences sociales, aurait discerné la part de vérité qu'elles contiennent. Son livre y aurait beaucoup gagné.

Il faut savoir gré à M. Haret d'avoir écrit sa Mécanique sociale ; les motifs qui l'y ont conduit sont des plus honorables. Obligé par ses fonctions ministérielles de trancher fréquemment de graves questions, il a cruellement ressenti le manque de principes scientifiques en politique ; il s'efforce de remédier à cet état de choses. Sans se bercer du chimérique espoir de trouver une règle applicable dans tous les cas, il tente de poser les bases d'une méthode excluant le subjectivisme des sciences sociales. Il sait tout le temps qu'il faut à un essai de ce genre pour porter des fruits. La nécessité de créer une bonne méthode pour les sciences sociales est telle qu'il faut se réjouir de tous les efforts faits dans ce but. On ne demandera pas la perfection du premier coup si l'on songe à la peine qu'a causée aux Galilée, aux Descartes et aux Newton la création de la méthode de physique.

S. Dumas (Berne).

Haton de la Goupillière. — **Etude géométrique et dynamique des roulettes planes et sphériques.** — 1 vol. in-4°, 107 p.; Gauthier-Villars, Paris.

Cet ouvrage, comme l'indique son titre, est une étude des courbes obtenues par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. Une première partie comprend l'étude des roulettes planes à base rectiligne au point de vue de leurs propriétés géométriques. La seconde partie étudie ces mêmes roulettes au point de vue cinématique et dynamique et enfin la troisième et dernière partie traite des roulettes à base curviligne dans le plan et des roulettes sphériques.

Le premier chapitre est consacré à la recherche de l'équation différentielle de la roulette engendrée par une courbe roulant sans glisser sur une droite. La roulante ou génératrice étant rapportée à des coordonnées polaires emportées avec elle dans son déplacement et l'équation de la roulette étant exprimée en coordonnées rectangulaires rapportées à des axes fixes. Cette équation obtenue, il devient possible, même dans les cas où elle ne peut être intégrée, de résoudre les questions telles que la recherche du rayon de courbure et des coordonnées du centre de gravité de l'arc et de l'aire, la quadrature, la rectification. Ces résultats sont illustrés par des applications à un grand nombre de courbes, spirales, sinusoïdes de divers genres, etc., qui permettent de se rendre compte de la clarté et de la simplicité des méthodes. L'auteur introduit ensuite les coordonnées intrinsèques de la roulante pour exprimer les coordonnées x et y de la roulette, afin de simplifier l'étude de certaines courbes, entre autres des roulettes engendrées par la chaînette, des épicycloïdes, des courbes de genre parabole d'ordre quelconque. Ce système de coordonnées facilite également la recherche du lieu des centres de courbure du point de contact et son application à certaines classes de courbes roulantes (comprenant comme cas particuliers, la développée de la chaînette, la cycloïde, la tractrice roulante, la chaînette d'égale résistance) se présente sous une forme très claire et rapide. Le problème inverse, trouver la courbe qu'il faut faire rouler sur une droite pour que le

lieu des centres soit une courbe donnée d'avance, est également traité ainsi que le problème inverse des roulettes soit la recherche d'un profil tel que son roulement sur une droite engendre une trajectoire directement assignée.

Dans la seconde partie, l'auteur quitte le point de vue usuel, consistant à envisager la génération des roulettes comme un simple fait géométrique, pour introduire la notion de vitesse puis celle de force; faisant ainsi passer successivement la théorie du roulement du domaine de la géométrie à celui de la cinématique et à celui de la dynamique. Le premier chapitre : théorie cinématique des roulettes, considère celles-ci en tenant compte de la relation mutuelle des deux vitesses en jeu, vitesse du parcours de la trajectoire et vitesse du roulement, relation déduite de l'expression de l'arc de la roulette et de celle de l'arc du roulement. Une génératrice quelconque étant contrainte à réaliser la loi cinématique des aires, on obtient la loi de description de la roulette. On peut également substituer un autre mode de roulement, par exemple, l'obligation pour le rayon vecteur de la génératrice de réaliser une rotation uniforme autour de son pôle par rapport à l'axe polaire mobile qu'elle entraîne avec elle. Son application aux spirales sinusoïdes donne, comme cas particulier, l'équation de l'oscillation du pendule cycloïdal sous l'action de la pesanteur; à ce sujet l'auteur remarque la coïncidence de cette loi avec le roulement uniforme du cercle générateur par lequel on pourrait, dans ce cas, remplacer l'hypothèse, coïncidence qui le conduit à prévoir et vérifier qu'il en est de même pour le théorème de Newton généralisé sur le mouvement épicycloïdal isochrone dû à l'action d'une force centrale émanant du centre du cercle fixe proportionnellement à la distance. L'emploi des coordonnées intrinsèques simplifie l'étude de cet ordre de considérations et l'introduction d'un troisième mode de roulement, soit le tournoiement uniforme du plan de la génératrice. Dans le deuxième chapitre : théorie dynamique des roulettes, l'auteur conserve les notions précédentes et y adjoint, en outre, celle des forces capables de réaliser les relations de mouvement qu'on a en vue. Il cherche quels efforts il faudrait appliquer au point décrivant pour produire, conformément à une loi donnée, le roulement de la génératrice. Ce problème comporte une infinité de solutions, mais M. de la Goupillière remarque qu'en supposant une loi cinématique imposée à priori au roulement, la somme des projections tangentielles des forces est invariable, ce qui lui permet de déduire, de la loi cinématique, l'expression de cette force tangentielle à la roulette. Il applique les expressions obtenues pour les composantes de la force à des cas particuliers correspondants à des conditions variées : tournoiement uniforme des spirales sinusoïdes d'ordre quelconque dans leur roulement sur une droite, cycloïde engendrée par le tournoiement uniforme du plan du cercle générateur, etc. La force tangentielle est exprimée, dans le cas général, soit en fonction de y et de ses dérivées, soit en fonction de l'arc. Les coordonnées intrinsèques sont également utilisées avec succès pour l'étude dynamique des roulettes.

La troisième partie débute par la recherche de l'équation de la roulette en coordonnées polaires; les deux courbes, génératrice et base étant également connues en coordonnées polaires, l'une par rapport à un système entraîné avec elle, l'autre par rapport à un système fixe. Parmi les exemples, citons le roulement d'une droite sur un cercle qui permet de retrouver un théorème de Chasles, le roulement d'une spirale sinusoïde sur un cercle fixe et enfin l'étude des épi- et hypocycloïdes allongées ou raccourcies dont des cas

particuliers donnent la vérification de théorèmes et propriétés connus. Puis vient l'équation de la roulette en coordonnées rectangulaires appliquée à une série d'exemples qui donnent lieu à des remarques intéressantes ; entre autres le cas où la base fixe est une chaînette et la roulante une courbe quelconque, droite, spirale logarithmique, etc., ou bien la base est une parabole semicubique ou une cycloïde ou encore la roulante étant quelconque, la base est liée à elle par une relation telle que la roulette soit toujours rectiligne. Citons encore le cas inverse où la base est donnée et où la roulante s'en déduit (toujours avec la condition d'une roulette rectiligne) qui, dans le cas particulier où la base est une parabole conduit l'auteur au théorème : « Si, sur une parabole d'ordre tout à fait arbitraire, on fait rouler une spirale algébrique de degré inférieur d'une unité, et de paramètre approprié, en partant de la coïncidence de leurs deux pôles, celui de la spirale décrit une droite » (exception pour la base rectiligne ($m = 1$)).

Considéré en coordonnées exclusivement intrinsèques, le problème fournit l'équation naturelle de la roulette avec une quadrature. L'application au roulement d'un cercle sur un cercle, d'une spirale logarithmique sur une ligne quelconque, d'un cercle sur une développante d'ordre n quelconque d'un autre cercle et enfin d'un cercle sur une courbe compliquée, le tout en quelques pages, permet d'apprécier l'élégance de la méthode.

Les roulettes sphériques font l'objet des deux derniers chapitres, les trois courbes, base, roulante et roulette sont exprimées en fonction de la longitude et de la colatitude par rapport à un pôle fixe et à un pôle mobile. Parmi les applications, notons le roulement de deux loxodromies identiques l'une sur l'autre, la génération des épi- et hypocycloïdes, enfin la recherche de la base qui, associée à une roulante quelconque donnée, engendre une roulette qui soit un grand cercle de la sphère, avec, comme cas particuliers pour la roulante, la clélie de module quelconque ou la loxodromie qui donne le mouvement relatif des deux rouages de l'engrenage de roulement d'Euler. Dans le dernier chapitre, l'auteur envisage la « théorie dynamique des roulettes sphériques », il se borne au cas du roulement d'une génératrice quelconque sur le grand cercle équatorial, ce qui est l'analogue pour la sphère du roulement sur une base rectiligue pour le plan. Ce qui reste immuable étant aussi la force tangentielle, le problème ne diffère pas dans ses grandes lignes de celui du plan, quoique donnant lieu à des calculs plus longs. Comme exemple, l'auteur traite le roulement d'une loxodromie sur le grand cercle équatorial avec, comme loi cinématique donnée, la supposition que le déplacement progressif du point de contact sur la génératrice est uniforme en latitude. R. Masson (Genève).

L. Jacob. — **Le calcul mécanique.** Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs. (Collection de l'*Encyclopédie scientifique.)* — 1 vol. in-18 de 428 p., avec 184 fig. ; 5 fr.; O. Doin & fils, Paris.

L'idée de faciliter les calculs à l'aide de dispositifs mécaniques plus ou moins compliqués remonte à la plus haute antiquité, et, cependant, on peut dire que c'est seulement vers le milieu du siècle dernier que l'on a vu entrer dans la pratique courante des appareils à calcul de quelque valeur.

C'est que, dans ce domaine, non seulement il faut établir des principes, mais il est en plus nécessaire de les mettre sous forme de projet, puis de passer à la construction. Or, abstraction faite de l'effort financier, il faut

encore que les moyens d'action permettent l'exécution d'un travail généralement délicat.

On conçoit donc que le développement du calcul mécanique n'ait pu que suivre celui des moyens mêmes de production de l'industrie mécanique de précision. De création relativement récente, ce mode de calcul est d'autant moins connu que les mécanismes qui permettent de le réaliser sont très variés et quelquefois complexes.

Le présent ouvrage est divisé, comme l'indique son titre, en trois parties relatives à la résolution des questions d'arithmétique, d algèbre ou d'analyse.

L'auteur a, autant que possible, rapproché, dans les chapitres spéciaux, soit les appareils ayant un but commun, soit les appareils ayant le même but et un principe commun. Le lecteur peut ainsi s'orienter facilement.

Dans les questions de ce genre, le mode d'application d'un principe est aussi important que le principe lui-même, aussi l'auteur s'est-il attaché à donner, avec quelques détails, la description de certains appareils les plus employés ou les plus intéressants.

C'est la méthode déjà appliquée par lui à ses ouvrages antérieurs, dans le but de présenter, aux personnes qui s'intéressent à ces questions, non seulement des idées, mais aussi des réalisations.

Gust. Jaeger. — **Theoritische Physik. II.** 4te Auflage. (*Sammlung Gœschen*). — 1 vol. cart. in-12, 152 p.; 80 Pf.; G. J. Gœschen, Leipzig.

Tandis que le premier volume traite de la mécanique et de l'acoustique, le second, qui parait en 4me édition, est consacré à la lumière et à la chaleur. Il contient les notions essentielles de la théorie de la lumière et de la chaleur et de la théorie cinétique des gaz. Cette petite monographie continuera à être très appréciée des étudiants pour une première initiation à la Physique mathématique.

Eug. Netto. — **Die Determinanten.** (*Mathem. physik. Schriften für Ingenieure u. Studierende*, herausgegeben von E. Jahnke). — 1 vol. cart., 130 p.; 3 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

La collection de monographies entreprise par M. Jahnke, professeur à l'Ecole des Mines à Berlin, est destinée, comme on sait, à donner aux techniciens de courts aperçus des principales théories des sciences mathématiques et physiques.

M. Eug. Netto (Giessen), bien connu par ses travaux fondamentaux en Algèbre supérieure, s'est chargé du petit manuel concernant les déterminants. Il a fait un excellent choix de ce qui est utile aux étudiants des Ecoles techniques et il en donne une exposition claire, bien adaptée au but de l'ouvrage.

L'énumération des chapitres donnera une idée suffisante du chemin parcouru : Définition et propriétés élémentaires des déterminants. — Adjointes : théorème de Laplace sur la décomposition d'un déterminant. — Calcul d'un déterminant. — Produit de déterminants. — Formes spéciales de déterminants. — Equations linéaires. — Résultants; éliminants; discriminants. — Substitutions linéaires. — Applications géométriques. — Différentiation de déterminants. — Déterminants fonctionnels.

P.-J. Richard. — **Etude sur l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie avec de nombreux développements sur les assurances contre la maladie et l'invalidité.** 1 vol. petit in-8°, 118 p. ; 3 fr. 50. ; A. Hermann et fils, Paris.

Les compagnies d'assurances ont imaginé il y a quelques années une combinaison nouvelle : l'assurance complémentaire de l'assurance sur la vie. Moyennant une surprime, elles maintiennent la police en vigueur sans exiger de prime lorsque l'assuré tombe malade ou devient invalide. Il est inutile d'insister sur les services que rend cette combinaison en délivrant l'assuré du souci de payer sa prime au moment où la maladie diminue son gain tout en augmentant la valeur de l'assurance.

Après avoir exposé dans son introduction le but de l'assurance complémentaire et en avoir fait un historique rapide, M. Richard consacre son premier chapitre à l'état actuel de la question et aux difficultés qu'en présente la solution.

Dans le second chapitre, il fait brièvement la théorie mathématique de l'assurance contre la maladie et l'invalidité. Cette partie rendra de grands services à toutes les personnes qui voudront se mettre au courant de cette théorie sans l'approfondir dans tous ses détails ; elle forme une excellente introduction à l'étude des ouvrages plus étendus sur cette matière.

C'est dans le chapitre III que l'auteur aborde directement son sujet. Il y applique les résultats obtenus dans le chapitre précédent au calcul, pour les principales combinaisons, de la prime d'assurance complémentaire.

Dans le chapitre IV, nous trouvons de nombreuses tables numériques avec quelques indications sur la manière de les dresser : tables de mortalité, de morbidité et d'invalidité, tables de commutation correspondantes, tables d'annuités viagères, etc. M. Richard déduit de ces nombres la valeur de la prime d'assurance complémentaire dans quelques cas usuels et nous en montre ainsi l'ordre de grandeur.

Le chapitre V ne fait qu'effleurer le calcul des réserves. Nous le regrettons d'autant plus que l'auteur nous dit que l'étude de cette question conduit à des résultats très intéressants.

Nos statistiques de l'invalidité sont si incomplètes que les assureurs pourraient un peu craindre cette nouvelle combinaison. Nous croyons pourtant qu'avec les précautions que M. Richard recommande dans sa conclusion, ils peuvent l'essayer sans grand danger. L'expérience leur permettra peu à peu de perfectionner leurs tarifs et leurs conditions, comme ce fut le cas dans toute l'assurance.

L'ouvrage de M. Richard vient à son heure combler une lacune dans la littérature scientifique de langue française.

S. Dumas (Berne).

A. Séférian. — **Notice sur le système des six coordonnées homogènes d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires.** — 1 fasc., 79 p. in-8° ; 1 fr. 50 ; A. Denéréaz-Spengler & Cᵒ, Lausanne.

L'auteur, dans son introduction, constate que la *Statique graphique des systèmes de l'espace*, de M. B. Mayor, suppose le lecteur familiarisé avec le système des six coordonnées homogènes d'une droite et avec la théorie des complexes linéaires. Son opuscule a pour but de mettre tout ingénieur en

état de lire l'ouvrage précité et contient en outre quelques explications sur certains paragraphes du même traité.

Nous aimons à croire que la brochure atteint le but très spécial qu'elle se propose. Mais à un point de vue plus général, il ne nous semble pas qu'elle réalise un progrès sur les nombreux exposés antérieurs.

M. Stuyvaert (Gand).

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 2. Jahrgang, 1911. — 1 vol. in-16 ; IX-567 p., relié : M. 7 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Nous avons déjà signalé cet annuaire des mathématiciens et des physiciens, à l'occasion de sa première année. Cette deuxième année (1911) qui débute par une Notice sur Hermann Minkowski (avec un portrait), par D. Hilbert et H. Weyl, contient de nombreuses tables, formulaires et renseignements utiles à tous ceux qui s'occupent de sciences mathématiques et physiques. MM. Auerbach (Iéna) et Rothe (Clausthal) se sont assurés le concours d'un grand nombre de collègues, parmi lesquels nous citerons MM. Hessenberg (Note sur la théorie des ensembles), Wieferich (le dernier théorème de Fermat), Tœplitz (Equations intégrales), Ziegel (Assurances), Lietzmann (Enseignement mathematique).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par Mittag-Lefler, T. XXXIV, Stockholm.

Fasc. 1 et 2. — N.-F. Nörlund : Fractions continues et différences réciproques (p. 1-108). — Osk. Perron : Ueber lineare Differenzengleichungen. — Id. : Ueber lineare Differenzengleichungen mit ration. Koeffizienten. — K. Knopp : Divergenzcharactere Gewisser Dirichlet'scher Reihen.

Fasc. 3. — C.-W. Oseen : Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications. — E. Netto : Ueber Pfaff'sche Aggregate.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, dirigées par Gomes Teixeira. — Vol. V.

Nos 3 et 4. — C. Servais : Sur les centres de courbure principaux de trois quadriques homofocales. — P. Appell : Sur les polynômes $U_{m,n}$ d'Hermite et des polynômes X_n de Legendre. — D. Pompeiu : Sur les fonctions représentées par des intégrales définies. — F. Gomes Teixeira : Sobre o methodo de Gauss para o calculo approximado dos integraes definidos. — G. Pirondini : Essai d'une théorie analytique des lignes non-euclidiennes.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCCVII. Rendiconti. — Rome.

2e *semestre 1910.* — G. Abetti e C. Cappello : La flessione del supporto dei pendoli nelle determinazioni di gravità relativa. — *Id.* : Metodi proposti

per la determinazione diretta della flessione del supporto dei pendoli gravimetrici. — E. Almansi : Sulla distribuzione dell'elettricità in equilibrio nei conduttori. — L. Amoroso : Alcune osservazioni intorno alla teoria della serie Fourier-Hilbert Schmidt. — T. Boggio : Sul gradiente di una omografia vettoriale. — E. Bompiani : Sopra le funzioni permutabili. — C. Burali-Forti : Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali. — P. Burgatti : Sulla trasformazione e sulla riduzione dei sistemi Hamiltoniani. — U. Cisotti : Sulla variazione di curvatura delle geodetiche spiccate da un punto di una superficie. — U. Crudeli : Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio. — A. Dell'Agnola : Della convergenza uniforme ordinaria — L. Orlando : Sulla caratteristica del risultante di Sylvester. — *Id.* : Nuove osservazioni sul problema di Hurwitz. — *Id.* : Sull'equazione alle semisomme e sul teorema di Hurwitz. — *Id.* : Sopra alcune questioni relative al problema di Hurwitz. — G. Pavanini : Sul potenziale newtoniano di una circonferenza omogenea. — M. Picone : Sopra un'equazione integrale di prima specie a limiti variabili considerata da Volterra. — G. Ricci : Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori. — W. Stekloff : Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm-Liouville. — G. Vacca : Sopra un problema di Huygens.

Bibliotheca mathematica. Zeitsch. f. Geschichte der mathem. Wissenschaften herausgegeben von G. Eneström. — 3. Folge, Teubner, Leipzig.

Band 10. Heft 4. — G.-R. Kaye : The two Aryabhatas. — E. Wiedemann : Ibn al Haitams Schrift über die sphärischen Hohlspiegel. — G. Eneström : Eine Legende von dem eisernen Fleisse Leonhard Eulers. — G.-A. Miller : Historical sketch of the developpement of the theory of groups of finite order. — G. Loria : Giovanni Schiaparelli quale storico dell' antica astronomia.

Band 11. Heft 1. — G. Eneström : Ueber Probleme der mathematischen Geschichtsschreibung. — H. Suter : Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von Abu'l-Raihan Muh. el-Biruni. — David-E. Smith : A note on Johannes Schonerus. — G. Eneström : Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors « Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ».

Bulletin of the American mathematical Society. - New-York. Vol. XVII.

Fasc. 1 et 2. — W.-R. Longley : Note on Implicit Functions Defined by Two Equations when the Functional Determinant vanishes. — F. H. Safford : Sturm's Method of Integrating $dx : \sqrt{X} + dy : \sqrt{Y}$. - F.-R. Sharpe : A Property of a Special Linear Substitution. — L.-E. Dickson : On the Factorization of Integral Functions with p-adic Coefficients. — F.-N. Cole : The Seventeenth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — The Preparation of College and University Instructors in Mathematics : Committee Report.

Fasc. 3 et 4. — W.-D. Mac-Millan : A New Proof of the Theorem of Weierstrass Concerning the Factorization of a Power Series. — R.-G.-D. Richardson : On the saddlepoint in the theory of maxima and minima and in the calculus of variations. — L. Ingold : Note on Identities connecting certain integrals.

Fasc. 5. — University Courses in mathematics and the Master's Degree: Committee Report.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. — Tome XXXIV, 1910, Gauthier-Villars, Paris.

Avril-Décembre 1910. — M. Plancherel : Remarques sur l'intégration de l'équation $\Delta u = 0$. — G. Haag : Sur les surfaces moulures applicables sur une surface de révolution. — J. Haag : Géométrie infinitésimale. Sur une démonstration de Joseph Bertrand. — B. Hostinski : Sur les quartiques planes parallèles. — P. Levy : Sur les valeurs de la fonction de Green dans le voisinage du contour. — Extrait d'une lettre de M. Carrès. — Extrait d'une lettre de M. Haag. — E. Cartan : La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile. — G. Darboux : Un peu de géométrie à propos de l'intégrale de Poisson.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris.

1er semestre 1911. — 3 janvier. — G. Tzitzeica : Sur les congruences W. — M. de Domeczky : Sur la théorie des fonctions symétriques. — C. Popovici : Sur les mouvements permanents stables. — Leinekugel le Cocq : Sur la théorie générale de deux solides indéformables suspendus d'où dérivent les formules applicables à tous les systèmes de ponts suspendus rigides. — E. Esclagon : Sur un régulateur rotatif à vitesse fixe ou variable. — Ch.-Ed. Guillaume : Sur la définition des unités électriques pratiques.

9 janvier. — E. Picard : Sur une équation intégrale singulière. — Le Fort : Sur une formule d'interpolation établie en vue des applications pratiques.

16 janvier. — C. Guichard : Sur les surfaces dont les normales touchent une quadrique. — G. Darboux : Remarque sur la communication de M. Guichard. — E. Cahen : Sur les séries intégro-entières.

23 janvier. — C. Russyan : Le système d'équations différentielles ordinaires canoniques généralisées et le problème généralisé de S. Lie. — P. Levy : Sur les dérivées des fonctions des lignes planes. — U. Cisotti : Sur la réaction dynamique d'un jet liquide. — L.-E. Bertin : Complément aux « lois générales du mouvement accéléré ou retardé des navires ».

30 janvier. — Th. Egoroff : Sur les suites de fonctions mesurables. — J. Boselli : Vitesses de réaction dans les systèmes hétérogènes. — Torres Quevedo : Construction mécanique de la liaison exprimée par la formule $\frac{d\zeta}{dz} = \operatorname{tg} \omega$. — R. Bourgeois : Sur une cause d'erreur instrumentale des appareils de mesure de base en Géodésie.

6 février. — H. Villat : Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle. — A. Korn : L'état hélicoïdal de la matière électrique ; hypothèses nouvelles pour expliquer mécaniquement les phénomènes electro-magnétiques.

13 février. — C. Guichard : Sur la déformation des quadriques. — P. Dienes : Sur les séries de polynômes et les singularités des fonctions analytiques. — N. Saltykow : La théorie des caractéristiques et ses applications.

20 février. — M. Gevrey : Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. — A. Buhl : Sur les applications géométriques de la formule de Stokes. — C. Störmer : Sur la structure de la couronne du soleil.

27 février. — J. Chazy : Sur l'indétermination des fonctions uniformes au voisinage de leurs coupures. — S. Berstein : Sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes. — C. Cailler : Sur la pentasérie linéaire des corps solides. — M. d'Ocagne : Détermination nomographique du chemin parcouru par un navire en cours de mouvement varié. — Bertin : Observations sur la note de M. d'Ocagne.

6 mars. — E. Borel : La structure des ensembles de mesure nulle. — T. Lalesco : Sur une équation intégrale du type Volterra. — L. Roy : Sur la propagation des discontinuités dans le mouvement des fils flexibles. — C. Störmer : La structure de la couronne du soleil dans la théorie d'Arrhénius.

13 mars. — H. Villat : Sur le problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire. — Gust. Dumas : Sur la résolution des singularités des surfaces. — Nicolau : Sur la variation du mouvement de la lune. — Z. de Goecze : Contribution à la quadrature des surfaces courbes. — C. Gutton : Comparaison des vitesses de propagation de la lumière et des ondes électromagnétiques le long des fils.

20 mars. — S. Janiszewski : Sur les continus irréductibles entre deux points. — R. Garnier : Sur les équations différentielles à points critiques fixes et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur.

27 mars. — C. Guichard : Sur les réseaux C tels que les lignes d'une série soient courbes planes. — H. Lebesgue : Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées. — G. Levy : Sur la fonction de Green pour un contour algébrique. — M. Frechet : Sur la notion de différentielle.

3 avril. — Th. De Donder : Sur le multiplicateur de Jacobi.

10 avril. — A. Buhl : Sur des volumes pris pour paramètres de points, de droites et de plans, d'après une méthode appuyée par M. Darboux sur la théorie des moments d'inertie. — G. Darboux : Remarque sur la note précédente. — J. Le Roux : Sur les covariants fondamentaux du second ordre dans la déformation finie d'un milieu continu.

Giornale di Matematiche di Battaglini, diretta da Ernesto Pascal, colla collaborazione di P. del Pezzo. A. del Re, R. Marcolongo, D. Montenana, G. Torelli. Vol. XLVIII (1º della 3ª. Serie).

E. Pascal : Prefazione nella 3ª. serie. — G. Torelli : Alfredo Capelli, Cenno necrologico. — E. Pascal : L'integratore meccanico per le equazioni differenziali. — C.-M. Piuma : Sui quadrati magici di nove interi. — Il prossimo congresso delle scienze a Napoli. — Avviso di concorso. — C. Spelta : Sulla determinazione di velocità e delle accelerazioni nel moto più generale di un corpo rigido. — S. Cherubino : Sulla costruzione dei sottogruppi di un gruppo qualunque che anno per ordine la massina potenza di un numero primo. — G. Loria : Sulla topologia delle superficie trascendenti. — J.-B. Grandpas : Sur les déterminants dont les éléments ont plusieurs indices. — E. Pascal : Piccole note bibliografiche. — E. Ricotti : Sulle serie divergenti sommabili. — A. Vergerio : Sul teorema del valor medio di Bonnet. — A. Cavaccini : Su certe formazioni invariantive della quartica binaria e su cette serie ricorrenti. — T. Rietti : Sulle operazioni distributive normali. — O. Nicoletti : Un'equazione analoga all'equazione secolare. — E. Pascal : Sommarii dei Corsi monografici di Matematiche Superiori dettati nelle Università Italiane nell'anno scolastico 1909-1910. — C. Mineo : Sulle superficie riferite a un sistema geografico, e sulla determinazione intrinseca del

geoide. — A. Kempe : Sur l'approximation des racines des équations de degré supérieur. — R. Occhipinti : Su alcune semplici relazioni fra le radici di una equazione algebrica e quelle della derivata. — T. Hayashi : Démonstration élémentaire du théorème de M. Hadamard sur la valeur maximum du déterminant. — E. Ciani : Le curve piane di quart'ordine. — L. Amoroso, Sul valore massimo di speciali determinanti. — Ant. Maggi : G. Morera : 1856-1909. — S. Pincherle : Sopra una estensione del concetto di divisibilità. L. Tonelli : Sull'iterazione.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer. Band 20, 1911. — B. G. Teubner, Leipzig.

Nos 1 et 2. — R. Fueter : Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. (Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.) — Robert Haussner : Das mathematische Institut der Universität Jena. (Mit 6 Abbildungen im Text.) — Heinrich Liebmann : Die elementaren Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. — Hans Hahn : Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen. — Paul Stäckel : Geltung und Wirksamkeit der Mathematik

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel. Band CXXXIX. — Georg Reimer, Berlin.

Heft 3 u. 4. — J. Schur : Ueber die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen (Fortsetz. u. Schluss). — P. Koebe : Ueber die Uniformisierung beliebiger analyt. Kurven. II. — R. Remak : Ueber die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — D. Mirimanoff : Sur le dernier théorème de Fermat.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich, F. Mertens u. W. Wirtinger. — Eisenstein & Co. Wien.

XXII Jahrgang (1911) : 1., 2. Vierteljahr. — A. Axer : Das Analogon zur Funktion (x) in einem zu vorgegebenen Primzahlen teilerfremden Zahlensystem. — A. Meder : Zur Differentiation bestimmter Integrale nach einem Parameter. — R. v. Mises : Ueber die Stabilität rotierender Wellen. — J. Radon : Ueber einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale. — P. Roth : Ueber Beziehungen zwischen algebraischen Gebilden vom Geschlechte drei und vier.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant, C. Bourlet et R. Bricard, 4e série. — Gauthier-Villars, Paris.

Tome X, juillet-décembre 1910. — R. Alezais : Sur l'allure d'une courbe. R. d'Adhémar : Etude élémentaire d'une série sur son cercle de convergence. — V. Jamet : Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées. — R. Bricard : Sur les Surfaces de Jamet réglées. — J. Hadamard : Sur un problème de cinématique navale. — R. Bouvaist : Construction d'un centre de courbure en un point d'une strophoïde. — A. Buhl : Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (3e note). — Auric : Note sur la géométrie du triangle. — Ch. Halphen : Sur les accélérations successives. — G. Fontené : Théorie des fonctions hyperboliques. — V. Jamet : Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. — Emile

Turrière : Un cas particulier d'attraction d'un corps sur un point éloigné. — E. Keraval : Surfaces partiellement cylindroïdes.

Proceedings of the London Mathematical Society. Série 2, vol. 9.

Fasc. 1 à 5. — A. Cunningham : On 8-vic, 16-ic, &c. Residuacity. — W. H. Young : On a new method in the theory of integration. — M[lle] H. P. Hudson : On the 3-3 birational transformation in three dimensions. — J. W. Nicholson : The scattering of light by a large conducting sphere. — H. W. Turnbull : Ternary Quadratic. — H. F. Baker : An Expression of $(t - z)^{-1}$ by means of Polynomials. — G H. Hardy : Theorem connected with Maclaurin's Test for the Convergence of Series. — H. F. Baker : Notes on the Theory of the Cubic Surface. — G. B. Mathews : Relations between Arithmetical Binary Cubic Forms and their Hessians. — Miss Majorie Long : On Geiser's Method of Generating a Plane Quartic. — W. P. Milne : The generation of Cubic Cuvers by Apolar Pencils of Lines. — J. M. Hill and A. Berry : On Differential Equations with Fixed Branch Points. — A. E. Western : Some criteria for the residues of eighth and other powers. — G. T. Bennett : The composition of finite displacements and the use of axodes. — W. H. Young : On semi-integrals and oscillating successions of functions. — W. H. Young and Grace Chisholm Young : On the Existence of a Differential Coefficient. — G. T. Bennett : The Double Six. — F. B. Pidduck : The Stability of Roating Shafts. — W. H. Young : A Note on the Property of being a Differentiel Coefficient. — S. Chapman : On Non-Integral Orders of Summability of Series and Integrals.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Direttore G.-B. Guccia. Tomo XXX (2° semestre 1910).

Fasc. 2. — R. Weitzenböck : Das Formensystem der Korrelation im R_3. P. Pizetti : Sul teorema di Malus pei raggi luminosi curvilinei. — A. Korn : Ueber die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elasticitätstheorie. — A. Korn : Ueber die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers bei verschwindenden Druckkomponenten an der Oberfläche. — G. Bagnera et de Franchis : Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro. — M. Stuyvaert : Sur la congruence de droites de troisième ordre et classe, de genre deux.

Fasc. 3. — F. Severi : Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica. — M. Plancherel : Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies. — A. Korn : Nachträgliche Bemerkung zu der Abhandlung : Ueber die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elasticitätstheorie ». — G. Mittag-Leffler : Sur un problème d'Abel (Extrait d'une lettre à M. Marcel Riesz). — M. Riesz : Sur un problème d'Abel (Extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler). — C. Segre : « Aggiunta alla Memoria : Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi ». — M. Picone : Sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine del tipo iperbolico in due variabili indipenditi. — H. Weyl : Ueber die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenz- phänomene.

Revue du Mois (La), dirigée par E. Borel. 6[e] année. — F. Alcan, Paris.

10 janvier 1911. — E. Borel : Jules Tannery.

10 mars — Jules Tannery : Pensées.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, fondée par L. Olivier. Librairie Armand Colin, Paris.

15 décembre 1910. — E. Bigourdan : La découverte des Lois de Kepler.
30 décembre. — Ph. Hatt : L'astrolabe à prisme.
15 et 30 janvier 1911. — Ct Paul Renard : Les aéroplanes (1er et 2e articles).
15 février. — J. Bosler : Les récents progrès des méthodes astrophysiques aux Etats-Unis.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von R. Mehmke u. C. Runge. — 59 Band, B.-G. Teubner, Leipzig.

Heft 1. — B. Reismann : Ortsbestimmung auf photographischem Wege aus Aufnahmen mit Zenitmarke. — Horst v. Sanden : Zur Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. — *Id.* Gegenseitige Orientierung von nahezu parallelen Aufnahmen in der Photogrammetrie. — H. Kimmel : Konstruktion der Strömungsbilder eines stromdurchflossenen Kreisringes, eines zylindrischen Solenoids und einer gleichmässig mit Masse belegten Kreisfläche. — E. Waelsch : Konstruktion des Krümmungs-mittelpunktes bei polytropischen Kurven. — A. Willers : Zum Integrator von E. Pascal. — H. Blasius : Mitteilung zu meiner Abhandlung über : Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. — P. Fillunger : Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt, unter Beschränkung auf das ebene Problem. — L. von Schrutka : Eine Methode zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen mit der Rechenmaschine. — A. Schulze : Ueber trimetrische Liniennetze. — G. Mattausch : Zur Ermittelung der Stromverteilung in Leitungsnetzen. — R. Mehmke : Beiträge zur Kinematik starrer und affin-veränderlicher Systeme, insonderheit über die Windung der Bahnen der Systempunkte.

Heft 2. — A. Francke : Der hyperbolische Kosinusbogenträger (Kettenlinienträger). — U. Cisotti : Sopra la derivazione dei canali. — P. Werkmeister : Ueber graphische Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen, insbesondere über graphische Logarithmentafeln. — S. Timoschenko : Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. — R. Mehmke : Beiträge zur Kinematik, etc. (Fortsetzung).

2. Livres nouveaux :

J. Andrade. — **Le mouvement.** Mesures de l'étendue et mesures du temps. — 1 vol. in-8, 328 p., cart. ; 6 fr. ; F. Alcan, Paris.

D. Behrendsen und E. Götting. — **Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchen-Bildungsanstalten.** I. *Teil :* Für höhere Mädchenschulen zugleich Unterstufe für Lyzeen und Studienanstalten. — 2e édit. 1 vol. in-8, VIII-348 p. ; 3 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Crelier. — **Systèmes cinématiques** *(Collection Scientia)*. — In-8 de 100 p., avec un portrait du colonel Mannheim ; cartonné ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

E. Dumont. — **Arithmétique générale.** Mesure des grandeurs géométriques : nombres naturels, qualifiés, complexes, ternions et quaternions. — 1 vol. in-8, XVII-275 p. ; 10 fr. ; Hermann & fils, Paris.

P. Engelhardt. — Untersuchungen über die im Schlusswort des Lie'schen Werkes **Geometrie der Berührungstransformationen** angedeuteten Probleme. — 1 fasc. in-8, 65 p.; 2 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Paul B. Fischer. — **Koordinatensysteme** (*Sammlung Göschen* Nr. 507). 1 vol. in-16; 80 Pf.; G. J. Göschen, Leipzig.

R. Fueter. — **Die Klassenkörper** der komplexen Multiplikation und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Bericht zur Feier des 100. Geburtstags Eduard Kummers der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 1 fasc. in-8, 47 p.; 1,50 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Franz Hack. — **Wahrscheinlichkeitsrechnung** (*Sammlung Göschen*, Nr. 508). — 1 vol. in-16; 80 Pf.; G. J. Göschen, Leipzig.

Sp.-C. Haret. — **Mécanique sociale**. — 1 vol. in-8, 256 p.; 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

G. Junge. — **Ueber den Fehler bei logarithmischen Rechnungen.** Beilage zum Programm des königl. Gymnasiums nebst Realschule zu Landsberg a. W., Ostern 1911. — 1 fasc. in-4, 19 p.; Dermietzel & Schmidt, Landsberg.

M. Lecat. — **Leçons sur la théorie des déterminants** à n dimensions avec applications à l'Algèbre, à la Géométrie, etc. — 1 vol. in-4, 222 p.; Ad. Host, Gand.

H. Otti. — **Hauptfragen und Hauptmethoden der Kartenentwurfslehre** unter besonderer Rücksichtnahme auf die Abbildung der Schweiz. Beilage zum Jahresbericht der Aargauischen Kantonsschule. — 1 fasc. in-4, 63 p.; Sauerländer & C°, Aarau.

P.-J. Richard. — **Etude sur l'assurance complémentaire** de l'assurance sur la vie, avec de nombreux développements sur les assurances contre la maladie et l'invalidité. — 1 vol. in-8, 118 p.; 3 fr. 50; A. Hermann & fils, Paris.

A. Sérérian. — **Notice sur le système des six coordonnées homogènes** d'une droite et sur les éléments de la théorie des complexes linéaires. — 1 vol. in-4, 79 p.; A. Dénéréaz-Spengler, Lausanne.

H. Weber u. J. Wellstein. — **Encyclopädie der Elementare-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer und Studierende, III. *Angewandte Mathematik*, 1: *Mathem. Physik*, 2te Auflage. — 1 vol. in-4, 536 p.; 12 fr.; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Zoretti. — **Leçons sur le prolongement analytique** professées au Collège de France (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiées sous la direction de M. Emile Borel). — In-8 de VI-116 p., avec 3 figures; 3 fr. 75; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome I, volume 2, fasc. 3: *Propriétés générales des corps et des variétés algébriques*, exposé d'après l'article allemand de G. Landsberg, par J. Hadamard et J. Kurschak. — *Théorie des formes et des invariants*, exposé d'après l'article allemand de Fr. W. Meyer, par J. Drach. — Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. 2. Jahrgang, 1911. — 1 vol. in-16; IX-567 p., relié; M. 7; B. G. Teubner, Leipzig.

B.-G. Teubner 1811-1911. Geschichte der Firma in deren Auftrag herausgegeben von Friedrich Schulze. Leipzig im Jahre 1911. — 1 vol. in-4, 250 p.; Teubner, Leipzig.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS

Dans notre ouvrage intitulé : *Les sommes de* p^{iemes} *puissances distinctes égales à une* $p^{\text{ième}}$ *puissance*[1], nous avons démontré que, quel que soit le nombre N, les équations

$$N = \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} ,$$

$$8N = x^2 - y^2 ,$$

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2} ,$$

$$8Nz + 1 = y^2 ,$$

sont possibles en nombres entiers; nous en avons déduit des méthodes nouvelles de décomposition des nombres en facteurs. Ce sont ces méthodes que nous allons examiner et simplifier par l'emploi des résidus triangulaires ou quadratiques.

1re méthode. — Considérons l'égalité

$$N + \frac{y(y+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{2} \qquad (1)$$

et cherchons quel nombre triangulaire, nous devons ajouter à N, pour obtenir un autre triangulaire ; lorsque N est premier, les seules valeurs de x et y satisfaisant à l'équation sont

$$x = \frac{N+1}{2} , \qquad y = \frac{N-3}{2} ;$$

et

$$x = N , \qquad y = N - 1 .$$

---

[1] Voir l'analyse dans l'*Ens. math.* du 15 mai 1911. *(Réd.)*

Si N est composé, une décomposition de N en un produit de deux facteurs est donnée par l'égalité

$$N = \frac{(x-y)(x+y+1)}{2}.$$

Nous admettons N impair et débarrassé des facteurs 5, par suite terminé par 1, 3, 7 ou 9; le chiffre des unités des nombres triangulaires étant 0, 1, 3, 5, 6 ou 8, il s'ensuit que :

si N est terminé par 1, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 0 et 5 et leurs rangs y sont $\dot{1}0 + 4$, $\dot{1}0 + 5$, $\dot{1}0 + 9$ et $\dot{1}0$;

si N est terminé par 3, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 0, 3, 5 et 8 et leurs rangs y sont $\dot{1}0 + 2$, $\dot{1}0 + 4$, $\dot{1}0 + 5$, $\dot{1}0 + 7$, $\dot{1}0 + 9$ et $\dot{1}0$;

si N est terminé par 7, les triangles $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 1, 3, 6 ou 8 et leurs rangs y sont $\dot{1}0 + 1$, $\dot{1}0 + 2$, $\dot{1}0 + 3$, $\dot{1}0 + 6$, $\dot{1}0 + 7$ et $\dot{1}0 + 8$;

si N est terminé par 9, les triangulaires $\frac{y(y+1)}{2}$ à ajouter sont ceux terminés par 1 et 6 et leurs rangs y sont $\dot{1}0 + 1$, $\dot{1}0 + 3$, $\dot{1}0 + 6$ et $\dot{1}0 + 8$.

Soient maintenant, *pour le module* δ,

$$N \equiv \rho \qquad \text{et} \qquad \frac{x(x+1)}{2} \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n;$$

de l'égalité (1), nous déduisons

$$\rho + \frac{y(y+1)}{2} \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$$

et nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho, \rho_3 - \rho, \ldots, \rho_n - \rho$$

ou

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$$

en posant $\rho_i - \rho = r_i$; mais des résidus r_i ainsi obtenus, nous ne pourrons conserver que ceux qui font partie de la suite ρ_i puisque $\frac{y(y+1)}{2}$ est un triangulaire; la suite des nombres triangulaires à ajouter à N se trouvera donc considérablement réduite et cette suite se réduira pour chaque nouveau diviseur δ employé.

Limite des opérations. Puisque

$$2N = (x - y)(x + y + 1) ,$$

le facteur $(x - y)$ est le plus petit diviseur de 2N; si nous ne trouvons pas de solution y inférieure à une certaine limite a, nous en conclurons

$$y > a ,$$

par suite

$$\frac{x(x+1)}{2} > N + \frac{a(a+1)}{2} \qquad \text{d'où} \qquad x > \frac{-1 + \sqrt{8N + (2a+1)^2}}{2}$$

et

$$x + y + 1 > \frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} + (2a+1)}{2} .$$

Mais $x - y = \frac{2N}{x + y + 1}$; donc

$$x - y < \frac{4N}{\sqrt{8N + (2a+1)^2} + (2a+1)} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{2} .$$

Si $2s + 1$ et $2\sigma + 1$ sont deux diviseurs de N dont le produit égale N lui-même, à ces diviseurs correspondent les deux solutions données par les systèmes d'équations

1er système : $x - y = 2s + 1$; $x + y + 1 = 2(2\sigma + 1)$.

2e système : $x - y = 2(2s + 1)$; $x + y + 1 = 2\sigma + 1$.

Par conséquent, si $\lambda < 2N < (\lambda + 1)^2$, les diviseurs que les essais ont éliminés sont ceux compris entre λ et $\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{2}$ ainsi que ceux compris entre $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{4}$.

Mais si les diviseurs que nous cherchons sont les diviseurs moindres que $\sqrt{N}$, la limite inférieure de a sera la partie entière de la valeur de α satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + (2\alpha + 1)^2} - (2\alpha + 1)}{2} = \sqrt{N} \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\sqrt{N} - 1}{2}; \qquad (2)$$

si nous prenons, comme première limite supérieure, la partie entière par excès de la valeur de a satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + (2a + 1)^2} - (2a + 1)}{2} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{8N - (\lambda^2 + 2\lambda)}{4\lambda}, \qquad (3)$$

les diviseurs éliminés seront ceux compris entre $\sqrt{N}$ et $\frac{\sqrt{8N + (2a + 1)^2} - (2a + 1)}{4}$. En d'autres termes, p étant le plus grand nombre premier contenu dans cette dernière limite, il restera à essayer tous les diviseurs premiers non supérieurs à p, hormis les diviseurs des modules employés; et si le nombre N n'est divisible par aucun d'eux, nous en conclurons que N est un nombre premier.

Les divisions les plus rapides sont évidemment celles par 9 et par 11; aussi ce sont là les premiers diviseurs à employer. En procédant par limites successives, à partir de $\alpha = \frac{\sqrt{N} - 1}{2}$, on arrivera à décomposer avec facilité tout nombre, si grand soit-il!

Exemple. Soit à décomposer le nombre 40199; résolvons l'équation

$$40199 + \frac{y(y + 1)}{2} = \frac{x(x + 1)}{2}. \qquad (4)$$

Observons, avant tout, que 40199 n'est divisible par aucun des nombres 3, 7, 11 et 13 que nous allons employer comme modules; de plus, 40199 étant terminé par 9, les triangulaires à ajouter occupent les rangs $\dot{10} + 1$, $\dot{10} + 3$, $\dot{10} + 6$ et $\dot{10} + 8$.

Puisque $200^2 < 40199 < 201^2$ et $283^2 < 2 \times 40199 < 284^2$, les relations (2) et (3) donnent pour limite inférieure $\alpha = 99$

et pour première limite supérieure $a = 213$; considérons donc les nombres

101	103	106	108
111	113	116	118
121	123	126	128
131	133	136	138
141	143	146	148
151	153	156	158
161	163	166	168
171	173	176	178
181	183	186	188
191	193	196	198
201	203	206	208
211	213		

Si du 101ᵉ triangulaire au 213ᵉ, nous n'obtenons pas de solution, les diviseurs restant à essayer seront moindres que

$$\frac{\sqrt{8N + (2a+1)^2} - (2a+1)}{4} = \frac{\sqrt{321592 + 182329} - 427}{4} = 70, \dots,$$

donc non supérieurs à 67.

L'égalité (4) donne successivement :

Pour le module 9,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 3, 6$$

d'où nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 4, 5, 7, 1;$$

mais 4, 5 et 7 sont des non-résidus triangulaires pour le module 9, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1 \pmod 9$$

d'où

$$y = \dot{3} + 1.$$

Pour le module 11,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 10$$

d'où il faudrait

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 6\,,\ 7\,,\ 9\,,\ 10\,,\ 1\,,\ 5\ ;$$

mais 7, 9 et 5 sont des non-résidus triangulaires pour le module 11, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1\,,\ 6\,,\ 10 \qquad \pmod{11}$$

d'où

$$y = \dot{11} + 1\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 9\ .$$

Pour le module 7,

$$5 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 6$$

d'où nous devrions avoir

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 2\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 1\ ;$$

mais 2 et 5 sont des non-résidus triangulaires pour le module 7, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 1\,,\ 3 \qquad \pmod{7}$$

d'où

$$y = \dot{7} + 1\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 5\ .$$

Pour le module 13,

$$3 + \frac{y(y+1)}{2} \equiv 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 10$$

d'où il faudrait

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 10\,,\ 11\,,\ 12\,,\ 0\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 7\ ;$$

mais 11, 12, 5 et 7 sont des non-résidus triangulaires pour le module 13, par suite

$$\frac{y(y+1)}{2} \equiv 0\,,\ 3\,,\ 10 \qquad \pmod{13}$$

d'où

$$y = \dot{13} + 0\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 8\,,\ 10\,,\ 12\ .$$

Après avoir supprimé du tableau les nombres qui ne sont pas $\dot{3}+1$; $\dot{11}+1, 3, 4, 6, 7, 9$; $\dot{7}+1, 2, 4, 5$; $\dot{13}+0, 2, 4, 8, 10, 12$, il ne reste plus que les nombres

$$103\,, \quad 106 \quad \text{et} \quad 166\,.$$

Aucun d'eux ne fournit de solution : par suite, si 40199 est composé, son plus petit diviseur ne peut dépasser 67. Si nous prenons maintenant $a = 300$ et si du 214ième triangulaire au 300ième, nous ne trouvons pas de solution, c'est que les diviseurs à essayer sont moindres que

$$\frac{\sqrt{321592+361201}-601}{4} = 56\,, \dots\,.$$

donc non supérieurs à 53 ; si, au contraire, nous trouvons une solution entre les limites considérées, le nombre N admettra un diviseur plus grand que 53 et non supérieur à 67. Considérons donc les triangulaires dont les rangs sont les suivants :

		216	218
221	223	226	228
231	233	236	238
241	243	246	248
251	253	256	258
261	263	266	268
271	273	276	278
281	283	286	288
291	293	296	298

Après en avoir éliminé les nombres qui ne sont pas $\dot{3}+1$; $\dot{11}+1, 3, 4, 6, 7, 9$; $\dot{7}+1, 2, 4, 5$; $\dot{13}+0, 2, 4, 8, 10, 12$, il ne reste plus que les nombres

$$268 \quad \text{et} \quad 298\,.$$

Le triangulaire de rang 268, augmenté du nombre 40199, donne le triangulaire de rang 390 ; par suite,

$$40199 = 76245 - 36046 \quad \text{ou} \quad \frac{390^2+390}{2} - \frac{268^2+268}{2}$$

$$= \frac{(390-268)(390+268+1)}{2}$$

$$= 61 \times 659\,.$$

2me méthode. — Nous avons démontré le théorème suivant :

« *Les nombres composés qui ne sont pas de la forme* 2^k, *pour* $k \geq 2$, *sont tous contenus dans l'expression*

$$\frac{u(2v-u+1)}{2},$$

les nombres u *et* v *satisfaisant aux conditions simultanées* $v \geq u \geq 3$.

Si nous posons

$$\frac{u(2v-u+1)}{2} = N \qquad \text{ou} \qquad u^2 - u(2v+1) + 2N = 0$$

nous en déduisons

$$u = \frac{2v+1 \pm \sqrt{(2v+1)^2 - 8N}}{2}.$$

Le nombre u n'est rationnel que si

$$(2v+1)^2 - 8N = y^2 \qquad \text{ou} \qquad 8N + y^2 = x^2 \qquad (5)$$

en posant $2v+1 = x$; lorsque N est premier, les seules valeurs de x et de y satisfaisant à l'équation sont

$$x = N+2\,, \qquad y = N-2\,;$$

et

$$x = 2N+1\,, \qquad y = 2N-1\,.$$

Si N est composé, il existe au moins un carré impair moindre que $(N-2)^2$ qui, ajouté à 8N, donne un carré x^2; une décomposition de N en un produit de deux facteurs est alors donnée par l'égalité

$$N = \frac{(x-y)(x+y)}{8}.$$

Nous supposons N impair et débarrassé des facteurs 5, donc terminé par 1, 3, 7 ou 9 en sorte que 8N sera terminé par 8, 4, 6 ou 2; par suite les carrés impairs étant terminés par 1, 5, ou 9 :

si 8N est terminé par 8, les carrés à ajouter seront ceux

terminés par 1, carrés dont les racines sont terminées par 1 et 9;

si 8N est terminé par 4, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 1 et 5, carrés dont les racines sont terminées par 1, 9 et 5;

si 8N est terminé par 6, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 5 et 9, carrés dont les racines sont terminées par 5, 3 et 7;

si 8N est terminé par 2, les carrés à ajouter seront ceux terminés par 9, carrés dont les racines sont terminées par 3 et 7.

Observons en outre que les carrés terminés par 1 sont aussi terminés par 01, 21, 41, 61, 81, — que les carrés terminés par 5, le sont par 25, — que les carrés terminés par 9, le sont par 09, 29, 49, 69, 89.

Soient maintenant, *pour le module* δ,

$$8N \equiv \rho \qquad \text{et} \qquad x^2 \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_n;$$

de l'égalité (5) nous déduisons

$$\rho + y^2 \equiv \rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_n$$

et nous devrions avoir

$$y^2 \equiv \rho_1 - \rho, \rho_2 - \rho, \rho_3 - \rho, \cdots, \rho_n - \rho$$

ou

$$y^2 \equiv r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$$

en posant $\rho_i - \rho = r_i$; mais des résidus r_i ainsi obtenus, nous ne pourrons conserver que ceux qui sont quadratiques et font partie de la suite ρ_i, puisque y^2 est un carré : la suite des carrés impairs à ajouter à 8N se trouvera ainsi considérablement réduite et cette suite se réduira pour chaque nouveau diviseur δ employé.

Limite des opérations. Puisque

$$8N = (x - y)(x + y),$$

le facteur $(x - y)$ est le plus petit diviseur de 8N; si nous ne trouvons pas de solution y inférieure à une certaine li-

mite a, nous en conclurons

$$y > a\ ,$$

par suite

$$x > \sqrt{8N + a^2}$$

et

$$x + y > \sqrt{8N + a^2} + a\ .$$

Mais $x - y = \frac{8N}{x + y}$; donc

$$x - y < \frac{8N}{\sqrt{8N + a^2} + a} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{8N + a^2} - a\ .$$

Si $2s + 1$ et $2\sigma + 1$ sont deux diviseurs de N dont le produit égale N lui-même, à ces diviseurs correspondent les deux solutions données par les systèmes d'équations

1er système : $x - y = 2(2s + 1)$; $x + y = 4(2\sigma + 1)$.

2e système : $x - y = 4(2s + 1)$; $x + y = 2(2\sigma + 1)$.

Par conséquent si $\lambda < 8N < (\lambda + 1)^2$, les diviseurs que les essais ont éliminés sont ceux compris entre $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{2}$, ainsi que ceux compris entre $\frac{\lambda}{4}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4}$. Mais si les diviseurs que nous cherchons sont les diviseurs moindres que $\sqrt{N}$, la limite inférieure de a sera la partie entière de la valeur de α satisfaisant à l'équation

$$\frac{\sqrt{8N + \alpha^2} - \alpha}{2} = \sqrt{N} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \sqrt{N}\ ; \qquad (6)$$

si nous prenons, comme première limite supérieure, la partie entière par excès de la valeur de a satisfaisant à la condition

$$\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{2} = \frac{\lambda}{4} \qquad \text{d'où} \qquad a = \frac{32N - \lambda^2}{4\lambda}\ , \qquad (7)$$

les diviseurs éliminés seront ceux compris entre $\sqrt{N}$ et $\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4}$. En d'autres termes, p étant le plus grand nombre premier contenu dans cette dernière limite, il res-

tera à essayer tous les diviseurs premiers non supérieurs à p, hormis les diviseurs des modules employés; et si le nombre N n'est divisible par aucun d'eux, nous en conclurons que N est un nombre premier.

Les divisions les plus rapides sont celles par 9 et par 11 : aussi ce sont là les premiers diviseurs à employer. En procédant par limites successives, à partir de $\alpha = \sqrt{N}$, on arrivera à décomposer tout nombre, quelque grand qu'il soit!

Exemple. Soit à décomposer le nombre 40199; résolvons l'équation

$$8 \times 40199 + y^2 = x^2 \quad \text{ou} \quad 321592 + y^2 = x^2 . \qquad (8)$$

Observons, avant tout, que 40199 n'est divisible par aucun des nombres 3, 7, 11 et 13 dont nous allons nous servir comme modules; de plus, 321592 étant terminé par 2, les carrés à ajouter sont ceux terminés par 9, carrés dont les racines sont terminées par 3 et 7.

Puisque $200^2 < 40199 < 201^2$ et $567^2 < 321592 < 568^2$, les relations (6) et (7) donnent pour limite inférieure $\alpha = 200$ et pour limite supérieure $a = 426$; considérons donc les nombres

203	253	303	353	403
207	257	307	357	407
213	263	313	363	413
217	267	317	367	417
223	273	323	373	423
227	277	327	377	
233	283	333	383	
237	287	337	387	
243	293	343	393	
247	297	347	397	

Si aucun de ces nombres ne fournit de solution, les diviseurs restant à essayer seront moindres que

$$\frac{\sqrt{8N + a^2} - a}{4} = \frac{\sqrt{321592 + 181476} - 426}{4} = 70, \ldots$$

donc non supérieurs à 67.

L'égalité (8) donne successivement :

Pour le module 9,

$$4 + y^2 \equiv 0, 1, 4, 7$$

d'où on devrait avoir

$$y^2 \equiv 5, 6, 0, 3 ;$$

mais 5, 6 et 3 sont des non-résidus quadratiques pour le module 9, par suite

$$y^2 \equiv 0 \pmod 9$$

d'où

$$y = \dot{3} .$$

Pour le module 11,

$$-4 + y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9$$

d'où il faudrait

$$y^2 \equiv 4, 5, 7, 8, 9, 2 ;$$

mais 7, 8 et 2 sont des non-résidus quadratiques pour le module 11, par suite

$$y^2 \equiv 4, 5, 9 \pmod{11}$$

d'où

$$y = \dot{11} + 2, 3, 4, 7, 8, 9 .$$

Pour le module 7,

$$5 + y^2 \equiv 0, 1, 2, 4$$

d'où nous devrions avoir

$$y^2 \equiv 2, 3, 4, 6 ;$$

mais 3 et 6 sont des non-résidus quadratiques pour le module 7, par suite

$$y^2 \equiv 2, 4 \pmod 7$$

d'où

$$y = \dot{7} + 2, 3, 4, 5 .$$

Pour le module 13,

$$11 + y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12$$

d'où il faudrait

$$y^2 \equiv 2, 3, 5, 6, 11, 12, 1 ;$$

mais 2, 5, 6 et 11 sont des non-résidus quadratiques pour le module 13, par suite

$$y^2 \equiv 1, 3, 12 \pmod{13}$$

d'où

$$y = \dot{13} + 1, 4, 5, 8, 9, 12 .$$

Après avoir supprimé du tableau les nombres qui ne sont pas $\dot{3}$: $\dot{11} + 2, 3, 4, 7, 8$ ou 9; $\dot{7} + 2, 3, 4$ ou 5; $\dot{13} + 1, 4, 5, 8, 9$ ou 12, il ne reste plus que les nombres

$$207\ , \quad 213 \quad \text{et} \quad 333\ .$$

Aucun d'eux ne fournit de solution : par suite, si 40199 est composé, son plus petit diviseur ne peut dépasser 67. Si nous prenons maintenant $a = 600$ et si pour cette limite nous ne trouvons pas de solution, c'est que les diviseurs restant à essayer sont moindres que $\frac{\sqrt{321592 + 360000} - 600}{4} = 56\ ,\ \dots\ ,$ donc non supérieurs à 53. Considérons les carrés dont les racines sont

	453	503	553	
	457	507	557	
	463	513	563	
	467	517	567	
	473	523	573	
427	477	527	577	
433	483	533	583	
437	487	537	587	
443	493	543	593	
447	497	547	597	

Après en avoir éliminé les nombres qui ne sont pas $\dot{3}$: $\dot{11} + 2, 3, 4, 7, 8$ ou 9; $\dot{7} + 2, 3, 4$ ou 5; $\dot{13} + 1, 4, 5, 8, 9$ ou 12, il ne reste plus que les nombres

$$537 \quad \text{et} \quad 597\ .$$

Le carré de racine 537, augmenté du nombre 321592, donne le carré de racine 781 :

$$8 \times 40199 = 609961 - 288369 \quad \text{ou} \quad 781^2 - 537^2$$
$$= (781 - 537)(781 + 537)$$
$$= 244 \times 1318\ ;$$

par suite

$$40199 = 61 \times 659\ .$$

3me méthode. — L'équation

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2}, \qquad (9)$$

étant possible en nombres entiers pour toute valeur de N, soient *pour le module* δ :

$$N \equiv \rho \quad \text{et} \quad \frac{x(x+1)}{2} \equiv \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \cdots \cdot \rho_n ;$$

de l'égalité (9) nous déduisons

$$\rho z \equiv \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \cdots \cdot \rho_n$$

d'où

$$z \equiv r_1 , r_2 , r_3 , \ldots , r_n . \qquad (\text{mod } \delta)$$

Rappelons de plus que si N est composé, le multiplicateur z est moindre que $\dfrac{\frac{N+1}{2} \times \frac{N+3}{2}}{2N}$; si λ est le plus grand entier contenu dans cette limite, nous éliminerons de la suite des multiplicateurs

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \lambda \qquad (10)$$

ceux qui ne sont pas de la forme z pour le module δ et le nombre d'essais se réduira considérablement. Si nous ne trouvons aucune valeur de z comprise dans la suite (10) ainsi réduite, rendant le produit Nz triangulaire, nous en concluons que N est premier.

Observons que si N est terminé par 1, puisque le chiffre des unités des triangulaires est 0, 1, 3, 5, 6 ou 8, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8; que si N est terminé par 3, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 2, 5, 6 et 7; que si N est terminé par 7, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 3, 4, 5, 8 et 9; que si N est terminé par 9, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 2, 4, 5, 7 et 9.

Exemple. Soit à décomposer le nombre 4321; résolvons l'équation

$$4321 \times z = \frac{x(x+1)}{2}. \qquad (11)$$

Si 4321 est composé, cette équation admet au moins une solution pour $z \leq 540$; de plus, le nombre à décomposer étant terminé par 1, les multiplicateurs z à considérer sont ceux terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8.

De l'égalité (11) nous déduisons successivement :

pour le module 9,

$$z \equiv 0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 6 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{9} + 0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 6\ ;$$

pour le module 11,

$$9z \equiv 0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 6\,,\ 10 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{11} + 0\,,\ 4\,,\ 5\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 9\ ;$$

pour le module 7,

$$2z \equiv 0\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 6 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{7} + 0\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5\ ;$$

pour le module 13,

$$5z \equiv 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 10 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{13} + 0\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 8\,,\ 9\,,\ 11\,,\ 12\,.$$

Convenons de prendre les valeurs de z non supérieures à 150 et considérons la suite des multiplicateurs :

1, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 20,
21, 23, 25, 26, 28, 30, 31, 33, 35, 36, 38, 40,
41, 43, 45, 46, 48, 50, 51, 53, 55, 56, 58, 60,
61, 63, 65, 66, 68, 70, 71, 73, 75, 76, 78, 80,
81, 83, 85, 86, 88, 90, 91, 93, 95, 96, 98, 100,
101, 103, 105, 106, 108, 110, 111, 113, 115, 116, 118, 120,
121, 123, 125, 126, 128, 130, 131, 133, 135, 136, 138, 140,
141, 143, 145, 146, 148, 150.

Si de cette suite nous supprimons les nombres qui ne sont pas $\dot{9} + 0, 1, 3, 6$; $\dot{11} + 0, 4, 5, 6, 8, 9$; $\dot{7} + 0, 3, 4, 5$; $\dot{13} + 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12$, il reste les nombres suivants :

28 ; 60 ; 63 ; 81 ; 126 ; 138 .

Le produit $4321 \times 126 = 544446$ représente le 1043ième triangulaire ; par suite

$$4321 \times 126 = \frac{1043 \times 1044}{2}$$

et

$$4321 = 149 \times 29\,.$$

4me méthode. — L'équation

$$8Nz + 1 = y^2 , \qquad (12)$$

étant possible en nombres entiers pour toute valeur de N, soient *pour le module* δ :

$$8N \equiv \rho \quad \text{et} \quad y^2 \equiv \rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \dots , \rho_n ;$$

de l'égalité (12) nous déduisons

$$\rho z + 1 \equiv \rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \dots , \rho_n$$

$$\rho z \equiv \rho_1 - 1 , \rho_2 - 1 , \rho_3 - 1 , \dots , \rho_n - 1$$

par suite

$$z \equiv r_1 , r_2 , r_3 , \dots , r_n . \qquad (\text{mod } \delta)$$

Rappelons que si N est composé, le multiplicateur z est moindre que $\dfrac{\frac{N+1}{2} \times \frac{N+3}{2}}{2N}$; le chiffre des unités des nombres carrés étant 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, il s'ensuit que si N est terminé par 1, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8; si N est terminé par 3, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 1, 2, 5, 6 et 7; si N est terminé par 7, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 3, 4, 5, 8 et 9; que si N est terminé par 9, les multiplicateurs z seront terminés par 0, 2, 4, 5, 7 et 9.

Exemple. Soit à décomposer le nombre 4321; résolvons l'équation

$$8 \times 4321 \times z + 1 = y^2 \quad \text{ou} \quad 34568z + 1 = y^2 . \qquad (13)$$

Si 4321 est composé, cette équation admet au moins une solution pour $z \leqq 540$; de plus, le nombre à décomposer étant terminé par 1, les multiplicateurs z à considérer sont ceux terminés par 0, 1, 3, 5, 6 et 8.

De l'égalité (13) nous déduisons successivement :

pour le module 9,

$$8z + 1 \equiv 0 , 1 , 4 , 7 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{9} + 0 , 1 , 3 , 6 ;$$

pour le module 11,

$$6z + 1 \equiv 0 , 1 , 3 , 4 , 5 , 9 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{11} + 0 , 4 , 5 , 6 , 8 , 9 ;$$

pour le module 7,

$$2z + 1 \equiv 0, 1, 2, 4 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{7} + 0, 3, 4, 5 ;$$

pour le module 13,

$$z + 1 \equiv 0, 1, 3, 4, 9, 10, 12 \qquad \text{d'où} \qquad z = \dot{13} + 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12 .$$

Si nous ne prenons, ainsi que dans la méthode précédente, que les valeurs de z non supérieures à 150, les valeurs subsistant après l'emploi des modules 9, 11, 7 et 13 sont encore

$$28 ; \quad 60 ; \quad 63 ; \quad 81 ; \quad 126 ; \quad 138 .$$

Un seul de ces nombres, $z = 126$, fournit une solution de l'équation et donne

$$8 \times 4321 \times 126 + 1 = 4355569 \qquad \text{ou} \qquad 2087^2$$

$$8 \times 4321 \times 126 = 2086 \times 2088$$

$$4321 \times 7 \times 9 = 1043 \times 261 ;$$

par conséquent

$$4321 = 149 \times 29 ;$$

Observation. — Les deux premières méthodes se déduisent l'une de l'autre, ainsi que les deux dernières : en effet, si nous posons $x - y = u$ et $x + y = 2v - u$, l'équation

$$\frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y+1)}{2} = N \qquad \text{devient} \qquad \frac{u(2v - u + 1)}{2} = N ;$$

ensuite de l'équation

$$Nz = \frac{x(x+1)}{2} ,$$

nous déduisons

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8Nz}}{2}$$

et x n'est rationnel que si

$$1 + 8Nz = y^2 .$$

Il est bon de remarquer que la série des nombres triangulaires s'obtient par additions successives et qu'il serait plus facile d'étendre la table des 5000 premiers triangulaires que nous avons créée que la table des carrés, déjà fort étendue cependant.

Edouard Barbette (Liège).

REMARQUE RELATIVE AU CALCUL DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE

Les axes coordonnés $O(xy)$ sont rectangulaires ; *ds* représente l'élément linéaire d'une courbe : R est le rayon de courbure au point (x, y). De la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 ,$$

il résulte, par dérivation, que les deux rapports

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{dy}{ds} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds} \tag{1}$$

sont égaux en valeur absolue ; leur valeur commune est la courbure $\frac{1}{R}$. Ces expressions de la courbure, qui semblent avoir été utilisées par MICHEL DE L'HOSPITAL, présentent de réels avantages dans la pratique. C'est ce que je me propose de mettre en évidence par la considération de nombreux exemples.

Dans un grand nombre de problèmes de *Mathématiques générales* ou de *Calcul différentiel et intégral*, les étudiants ont à calculer la courbure d'une courbe plane, intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre qui admet pour transformation infinitésimale la translation parallèle à une direction privilégiée du plan ; c'est, en d'autres termes, une équation réductible à la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y) , \tag{2}$$

dans laquelle ne figure qu'une seule coordonnée, y par exemple. Il en résulte que $\frac{dx}{ds}$ est une fonction Y de y,

connue et la plupart du temps fort simple. Souvent même c'est cette dernière équation

$$\frac{dx}{ds} = Y(y) \qquad (3)$$

qui sert de point de départ pour le problème posé et que l'on transforme, en vue de l'intégration, en l'équation différentielle (2). Comme exemples de courbes (2) et (3) présentant un intérêt historique, je citerai la cycloïde, la chaînette, la chaînette d'égale résistance de Coriolis, la courbe logistique, la courbe d'égale pression, la courbe élastique, la chaînette extensible en chaque point proportionnellement à la tension, la corde à sauter, la courbe de Delaunay, les courbes de Ribaucour, la méridienne de la surface pseudosphérique de révolution, la tractrice, la syntractrice, les méridiennes des surfaces de révolution applicables sur la sphère..... Dans tous ces exemples, les fonctions $f(y)$ ou Y sont explicites; dans d'autres cas, dans celui par exemple de la méridienne du solide de moindre résistance de Newton, y et $\frac{dy}{dx}$ sont liés par une relation de forme implicite.

La remarque, que je me propose de signaler, est la suivante : *dans le cas où l'équation différentielle considérée se présente sous la forme* (3), *ou bien est réductible à cette forme, il n'y a qu'à dériver la fonction* Y *de* y *pour avoir la courbure des courbes intégrales*. Il résulte, en effet, des formules (1) et (3) que l'on a

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{dY}{dy} \right| .$$

J'ai cru devoir signaler cette formule qui me semble pouvoir être parfois d'une certaine utilité; elle présente, en tous cas, l'avantage appréciable de rendre l'expression de la courbure indépendante de l'intégration de l'équation différentielle et des erreurs de calcul qui pourraient avoir été commises dans cette intégration.

E. Turrière (Alençon).

SUR LES POSTULATS DE L'ORDRE LINÉAIRE OUVERT

Un ensemble L, dont les éléments seront appelés *points*, étant ordonné linéairement, on appellera *ensemble initial* toute *portion*[1] de L contenant tous les points qui *précèdent* chacun de ses propres éléments. On appellera segment *initial* et on désignera par $\mathcal{S}A$ l'ensemble des points qui précèdent un point déterminé A ; enfin on appellera *arc initial* et on désignera par $\mathcal{A}A$ l'ensemble formé par un point déterminé A et par les points qui le précèdent, de sorte que l'on a : $\mathcal{A}A \equiv \mathcal{S}A + A$.

On va d'abord établir certaines propriétés des ensembles ainsi définis.

§ I. *Parmi deux ensembles initiaux distincts quelconques il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

Les deux ensembles étant distincts, il y en a toujours un $\mathcal{E}$ qui contient au moins un point A qui n'appartient pas à l'autre $\mathcal{E}'$. Un point quelconque de $\mathcal{E}'$, étant alors distinct de A et ne pouvant pas être précédé par A (déf. des ensembles initiaux), doit précéder celui-ci et, par conséquent, doit appartenir à $\mathcal{E}$ (même définition) ; $\mathcal{E}'$, ne contenant ainsi que des points de $\mathcal{E}$ et ne contenant pas A, est donc bien une *portion* de $\mathcal{E}$.

§ II. *Parmi deux points distincts quelconques il y en a toujours un qui appartient à un ensemble initial au moins ne contenant pas l'autre point.*

En effet, les deux points étant distincts, il y en a un A qui précède l'autre, B ; l'ensemble formé par A et par les points qui précèdent A satisfait évidemment à la définition des ensembles initiaux et ne contient pas B, qui est, par hypothèse, distinct de A et ne le précède pas.

Les propriétés suivantes sont quasi-évidentes.

1. *Tout point qui précède un autre point A appartient toujours à un ensemble initial au moins qui ne contient pas A.*

2. *Pour qu'un ensemble soit initial, il faut et il suffit qu'il contienne tous les points du segment (de l'arc) initial défini par chacun de ses propres points.*

[1] La signification de ce mot est transparente.

3. *Un arc (segment) initial (ne) contient (pas) le point qui le définit.*

4. *Tout segment (arc) est un ensemble initial.*

5. *Un ensemble initial qui contient tous les points de 𝒮(A) contient A ou est identique à 𝒮(A).*

En effet, si un ensemble initial ℰ ne contient pas A, il ne peut contenir aucun des points qui sont précédés par A (déf. des ensembles initiaux); il ne peut donc contenir que des points qui précèdent A, c'est-à-dire des points de 𝒮(A) et, si en outre il contient tous les points de 𝒮(A), on a bien ℰ = 𝒮(A).

6. *Le segment initial 𝒮(A) est identique à l'ensemble des points de tous les ensembles initiaux qui ne contiennent pas A.*

Les propositions suivantes sont particulièrement importantes en raison du rôle qu'elles jouent dans la définition d'*un* ordre linéaire.

B I. *Tout point définit toujours un et seulement un segment (arc) initial.*

Cette propriété résulte évidemment directement des caractères logiques de la définition des segments et des arcs initiaux.

B II. *Parmi deux segments (arcs) initiaux quelconques, il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

En effet, parmi deux points distincts il y en a toujours un, soit A, qui précède l'autre, soit B, et qui, par conséquent, appartient à un ensemble initial au moins ℰ ne contenant pas celui-ci (1); les points de ℰ doivent alors appartenir à 𝒮(B) et à 𝒜(B) (déf. des segments et des arcs initiaux) et, par suite, les points de 𝒮(A) et de 𝒜(A), qui doivent tous appartenir à ℰ (2), doivent aussi appartenir à 𝒮(B) et à 𝒜(B). Mais 𝒮(B) (𝒜(B)) contient toujours au moins un point, savoir A(B), qui n'appartient pas à 𝒮(A) (𝒜(A)) (3); 𝒮(A) est donc bien une portion de 𝒮(B) et 𝒜(A) une portion de 𝒜(B).

Il est à peine nécessaire d'observer que des portions de L qui possèdent les propriétés B I et B II établies pour les segments et les arcs initiaux définissent toujours un ordre linéaire pour les points de L, sans être nécessairement les segments ou les arcs de cet ordre linéaire et même sans en être des ensembles initiaux. C'est ainsi que la définition classique de l'ordre de grandeur des nombres ne met en jeu que les ensembles initiaux de l'ensemble des nombres rationnels.

On peut aussi substituer à B II, pour la définition d'un ordre linéaire, les propositions suivantes.

B 0. *Tout arc (aucun segment ne) contient le point qui le définit.*

Parmi deux points distincts

B II[1] *il y en a toujours un*

B II[2] *et un seulement qui appartient au segment (à l'arc) initial défini par l'autre.*

B II[3]. Si A appartient à $\mathcal{S}$(B) ($\mathcal{A}$(B)), tout point de $\mathcal{S}$(A) ($\mathcal{A}$(A)) appartient aussi à $\mathcal{S}$(B) ($\mathcal{A}$(B)).

Si l'on définit un ordre linéaire en convenant qu'un point A en précède un autre B lorsqu'il appartient au segment (à l'arc) défini par celui-ci, les trois dernières propositions ne sont évidemment qu'une expression des propriétés qui caractérisent l'ordre linéaire, savoir : « parmi deux points distincts il y en a toujours un et un « seulement qui précède l'autre ; si A précède B, tout point qui « précède A précède aussi B. »

La proposition B II est une conséquence des propositions B 0, B II[1], B II[2] et B II[3].

En effet, parmi deux points distincts il y en a toujours un, par exemple A, qui appartient au segment et à l'arc définis par l'autre (B II[1]), soit à $\mathcal{S}$(B) et à $\mathcal{A}$(B) ; alors tout point de $\mathcal{S}$(A) ou de $\mathcal{A}$(A) appartiendra à $\mathcal{S}$(B) et à $\mathcal{A}$(B) (B II[3]), et B n'appartiendra ni à $\mathcal{S}$(A) ni à $\mathcal{A}$(A) (B II[2]). Comme d'ailleurs $\mathcal{S}$(A) ne contient pas A et que $\mathcal{A}$(B) contient B (B 0), $\mathcal{S}$(B) ($\mathcal{A}$(B)) contiendra toujours au moins un point, savoir A (B), qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$(A) ($\mathcal{A}$(A)). On a donc bien $\mathcal{S}(A) < \mathcal{S}(B)$, $\mathcal{A}(A) < \mathcal{A}(B)$.

On va montrer enfin que des portions de L qui possèdent les propriétés exprimées pour les ensembles initiaux par les propositions J I et J II permettent toujours de définir des portions de L qui possèdent les propriétés B I — B II et, par conséquent, permettent de définir un ordre linéaire pour les points de L[1].

Il suffit en effet de prendre comme définition du segment initial de cet ordre la propriété qui fait l'objet de la proposition 6 en substituant aux ensembles initiaux les portions de L données, qui sont évidemment des ensembles initiaux de l'ordre ainsi défini, mais peuvent ne pas comprendre tous ceux-ci.

De la définition ainsi adoptée pour les segments initiaux de l'ordre considéré résulte immédiatement la proposition B I. La proposition B II peut alors être établie de la manière suivante.

Parmi deux points distincts il y en a toujours un, par exemple A, qui appartient à l'une au moins, soit $\mathcal{E}$, des portions données de L ne contenant pas l'autre point (B II), soit B ; $\mathcal{S}$(A) (nouvelle définition) figurant évidemment parmi les dites portions et ne contenant pas le point A [nouvelle déf. de $\mathcal{S}$(A)], est nécessairement une portion de $\mathcal{E}$ (J I), qui, figurant parmi les ensembles constituants de $\mathcal{S}$(B) (cf. 6), doit être lui-même une portion de $\mathcal{S}$(B) ou être identique à ce dernier ensemble. Dans tous les cas on a bien

$$\mathcal{S}(A) < \mathcal{E} \leqq \mathcal{S}(B) \qquad \text{et, par suite,} \qquad \mathcal{S}(A) < \mathcal{S}(B) .$$

Enfin, d'après leur nouvelle définition, aucun des ensembles

[1] C'est le cas pour l'ensemble de tous les nombres, puisque l'on définit leur ordre de grandeur au moyen des segments initiaux de l'ensemble des nombres irrationnels.

(S A) ne contient le point qui le définit ; ces ensembles sont donc bien, d'après une remarque déjà faite, les segments initiaux de l'ordre linéaire ainsi défini.

Il conviendrait sans doute de caractériser par un terme spécial les ensembles de portions de L qui satisfont aux propositions J I et J II prises comme axiomes ; mais on ne saurait évidemment apporter trop de réserve dans l'introduction de nouveaux termes et l'on se bornera ici à ce qui a paru strictement nécessaire.

II

On appellera *segment* l'ensemble des points *compris* entre A et B et *arc* l'ensemble formé par A, B et les points qu'ils comprennent. On désignera l'un et l'autre indifféremment de ces ensembles par AB ou BA. On reconnaîtra facilement que de la notion d'ordre linéaire ouvert et de la définition des segments et des arcs résultent les propriétés suivantes.

A''. *Deux points distincts quelconques définissent toujours un et seulement un segment (arc) et seront appelés ses extrémités.*

A 0. *Tout arc (aucun segment ne) contient ses extrémités.*

Parmi trois points distincts l'un de l'autre,

A I *il y en a toujours un*

A II *et un seulement qui appartient au segment (à l'arc) défini par les deux autres.*

Trois points quelconques distincts l'un de l'autre étant donnés,

A III *tout point qui appartient au segment (à l'arc) défini par deux de ses points et qui est distinct du troisième, appartient toujours aussi à l'un au moins des deux autres segments (arcs) définis par les trois points* (AB — C ≦ 𝔐(AC, BC)).

A IV *et ces trois ensembles ont au plus un point commun* (𝔇(AB, AC, BC) = *au plus un point commun*).

Si C *est un point de* AB,

A V *tout point de* AC *ou de* BC *appartient toujours à* AB

(𝔐(AC, BC) ≦ AB)

et tout point de AB *distinct de* C *appartient toujours*

A III' *à l'un au moins des ensembles* AC *et* BC

(AB — C ≦ 𝔐(AC, BC)) ,

A VI *et ces deux ensembles n'ont en commun aucun point distinct de* C (𝔇(AC, BC) — C = 0).

Si C *n'appartient pas à* AB,

A III² *tout point de* AB *appartient à l'un au moins des ensembles* AC *et* BC

A VII *et tous les points de* AB *appartiennent à l'un des ensembles* AC *et* BC.

A la suite de certaines des propositions précédentes ont été écrites des formules, qui les expriment dans la notation de G. Cantor, où, comme l'on sait, la lettre $\mathfrak{M}$ signifie « ensemble des points de » et la lettre $\mathfrak{D}$ « partie commune de », la signification des signes habituels étant d'ailleurs triviale. On a les relations évidentes

$$\mathfrak{D}(E, E') \leq E, E', \qquad \mathfrak{D}[E, \mathfrak{D}(E, E')] = \mathfrak{D}(E, E').$$

On signale en outre la proposition suivante :

Si l'on a $E > E'$, on a :

$$\mathfrak{D}(E, E') = E', \qquad \mathfrak{D}(E, E'') \geq \mathfrak{D}(E', E'').$$

Les deux propositions A V et A III¹ peuvent évidemment être réunies dans la suivante :

Si C *est un point de* AB, *cet ensemble est identique à l'ensemble des points de* AC *et de* BC, *au point* C *près.*

Une telle propriété peut être exprimée par la formule

$$AB - C = \mathfrak{M}(AC, BC),$$

le point C étant à retrancher ou non selon qu'il s'agit des segments ou des arcs.

A III n'est évidemment rien autre que le résultat de la réunion des propositions A III¹ et A III² ($III = \mathfrak{D}(III^1, III^2)$), la première étant d'ailleurs simplement l'application de A III aux points de AB et la seconde, son application à tous les autres points; en outre, A III² est évidemment une conséquence directe de A VII ($III^2 > VII$).

Les propositions A présentent d'ailleurs d'autres relations logiques qu'il importe d'établir.

1. A II *est une conséquence de* A V *et* A VI ($II \geq \mathfrak{D}(V, VI)$).

Il suffit d'établir que, si C est un point de AB distinct de A, ce dernier point ne peut appartenir à BC.

En effet, tout point de AC doit alors appartenir à AB (A V) et, par conséquent, devrait, en vertu du même axiome et si A appartenait à BC, appartenir aussi à ce dernier ensemble ($AC \leq AB \leq BC$), ce qui est incompatible avec A VI (à plus forte raison avec A IV), à moins que AC ne contienne aucun point distinct de C. La pro-

position est donc établie en général, mais la démonstration tombe en défaut lorsqu'il existe des segments ne contenant aucun point, ce qui est le cas pour les ordres linéaires *discrets* définis par leurs segments.

2. A IV *est une conséquence de* A II *et* A III^1 $(\text{IV} \geqq \mathcal{O}(\text{II}, \text{III}^1))$.

Il suffit évidemment d'établir que, si deux points D et D′ distincts l'un de l'autre appartiennent tous les deux à AB et à AC, l'un des deux seulement peut appartenir aussi à BC.

Puisque les points D et D′ appartiennent à la fois à AB et à AC, D′ doit au moins appartenir à AD ou bien à BD et à CD (A III^1), et si, en outre, les deux points D et D′ appartenaient tous les deux à BC, D′ devrait aussi appartenir, d'après le même axiome, à l'un au moins des ensembles BD et CD, de sorte que, dans ce cas, il devrait appartenir à deux au moins des ensembles AD, BD et CD.

Pour des raisons semblables, D devrait aussi appartenir à deux au moins des ensembles AD′, BD′ et CD′, de sorte que, parmi les trois points A, B, C il y en aurait au moins un définissant respectivement avec D et D′ deux segments (arcs) dont chacun contiendrait celui de ces deux points qu'il n'admet pas comme extrémité, ce qui est précisément la propriété écartée par l'axiome A II. La proposition est donc bien établie.

3. A VI *est une conséquence de* A IV *et* A V $(\text{VI} \geqq \mathcal{O}(\text{IV}, \text{V}))$ *et, par conséquent, de* A II, A III^1 *et* A V.

Si D est un point appartenant à la fois à AC et à BC, tout point de CD devra appartenir à la fois à AC et à BC et devra, en outre, si C appartient à AB, appartenir à AB (A V). Il résulte donc de là que si AC et BC avaient en commun un point D distinct de C, tout point de CD appartiendrait aussi à la fois à AB, à AC et à BC, ce qui est incompatible avec A IV, à moins que CD ne contienne aucun point. La proposition est donc établie sous la réserve déjà formulée pour la proposition 1.

4. *Chacun des groupes de propositions* (A II, A V, A III^1), (A V, A VI, A III^1) *et* (A IV, A V, A III^1) *complété par* A″ *et* A 0 *permet de définir un ordre linéaire pour les points d'un segment (arc) quelconque.*

En premier lieu, l'équivalence de ces groupes de propositions résulte du simple rapprochement des relations logiques exprimées par les propositions 1, 2 et 3, et l'on peut remarquer aussi que, en appliquant aux formules qui figurent à la suite de ces propositions les propriétés indiquées pour l'algorithme $\mathcal{O}$ (p. 283), on obtient les nouvelles relations logiques suivantes :

$$\mathcal{O}(\text{II}, \text{V}, \text{III}^1) \geqq \mathcal{O}(\text{V}, \text{VI}, \text{III}^1) \geqq \mathcal{O}(\text{II}, \text{V}, \text{III}^1),$$

$$\mathcal{O}(\text{V}, \text{VI}, \text{III}^1) \geqq \mathcal{O}(\text{IV}, \text{V}, \text{III}^1) \geqq \mathcal{O}(\text{II}, \text{V}, \text{III}^1).$$

d'où l'on déduit évidemment

$$\omega(\mathrm{II},\ \mathrm{V},\ \mathrm{III}^1) = \omega(\mathrm{V},\ \mathrm{VI},\ \mathrm{III}^1) = \omega(\mathrm{IV},\ \mathrm{V},\ \mathrm{III}^1)\ .$$

Enfin, les axiomes B I et B II de l'ordre linéaire seront bien satisfaits pour les points de AB si l'on établit la proposition suivante :

5. *Si* C *et* D *sont deux points distincts quelconques de* AB, *parmi les deux ensembles* AC *et* AD *il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

On établira d'abord le lemme suivant :

Lemme. *Si* C *est un point de* AB *et est distinct de* A *et de* B, AC *est toujours une portion de* AB.

En effet, tout point de AC appartient à AB (A V) ; en outre, dans le cas des arcs, B appartient à AB et, dans le cas des segments, C n'appartient pas à AC (A 0). Comme d'ailleurs B n'appartient jamais à AC (A II) et que C, par hypothèse, appartient à AB, ce dernier ensemble contient toujours au moins un point qui n'appartient pas à l'autre ; AC est donc bien une portion de AB.

Il importe pour la suite, d'observer que le lemme a été établi au moyen de A 0, A II et A V et, par conséquent, indépendamment de A III^1.

Quant à la proposition principale, elle est satisfaite, en vertu du lemme, si C appartient à AD. Dans le cas contraire, C doit appartenir à BD (A III^1) et D, ne pouvant alors appartenir à BC (A II), devra appartenir à AC (A III^1) ; l'on est donc ainsi ramené au cas précédent, les rôles des points C et D étant seulement intervertis.

Il résulte de là que toutes les propositions visées dans l'énoncé de la proposition 4 sont toujours satisfaites, en particulier, pour un ensemble quelconque d'arcs ou de segments linéaires dont chacun est défini par ses extrémités, ainsi, par exemple, qu'un ensemble de segments rectilignes.

6. A V *est une conséquence de* A II, A III^2 *et* A VI *et, par conséquent, de* A II *et* A III ($\mathrm{V} \geq \omega(\mathrm{II},\ \mathrm{III}^2,\ \mathrm{VI}) \geq \omega(\mathrm{II},\ \mathrm{III})$).

1° En effet, si C appartient à AB, B ne peut appartenir à AC (A II) ; et, par suite, tout point de AC doit appartenir à l'un au moins des ensembles AB et BC (A III^2), et, s'il est distinct de C, comme il ne peut appartenir à BC (A VI), il devra nécessairement appartenir à AB. Comme C appartient aussi d'ailleurs, par hypothèse, à AB, tous les points de AC appartiennent bien à AB et la même propriété se démontrerait évidemment pour BC au moyen d'un raisonnement en tout semblable.

Des propositions 1, 2, 3 et 6 résulte évidemment la suivante :

7. *Les trois groupes de propositions* (A II, A III), (A V, A VI, A III) *et* (A IV, A V, A III) *sont équivalents.*

La figure ci-contre réalise un ensemble de points pour lesquels toutes ces propositions sont satisfaites si l'on prend comme segment défini par deux points quelconques de la figure le trajet simple qui les réunit.

8. A VII *est une conséquence de* A I *et* A V.

En effet, si C n'appartient pas à AB, l'un des deux points A et B, par exemple B, doit appartenir au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces points et par A (A I), soit à AC, et alors tous les points de AB devront bien appartenir à AC (A V).

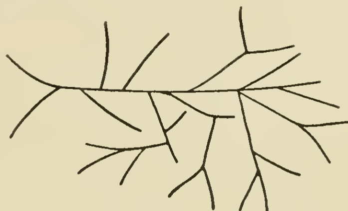
9. A I *est une conséquence de* A IV *et* A VII.

Si B n'appartient pas à AC ni A à BC, tous les points de AC doivent appartenir à AB ou à BC et tous les points de BC à AB ou à AC (A VII) ; mais, à moins que l'un des ensembles AC et BC ne contienne pas plus d'un point, deux des quatre combinaisons ainsi définies sont à écarter (A IV), parce qu'elles auraient pour conséquence que tous les points de AC ou tous les points de BC appartiendraient à la fois aux trois ensembles. Les deux seuls cas admissibles sont donc caractérisés par les formules

$$AC \leqq AB \text{ et } BC \leqq AB$$

ou

$$AC = CB$$



Mais, si C n'appartenait pas à AB, on devrait avoir aussi (A VII) : $AB \leqq AC$ ou $\leqq BC$, relations incompatibles toutes les deux avec les précédentes pour le motif déjà invoqué ; A I doit donc bien être satisfait, toujours sous la réserve signalée pour les démonstrations des propositions 1 et 3 complétées par 5 et 6:

On reconnaîtra facilement que des propositions 8 et 9 résulte la proposition suivante :

10. *Sont équivalents les groupes de propositions* (A I, A II, A III) *et* (A II, AIII, AVII) *ainsi que ceux que l'on obtient en y effectuant les substitutions dont la validité résulte de la proposition* 7.

Sans insister davantage sur les questions d'équivalence logique, je me bornerai maintenant à signaler l'identité des axiomes A I et II réunis et de l'axiome d'ordre II 3 adopté par M. Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie* et enfin à établir que le second axiome d'ordre adopté par ce savant dans la première édition de cet ouvrage (axiome II 4, p. 9) et qui figure comme théorème[1] dans

[1] M. Hilbert indique dans un renvoi que cette proposition a été reconnue par M. H. Moore (Transactions of the American Mathematical Society, 1902) comme étant une conséquence de certains axiomes planaires.

la troisième édition (théorème 4 du chapitre I, p. 6), peut être déduit des propositions de l'un quelconque des groupes qui font l'objet de la proposition 10; il est d'ailleurs licite d'invoquer toutes les propositions, car chacune d'elles est une conséquence de chacun des groupes.

Axiome de M. Hilbert. — *Quatre points quelconques* A, B, C, D *d'une droite peuvent toujours être désignés d'une manière telle que* B *soit situé entre* A *et* C *et aussi entre* A *et* D, *et que* C *soit situé entre* A *et* D *et aussi entre* B *et* D.

Parmi les points A, B et C, il y en a toujours un, par exemple B, qui appartient à l'un des segments (arcs) définis par les deux autres (A I), soit AC, et, si D est un quatrième point quelconque, il appartient à deux des segments (arcs) définis par les trois autres points ou n'appartient à aucun (A III).

Dans le second de ces cas, puisque D n'appartient pas à AC, l'un des points A et C, par exemple C, doit appartenir au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces points et par D (A I), soit AD, et, comme d'autre part B appartient à AC (hyp. initiale), C ne peut pas appartenir à AB (A II) et, appartenant déjà à AD, il doit donc appartenir aussi à BD (A III), ce qui était bien la dernière des propriétés à démontrer.

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque D appartient à deux segments (arcs) définis par A, B, C, par exemple à AC et à BC, il ne peut appartenir au troisième (A VI), soit à AB, et A, ne pouvant alors appartenir ni à BC ni à CD (A II), ne peut non plus appartenir à BD (A III); en outre, C n'appartenant pas à AB, B doit appartenir à AD (A I). L'axiome de M. Hilbert est donc encore satisfait moyennant une interversion des rôles des points C et D.

11. *Des portions d'un ensemble* L *qui possèdent les propriétés exprimées par les propositions* A, AO *et celles de l'un des groupes qui font l'objet de la proposition* 10, *permettent toujours de définir un ordre linéaire ouvert pour les points de* L.

Lemme. *Si* A *est un point distinct des deux points* C *et* D *et qui n'appartient pas à* CD, *parmi les deux ensembles* AC *et* AD, *il y en a toujours un qui est une portion de l'autre.*

En effet, parmi les deux points C et D, il y en a toujours un, par exemple C, qui appartient au segment (à l'arc) défini par l'autre de ces deux points et par A (A I), soit à AD, et alors AC sera bien une portion de AD (lemme de 5).

Deux points A et B étant donnés, L peut évidemment être décomposé en deux ensembles partiels dont l'un est formé des points tels que le segment (l'arc) déterminé par chacun d'eux avec B contienne A[1], le second ensemble étant formé des autres points, y

[1] Cet ensemble partiel s'identifie, dans le cas des segments avec S (A), et dans le cas des arcs avec A (A).

compris B. Si C et D désignent deux points quelconques appartenant à un même ensemble partiel, A, qui, par hypothèse appartient à la fois à BC et à BD ou n'appartient ni à l'un ni à l'autre de ces deux ensembles, ne doit pas appartenir à CD (A IV et A III) et, par suite, l'un des ensembles AC et AD devra être une portion de l'autre (lemme). On pourra donc, eu égard aux axiomes B I et B II (p. 281) relatifs aux segments (arcs) initiaux, définir un ordre linéaire ouvert pour tous les points au moyen des conventions suivantes :

1° Si C et D sont deux points distincts l'un de l'autre et de A et qui appartiennent au même ensemble partiel, C précède D lorsqu'on a, pour tous les points du premier ensemble (AC contient B) AD < AC, et pour les points du second ensemble (AC ne contient pas B), AC < AD.

2° Tous les points du premier ensemble partiel précèdent tous ceux du second.

3° A est le premier point du second ensemble (cas des segments) ou le dernier point du premier (cas des arcs).

III

On appellera *ensemble connexe* l'ensemble des points compris entre deux coupures consécutives d'un ensemble ordonné linéairement L, une coupure étant, comme on sait, définie par une décomposition de L en deux portions sans point commun dont l'une est un ensemble initial (Cf. § I).

On reconnaîtra facilement les propriétés suivantes :

″. *Un ensemble connexe contient toujours au moins deux points.*

I. *Si des ensembles connexes, en nombre fini ou transfini, ont au moins un point commun, l'ensemble de leurs points est connexe.*

II. *Si des ensembles connexes, en nombre fini ou transfini, ont une partie commune qui ne se réduit pas à un point, celle-ci est connexe.*

Parmi trois points quelconques distincts l'un de l'autre

III. *chacun appartient toujours à un ensemble connexe au moins qui contient l'un des deux autres points et ne contient pas le troisième*

IV. *et il n'y a jamais plus d'un point appartenant à deux ensembles connexes dont chacun contient respectivement l'un des deux autres points et ne contient pas le troisième.*

On va maintenant établir que, réciproquement, des portions d'un ensemble L qui possèdent ces propriétés, permettent tou-

jours de définir un ordre linéaire ouvert pour tous les éléments de L, éléments que, selon la convention adoptée, on continuera à appeler points.

1. *Il existe toujours un ensemble connexe qui contient deux points distincts quelconques donnés.*

En effet, A et B désignant les deux points, si C est un troisième point arbitrairement choisi et s'il existe un ensemble connexe contenant à la fois A et B, et ne contenant pas C, la proposition sera par cela même satisfaite: dans le cas contraire, il existera toujours (III) un ensemble connexe contenant A et C sans contenir B, et un autre contenant B et C sans contenir A. L'ensemble des points de ces deux ensembles connexes, qui ont au moins en commun le point C est connexe (I) et contient bien A et B.

A″. Définition. *Deux points distincts quelconques,* A *et* B *définissent toujours un et un seul ensemble de points appelé arc qui est la partie commune à tous les ensembles contenant à la fois ces deux points; ceux-ci seront dits les extrémités de l'arc, qui sera désigné par* AB *ou* BA.

La légitimité de cette définition résulte évidemment de la proposition 1.

Les propositions suivantes sont quasi-évidentes :

A 0. *Tout arc contient ses extrémités.*

2. *Tout arc est un ensemble connexe* (Cf. Ax. II).

3. *Pour qu'un ensemble de points soit connexe, il faut qu'il contienne tous les points de l'arc défini par deux quelconques de ses points et il suffit que cette condition soit réalisée pour un point déterminé et tout autre point de l'ensemble* (I, ″ et 1).

4. *Tout arc contient tous les points de l'arc défini par deux quelconques de ses points* (0, 1 et 2).

5. *Tout ensemble connexe dont tous les points appartiennent à* AB *et qui contient* A *ne contient pas* B *ou est identique à* AB.

Il ne peut, en effet, exister aucun ensemble connexe contenant à la fois A et B et qui soit une portion de AB (3).

Parmi trois points distincts l'un de l'autre,

A I *il y en a toujours un*

A II *et un seulement qui appartient à l'arc défini par les deux autres.*

1° En effet, si A n'appartient pas à BC, c'est qu'il existe un ensemble connexe au moins qui contient B et C et ne contient pas A (A″) et, si B n'appartient pas à AC, il doit exister de même un ensemble connexe contenant A et C et ne contenant pas B. L'ensemble des points de ces deux ensembles connexes, qui ont au moins en commun le point C, est connexe (I) et contient à la fois A, B et C. Le point A, appartenant à un ensemble connexe contenant C et ne contenant pas B, ne peut appartenir à aucun ensemble connexe contenant B et ne contenant pas C (IV), de sorte

que C doit appartenir à tous les ensembles connexes qui contiennent à la fois A et B et, par suite, à l'arc AB. La propriété A I est donc établie.

2° Si C appartient à AB, il appartient aussi à tous les ensembles qui contiennent A et B et, par suite l'axiome III exige qu'il existe toujours un ensemble connexe qui contienne A et C et ne contienne pas B et de même un ensemble connexe qui contienne B et C et ne contienne pas A ; il en résulte bien que B ne peut pas appartenir à AC ni A à BC.

A III. *Trois points quelconques distincts l'un de l'autre étant donnés, tout point de l'un des trois arcs qu'ils définissent appartient toujours à l'un au moins des deux autres de ces arcs.*

En effet, l'ensemble des points des arcs AC et BC, par exemple, est connexe (2 et 1) et contient A et B (A0) ; il doit donc contenir tous les points de AB (3), de sorte que tout point de ce dernier ensemble doit bien appartenir à AC ou à BC.

Il résulte de là que les axiomes posés ont pour conséquence les propositions A″, A 0, A I, A II et A III et, par suite (prop. 11 du § II), permettent bien de définir un ordre linéaire pour tous les points de L.

Il est à remarquer enfin que l'axiome IV a été utilisé uniquement pour la démonstration de la proposition A I, de sorte que les propriétés A II et A III, équivalentes, comme on l'a vu, d'une part à A III, A V et A VI et d'autre part, à A III, A IV et A V, sont des conséquences de 0, I, II et III indépendamment de IV.

G. COMBEBIAC (Limoges).

APPLICATION D'UNE PROJECTIVITÉ CYCLIQUE A LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

1. — J'appelle *associés*[1] par rapport au triangle ABC, les groupes de trois points ou de trois droites qui ont les mêmes coordonnées *barycentriques* (ponctuelles ou tangentielles) permutées circulairement suivant un ordre constant.

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on associe les points M, N, P ou les droites m, n, p dont les coordonnées (X, Y, Z) sont disposées ainsi :

$$(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma) \qquad (\gamma\,,\ \alpha\,,\ \beta) \qquad (\beta\,,\ \gamma\,,\ \alpha) \tag{1}$$

J'appelle aussi droites ou points *alliés* par rapport à un sommet ou un côté, des éléments qui ont la même coordonnée relative à ce côté, et les deux autres coordonnées échangées. Chacun des éléments a donc trois alliés, et les trois associés (1) ont les mêmes alliés, dont les coordonnées sont

$$M'(\alpha\,,\ \gamma\,,\ \beta) \qquad N'(\beta\,,\ \alpha\,,\ \gamma) \qquad P'(\gamma\,,\ \beta\,,\ \alpha)\ : \tag{2}$$

on en déduit que M′, N′, P′ sont aussi associés.

Pour abréger le langage, j'appellerai *triangle cyclique* le triangle formé par trois droites ou trois points associés, et nous verrons bientôt la raison de cette dénomination. Le triangle de référence ABC est cyclique.

2. — Les équations

ponctuelles des droites associées sont de la forme

$$\left.\begin{array}{l} lX + mY + nZ = 0 \\ nX + lY + mZ = 0 \\ mX + nY + lZ = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

tangentielles des points associés sont de la forme

$$\left.\begin{array}{l} lU + mV + nW = 0 \\ nU + lV + mW = 0 \\ mU + nV + lW = 0 \end{array}\right\} \tag{3'}$$

[1] Bien que ce mot ait été employé déjà pour désigner d'autres objets dans la Géométrie du triangle : dans le travail actuel il n'y aura pas de confusion possible.

Par suite, si deux droites sont associées, les points de l'une ont leurs associées sur l'autre et corrélativement.

Réciproquement :

la droite qui joint les deux points associés précédents ou suivants de deux points quelconques, est associée de celle qui joint ceux-ci.

le point d'intersection des deux droites associées précédentes ou suivantes de deux droites quelconques, est associé du point commun à celles-ci.

Les côtés du triangle dont les sommets sont des points associés, ou bien les sommets du trilatère dont les côtés sont des droites associées (triangle ou trilatère cyclique) sont aussi associés.

3. — Le rapport anharmonique de quatre points sur une droite s'obtient en projetant d'un sommet quelconque du triangle de référence. Il en résulte que les ponctuelles de points associés sur droites associées sont projectives. Il en est de même des faisceaux de droites associées dont les sommets sont des points associés.

Si l'on remarque

que la droite à l'infini est sa propre associée, il en résulte que les ponctuelles mentionnées sont en outre semblables.

que le barycentre du triangle ABC est son propre associé, on en déduit que dans les faisceaux en question les rayons qui projettent ce barycentre sont homologues.

Si une droite ne passe pas par le barycentre, il en est de même de ses associées, et l'on a un trilatère cyclique.

Si un point est à distance finie, il en est de même de ses associés, et l'on a un triangle cyclique.

Dans les deux cas, les divisions et les faisceaux homographiques ne sont pas perspectifs ; mais ils le seront certainement quand

un des trois supports passe par le barycentre, et alors les deux autres y passent également.

un des sommets des faisceaux est à l'infini, et alors les deux autres sont aussi à l'infini.

Ceci arrivera quand la condition $l + m + n = 0$ sera vérifiée.

4. — Pour chercher les droites ou les points coïncidant avec leurs associés, il faut identifier les équations (3) ou (3'), et il en résulte : ou bien $l = m = n$, correspondant à la droite à l'infini $X + Y + Z = 0$, ou au barycentre $U + V + W = 0$ (coordonnées ponctuelles ou tangentielles) ; ou encore $\frac{l}{w_1} = \frac{m}{w_2} = \frac{n}{w_3}$, en désignant par w_1, w_2, w_3 les racines cubiques de l'unité positive.

Il en résulte que

outre la droite à l'infini, il y a deux droites imaginaires conjuguées qui passent par le barycentre, et dont les équations sont renfermées dans

$$\omega_1 X + \omega_2 Y + Z = 0 \quad (4)$$

outre le barycentre, il y a deux points imaginaires conjugués, sur la droite à l'infini, et dont les équations sont renfermées dans

$$\omega_1 U + \omega_2 V + W = 0 \quad (4')$$

ω_1 et ω_2 désignant les deux racines cubiques imaginaires de l'unité.

Les coordonnées de ces deux points ou droites coïncidant avec leurs associées peuvent s'exprimer par les relations :

$$\frac{X}{\omega_1} = \frac{Y}{\omega_2} = \frac{Z}{\omega_3} \quad (5)$$

$$\frac{U}{\omega_1} = \frac{V}{\omega_2} = \frac{W}{\omega_3} \quad (5')$$

5. — Si nous prenons pour abscisse

x d'un point quelconque à l'infini le rapport $\frac{X}{Z}$ des coordonnées barycentriques des droites qui y passent, les abscisses des deux points coïncidant avec leurs associés, sont ω_1 et ω_2 :

u de chaque droite issue du barycentre le rapport $\frac{U}{W}$ des coordonnées barycentriques des points de cette droite, les abscisses des droites coïncidant avec leurs associées sont ω_1 et ω_2 ;

et en regardant l'équation

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad (6)$$

qui a pour racines les valeurs ω_1 et ω_2, il en résulte que les deux

points à l'infini mentionnés sont doubles de l'involution

$$xx' + \frac{1}{2}(x + x') + 1 = 0 \quad (7)$$

dans laquelle sont conjuguées les trois paires de points à l'infini de chacun des côtés du triangle de référence, et la mé-

droites passant par le barycentre sont doubles dans l'involution

$$uu' + \frac{1}{2}(u + u') + 1 = 0 \quad (7')$$

dans laquelle sont conjuguées les trois paires de rayons formés par les médianes du triangle de référence, et les paral-

diane correspondante, puisque leurs abscisses sont :

lèles aux côtés correspondants issues du barycentre, puisque leurs abscisses sont :

$$(-2\ ,\ 0)\qquad (1\ ,\ -1)\qquad \left(-\frac{1}{2}\ ,\ \infty\right).$$

On en conclut qu'il y a un triangle avec un sommet et le côté opposé réels et les deux autres sommets et côtés imaginaires conjugués, dont les éléments coïncident avec leurs associés.

6. — Donnons à présent quelques propriétés métriques des droites et des points associés, propriétés auxquelles n'est donc pas applicable la loi de corrélation.

a) en vertu de la loi fondamentale existant entre les coordonnées barycentriques d'un point $M(\alpha, \beta, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, celles du barycentre du triangle cyclique MNP, sont égales à $\frac{1}{3}$. On déduit de là : *Tous les triangles cycliques ont même barycentre, coïndant avec celui du triangle de référence.*

b) Puisque deux points alliés quelconques ont une coordonnée commune, il en résulte que :

les droites	MP′ NN′ NM′	*sont parallèles*	*au côté*	b
»	MM′ PP′ NM′	»	»	c
»	NP′ MN′ PN′	»	»	a

c) Les droites de chacun des ternes

MM′ NN′ PP′	(I)
MP′ NM′ PN′	(II)
MN′ NP′ PM′	(III)

sont associées et forment trois triangles circonscrits en même temps à MNP *et* M′N′P′. *Ces cinq triangles et* ABC *ont le même barycentre qui est centre d'homohétie des triangles* (I), (II), (III) *et du triangle* ABC *combinés deux à deux.*

d) *En désignant par* Q_1, R_1, S_1 ; Q_2, R_2, S_2 ; Q_3, R_3, S_3, *les sommets des triangles* (I), (II), (III), Q, R, S *sont respectivement les homologues de* A, B, C, *on en déduit les coordonnées suivantes :*

$Q_1(\alpha\ ,\ \alpha\ ,\ 1-2\alpha)$	$Q_2(\beta\ ,\ \beta\ ,\ 1-2\beta)$	$Q_3(\gamma\ ,\ \gamma\ ,\ 1-2\gamma)$
$R_1(1-2\alpha\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha)$	. . . .	. . . .
$S_1(\alpha\ ,\ 1-2\alpha\ ,\ \alpha)$	. . . .	. . . .

Les rapports d'homothétie de chacun de ces triangles avec ABC sont donc

$$1 - 3\alpha\ , \qquad 1 - 3\beta\ , \qquad 1 - 3\gamma$$

et par conséquent

$$\frac{Q_1A}{GA} = \frac{R_1B}{GB} = \frac{S_1C}{GC} = 3\alpha\ , \qquad \ldots = 3\beta\ , \qquad \ldots = 3\gamma\ .$$

e) Soient $A_0\ (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $A_1\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $A_2\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ trois points quelconques et $B_0\ (\gamma_0, \alpha_0, \beta_0)$, $B_1\ (\gamma_1, \alpha_1, \beta_1)$, $B_2\ (\gamma_2, \alpha_2, \beta_2)$ leurs premiers associés. Si nous désignons par Δ_A, Δ_B les aires des triangles $A_0A_1A_2$ et $B_0B_1B_2$; et par Δ celle du triangle de référence ABC, on a les rapports suivants :

$$\Delta_A = \Delta \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_B = \Delta \begin{vmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_A = \Delta_B\ .$$

Cela posé, on peut sans peine étendre cette relation à deux polygones associés quelconques en les décomposant en même nombre de triangles associés ; et encore aux aires limitées par des courbes associées quelconques. Donc, enfin, on peut conclure : *la transformation étudiée n'altère pas l'aire des figures*[1].

7. — Voici un principe fondamental donnant des éléments associés ; si par une suite d'opérations géométriques projectives exécutées sur un triangle ABC combiné avec divers points ou droites fixes, on obtient un point M ou une droite *m*, et si l'on répète les mêmes opérations sous la permutation circulaire (ABC) en faisant intervenir, au lieu des droites et des points primitifs, leurs associés successifs, on obtient deux nouveaux points M′, M″, ou droites *m*′, *m*″, qui sont les associés des premiers M, *m* respectivement.

En effet, toutes les opérations exécutées peuvent être exprimées analytiquement ; et si l'on adopte les coordonnées barycentriques, les opérations mentionnées exécutées dans les trois cas pour obtenir les coordonnées des points M M′ M″ sont les mêmes, en y remplaçant X, Y, Z par Y, Z, X respectivement ; par suite, si (α, β, γ) sont les coordonnées de M, celles de M′ et M″ sont $(\gamma\ \alpha\ \beta)$ et $(\beta\ \gamma\ \alpha)$, ce qui démontre le théorème énoncé. Un raisonnement analogue peut être appliqué au théorème corrélatif.

Note. Comme la droite à l'infini est sa propre associée, l'opéra-

[1] Cela d'ailleurs est évident en observant que cette transformation est *affine*.

tion de diviser un segment dans un rapport donné peut être comprise parmi les opérations projectives en question.

8. — Pour faire des applications de ce principe, je choisirai quelques exemples où l'on verra comment on peut simplifier plusieurs questions élémentaires de la Géométrie du triangle, dont les démonstrations ordinaires, bien que simples, sont abrégées considérablement.

Voici trois questions proposées dans la *Revista trimestral de Matemáticas*.

a) On prendra sur les trois côtés d'un triangle ABC des points A′, B′, C′ divisant ces côtés dans un même rapport $\frac{m}{n}$. Les droites AA′, BB′, CC′ se coupent en M, N, P par lesquelles on mène les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 respectivement parallèles à BC, CA, AB; les droites C_2A_2, A_2B_2, B_2C_2 parallèles à CA, AB, BC; et enfin A_3B_3, B_3C_3, C_3A_3 parallèles à AB, BC, CA. Démontrer : 1° que les sommets homologues des quatre triangles homothétiques ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ sont les médianes du triangle ABC. — 2° que les distances des sommets du triangle ABC aux homologues du triangle $A_1B_1C_1$, sont moyennes proportionnelles entre les distances aux sommets homologues des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ [1].

Il suffit d'observer que les points A′, B′, C′ sont associés, de même que les points M, N, P ; et les points nommés A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, par l'auteur, sont respectivement les points Q_1, R_1, S_1, Q_2, R_2, S_2, Q_3, R_3, S_3 du paragraphe (6, *d*), ce qui démontre la première partie. Pour la seconde, en exprimant que le triangle MNP est circonscrit au triangle ABC, on a, si $\alpha\beta\gamma$ sont des coordonnées de M :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

ou bien $\alpha^2 = \beta\gamma$; relation qui, rapprochée des expressions du paragraphe (5, *d*), justifie complètement l'énoncé.

b) Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, on prend les points A_1, B_1, C_1 tels que

$$A_1C = \frac{BC}{K}, \quad B_1A = \frac{CA}{K}, \quad C_1B = \frac{AB}{K}.$$

Si M, N, P sont les milieux des côtés AA_1, BB_1, CC_1, démon-

[1] Question 254 proposée par M. H. von Aubel dans le *Progreso Matemático* et *133* dans la *Revista trimestral de Matemáticas* (n° 21), 1906.

trer que les triangles ABC, MNP ont le même barycentre, et exprimer l'aire du triangle MNP en fonction de celle de ABC[1].

De même que dans la question précédente, les points A_1, B_1, C_1 et aussi les points M, N, P sont associés, et suivant (6, *a*) la première partie est démontrée. Pour la seconde il suffit de porter, dans la relation

$$\Delta_1 = \Delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

les valeurs

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2K} \qquad \gamma = \frac{K-1}{2K} .$$

c) En prolongeant les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC des longueurs CA_1, AB_1, BC_1 égales à leurs moitiés, on prend sur les droites AA_1, BB_1, CC_1 des points M, N, P tels que

$$\frac{AM}{AA_1} = \frac{BN}{BB_1} = \frac{CP}{CC_1} = \frac{1}{n} ,$$

et on mène par ceux-ci les parallèles aux côtés *a*, *b*, *c* ou aux côtés *b*, *a*, *c* ou *c*, *a*, *b*, ces droites passent par un même point Q ou Q′ ou Q″[2].

Il suffit de noter que les points A_1, B_1, C_1 sont associés et aussi les points M, N, P ; les droites parallèles menées passent donc de trois en trois par les points alliés.

9. — On peut aussi exposer cette théorie en partant de la définition plus générale des coordonnées triangulaires[3] du point M (2) qui substitue à la droite à l'infini une autre droite quelconque. Dans cette hypothèse la correspondance établie est une homographie dont les éléments doubles sont cette droite et deux autres imaginaires se coupant sur son pôle trilinéaire par rapport au triangle.

Mais les propriétés exposées dans le cas particulier de l'affinité suffisent pour se faire une idée du parti que l'on peut tirer de cette théorie si simple pour démontrer plusieurs propriétés relatives à la Géométrie du triangle.

Il est aisé de voir que la plupart de ces propriétés sont applicables au tétraèdre. Nous les omettons pour abréger ; le lecteur fera sans peine la généralisation.

Julio Rey Pastor (Madrid).

---

[1] Question 132 proposée par M. E.-N. Barisien dans la *Revista trimestral de Matemáticas* (nº 21), 1906.

[2] L. de Alba. Question 127 de la *Rev. trim. de Math.*

[3] M. Vegas. Tratado de Geometria analitica. Madrid, 1907.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DE LA PHYSIQUE DANS LES ÉCOLES PRIVÉES DE POLOGNE[1]

I. — Notice historique.

Dans le programme de la Commission d'Education polonaise (1773-1792), les mathématiques occupaient un rang élevé et correspondant à l'esprit des temps, quoiqu'on ne puisse contester que le groupement des différentes parties de cette science n'ait été artificiel et incommode.

On affectait les deux premières classes à l'arithmétique, et, outre l'enseignement à l'école, la jeunesse s'exerçait, les jours de congé, à la tenue des livres de ménage. Dans les IIIe et IVe classes, on enseignait la géométrie, et simultanément, on répétait la théorie des opérations arithmétiques, avec certains suppléments, par exemple la mesure des aires, la connaissance des instruments les plus simples. La seconde année était consacrée à l'enseignement systématique des théorèmes géométriques et aux travaux pratiques sur le terrain. Le cours de deux années de la Ve classe était réservé à l'algèbre jusqu'aux équations du second degré ; une partie du temps était consacré à la solution trigonométrique des triangles. Enfin, dans la dernière classe, on enseignait la physique et surtout la mécanique pratique.

Sous les auspices de la Commission d'Education, on avait formé une société ayant pour but l'édition de livres élémentaires et classiques, et qui, bientôt, fit paraître une série de manuels qui, pendant plusieurs dizaines d'années ne perdirent nullement de leur valeur, attestée d'ailleurs par leur nombreuses éditions, par exemple :

L'Huilier. Traduction de Gawronski. Géométrie pour les écoles nationales (1780, 5e édition en 1816).
» Arithmétique. (1781, plus que 10 éditions, la dernière en 1841).
» Algèbre. (1782, 5e édit. 1808).

---

[1] Rapport du Cercle mathématico-physique de Varsovie.

ZABOROWSKI. Géométrie pratique (1786, 5e éd. 1820).
» Logarithmes pour les écoles nationales (1787, 2e édit. 1807).
HUBE. Introduction à la physique (1783).
BECCARIA. Traduit par *Jundzill :* De l'Electricité (1786).

L'emploi, pendant tant d'années, de ces manuels dans les écoles, atteste leur haute valeur; et si nous considérons le nombre assez élevé des manuels qui vinrent après, comme on peut le voir dans les articles y relatifs de l'« Encyclopédie de l'éducation », ils avaient, comme manuels, de réelles qualités. Les suivants, entre autres, méritent notre attention :

Enseignement de l'arithmétique.

CZECH. (Vilna, 1807, 6e édition en 1827).
KONKOWSKI. (Varsovie 1811).
BIELSKI. (Vilna, 1806, 5e éd. en 1818).
PRZYBYLSKI. (Varsovie 1818, 3e éd. : 1830).
RADOMINSKI. (1821, 6e édit. : 1858).
KARCZEWSKI. (Kielce, 1822).
BRZOSTOWSKI. D'après *Vernier* (Vilna 1833, 2e éd. : 1839).
BARANSKI. (Varsovie, 1843; 2e éd. : 1856).
LIBELT. (2 tomes, Cours de mathématiques, Posen, 1844).
MILEWSKI. D'après *Brettner* (Breslau, 1846 ; 3e éd. : Posen, 1865).
STECZKOWSKI. (Cracovie, 1851, 2e éd. : 1861, comprenant le tome I : Cours élémentaire de mathématiques).

Pour l'enseignement de l'algèbre.

SNIADECKI. (Cracovie, 1783).
LACROIX. (Vilna, 1804). Traduit par *Dabrowski*. (Varsovie, 1818).
WYRWICZ. (1821-1828) 1re partie (2e édition en 1828).
HRECZYNA. (Krzemieniec, 1830).
LIBELT. (Comme plus haut).
STECZKOWSKI. (Cracovie, 1852. Voir plus haut).

Pour l'enseignement de la géométrie.

CZECH. Préface de *Sniadecki* (Les Eléments d'Euclide. Vilna, 1807, 2e éd. : 1817).
DABROWSKI. D'après Lacroix (Varsovie, 1813, 4e éd. en 1834).
HRECZYNA. D'après *Potier*. Vilna, 1817).
KARCZEWSKI. (Kielce, 1823).
WYRWICZ. D'après Legendre (Vilna, 1825-1829, 4 parties; 1re partie, 2e éd.: 1827).
LEWOCKI. (Varsovie, 1827, 2e éd. : 1830).
KRANTZ. (Varsovie, 1828).
KASTERSKI. D'après *Legendre*. (Varsovie, 1834. Stéréométrie).
LIBELT. (Voir plus haut).
PANKIEWICZ. D'après *Legendre*. (Varsovie 1844, 4e éd. : 1862. Planimétrie).

Niewęglowski G.-H. (Posen, 1854. 2e édit. : Paris, 1868).
Przystanski. (D'après *Clairaut* (Varsovie, 1856, 2e éd. : 1857).
Steczkowski. (Cracovie, 1859, tome IIIe du Cours élémentaire de mathématiques).

Pour la trigonométrie.

Polinski. (Vilna, 1816, 3e édit. : 1828).
Simson. (A la 2e éd. : les Eléments d'Euclide).
Dabrowski. (Comme suite de la géométrie de *Lacroix*).
Krauz. (Varsovie, 1828).
Kasterski. D'après *Lefébure de Fourcy* (Varsovie, 1836).
Libelt. (Voir plus haut).
Bernhardt. D'après *Lefébure de Fourcy* (Varsovie, 1850).
Niewęglowski G.-H. (Posen, 1857).
Steczkowski. Tome IIIe du Cours de mathématiques (Voir plus haut).

Pour l'enseignement de la physique.

Osinski. (Varsovie, 1772. 3e éd. : 1803. Augmenté par Bystrzycki).
Korzeniowski. D'après *d'Haüy* (Polotsk, 1802, 2 t., 2e éd. : Vilna, 1806).
Sieradzki. D'après *Biot* (Vilna, 1816).
Markiewicz. (Cracovie, 1819).
Bystrzycki. (Varsovie, 1820).
Drzewinski. (1823-1825, 3 tomes).
Krzyzanowski. (Varsovie, 1825, 2e éd. : 1828).
Magier. (Varsovie, 1825).
Markiewicz. Cours des lycées (Cracovie, 1834).
Radwanski. (Varsovie, 1837); du même (1839).
Urbanski. (Léopol, 1849); du même (1851, 2e éd. : 1868).
Traduction de *Ganot* sous la rédaction de Przystanski (Varsovie, 1860, 2e éd. : 1865).

Pour l'enseignement de l'astronomie.

Skomorowski. D'après Lalande (Varsovie, 1821).
Karczewski. (Cracovie, 1824). Du même (Vilna, 1826).
Slawinski. (Vilna, 1826).
Jastrzebowski. (Varsovie, 1817).
Dziekonski. D'après *Smith* (Varsovie, 1857).
Steczkowski. (Cracovie, 1861).

Les défauts susmentionnés du programme de la Commission d'Education furent corrigés par la répartition du Cours de mathématiques entre toutes les classes ; la géométrie et l'arithmétique furent enseignées simultanément à partir de la 1re classe jusqu'aux sections coniques inclusivement, dont la théorie, outre les travaux susmentionnés de Sniadecki, (*Théorie du calcul algébrique appliqué aux lignes courbes*, Cracovie, 1783) était traitée analytiquement dans les ouvrages de Wyrwicz (Vilno, 1819-1829) et de Krzyzanowski (Varsovie, 1822). Quant à la géométrie syn-

thétique, Baraniecki « Sections coniques », Varsovie, 1885), ne cite que les leçons du professeur Bayer à Lukow, 1857.

Dans les écoles du royaume de Pologne, depuis 1815, le programme a subi peu de changement. L'arithmétique était enseignée dans les 4 premières classes, l'algèbre en IVe, V^e^ et VIe classes (avec la théorie des progressions et logarithmes) ; on commençait la géométrie en IIe classe, on finissait la planimétrie en IVe classe, ensuite le cours de la Ve classe comprenait la trigonométrie rectiligne avec les éléments de la géodésie, et la suite en VIe classe, la stéréométrie. Lors du changement des écoles départementales en écoles gouvernementales, ce programme fut entièrement maintenu ; et lors de l'ouverture des gymnases réaux, le programme des mathématiques fut considérablement élargi. L'arithmétique et la théorie des logarithmes avec leur application au calcul des intérêts composés se terminaient dans la IVe classe, la planimétrie était enseignée dans les IIe et IIIe classes, la stéréométrie et la géodésie dans la IVe classe, la trigonométrie en V^e^ classe, en V^e^ et VIe classes les sections coniques. Dans ces deux dernières classes, on enseignait aussi l'algèbre avec l'analyse combinatoire et la théorie du binôme de Newton.

La dernière étape dans le développement de l'École polonaise fut la réforme de Wielopolski, directeur de la Commission de l'Instruction publique réorganisée en 1861. On donna aux écoles moyennes le type des gymnases de 7 classes. Dans ces gymnases, en ce qui concerne les mathématiques, le programme suivant était admis : arithmétique, I^e^, IIe, IIIe, IVe classes ; géométrie, IIe, IIIe, IVe, V^e^ classes ; géodésie, IVe, V^e^ classes ; algèbre, IVe, V^e^ VI, VIIe classes ; trigonométrie en VIe classe, géométrie descriptive, VIe, VIIe classes ; géométrie analytique, VIIe classe ; physique, V^e^, VIe classe ; géographie mathématique, VIe classe. Outre 13 écoles complètes, on ouvrit, aux chefs-lieux d'arrondissement, toute une série d'autres écoles, d'une durée de cours de 5 ans, avec 3 ou 4 classes inférieures de gymnase, et les 2 dernières ou simplement la Ve classe avec un cours légèrement modifié qui visait la spécialité choisie par l'élève.

Parmi ces écoles, il y en eut quelques-unes de normales, dont les élèves de la Ve classe enseignaient, sous la direction de leurs maîtres, aux élèves de l'école élémentaire attachée à l'école principale ; on créa le premier Institut supérieur de jeunes filles. On ouvrit aussi une quantité de gymnases de filles avec le même programme et 6 classes, et dont les élèves se préparaient à l'enseignement de la manière ci-dessus mentionnée ; l'étude des mathématiques était limitée à l'arithmétique (y compris la tenue de livres), à la physique, à la cosmographie.

En 1867, on supprima l'enseignement en langue polonaise et on introduisit la langue russe. Le Département scolaire officiel de

Varsovie remplaça la Commission de l'Instruction ; l'École supérieure polonaise fut transformée en université russe dont les chaires vacantes furent occupées exclusivement par des Russes. En même temps, sous le ministère Tolstoï, l'enseignement dans la langue officielle et les programmes copiés sur ceux des écoles allemandes, furent introduits. L'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles dans les gymnases comme dans les écoles réales fut réduit ; l'histoire naturelle ne fut continuée que dans quelques gymnases avec une heure de leçon par semaine. Quant aux écoles privées, dont la création était extrêmement difficile (par exemple en dehors de Varsovie, on ne permettait que la formation d'écoles à 4 classes et même à 2 classes), les règlements officiels seuls y étaient admis.

Une liberté relativement plus grande régnait dans les écoles professionnelles qui n'étaient pas soumises au Ministère de l'Instruction publique. La conséquence en fut la création de nombreuses écoles commerciales, qui se différenciaient des écoles réales par le manque exclusif de sections de mathématiques dans les classes Vme et VImes.

Le niveau de la littérature scientifique polonaise après 1870, contemporaine de la réforme susmentionnée du ministre Tolstoï, prouve l'excellence de l'école Wiélopolski et surtout de l'École supérieure, qui, avec ses 7 années d'existence, contribua puissamment au relèvement de la science polonaise. Nombreux furent ses élèves qui émigrèrent en Galicie ; celle-ci, grâce à l'autonomie accordée à cette époque, commença à se relever, à revivre après la répression antérieure. Une partie des élèves de l'École supérieure de Varsovie se fixa à Paris, ils y fondèrent la « Société des Sciences exactes », enrichissant la littérature scientifique polonaise d'une série d'éditions de la Bibliothèque de Kurnik. Ceux qui demeurèrent à Varsovie, durant de nombreuses années, popularisèrent ardemment les sciences exactes dans les revues scientifiques et littéraires, etc.

Nous remercions également les élèves de l'Ecole supérieure et le premier recueil consacré aux mathématiques pures, Bibliothèque physico-mathématique, créée par feu Baraniecki et continuée par MM. A. Czajewicz et S. Dickstein, en même temps que les *Prace matematyczno-fizyczne* et les *Wiadomosci matematyczne*, créées et rédigées par M. Dickstein.

De nouveau reconstituée en 1905, l'école polonaise privée s'est imposé le but de restaurer les brillantes traditions du passé. Pour relever l'enseignement des mathématiques, on constitua le « Cercle mathématico-physique », qui rédigea le programme provisoire qui parut dans la « Revue pédagogique » (1905, pages 236, 253, 267, 281), et qui édita, en 1907, un programme raisonné de l'enseignement de l'arithmétique. Outre les communications scien-

tifiques, le Cercle, dans ses séances mensuelles, traita différentes questions liées à l'enseignement des mathématiques. Pour élargir et développer l'enseignement scolaire au moyen des éléments de l'Analyse supérieure, M. Szczepanski, après avoir exposé ses idées, écrivit un cours complémentaire de mathématiques élémentaires (1906). Quant à la question de la géométrie analytique, le Cercle, après l'audition des rapports de MM. Kwietniewski et Straszewicz, a exprimé le besoin d'introduire cet objet, non comme une matière indépendante, mais seulement comme un instrument pour illustrer le cours des fonctions. On s'est aussi prononcé pour l'introduction, dans l'enseignement scolaire, des éléments de la géométrie nouvelle et de la notion du groupe. En 1909, M. Danielewicz présenta un rapport prouvant l'utilité d'introduire dans l'enseignement les éléments du calcul des probabilités. Ce rapport de M. Danielewicz, comme aussi son précédent rapport « Sur l'enseignement des quantités irrationnelles », ont été publiés dans les « Wiadomosci matematyczne », tome XIII, 1909 ; XI, 1907. Parmi tous les autres rapports concernant les différentes branches mathématiques enseignées, nous citerons :

Sawicki. Du programme de physique dans les écoles secondaires.
Kwietniewski. Des représentations graphiques.
Straszewicz. De l'enseignement de la géométrie nouvelle dans les écoles secondaires.
Pozarysky. De l'enseignement de l'électricité et du magnétisme.
Zarzecki. Résumé de quelques rapports de la Commission allemande.
» Axiome et postulat dans les éléments d'Euclide.
Czubalski. « L'initiation mathématique », de M. Laisant.
Zarzecki. Du développement de la pensée fonctionnelle dans l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire.
Landau. Exercices de physique à l'école secondaire.
Zarzecki. De l'application de la méthode d'inversion.
Kornilowicz. Programme du dessin technique.
Czubalski. Programme de la commission allemande pour l'enseignement mathématique.
Zarzecki. De quelques considérations sur les fondements de la géométrie.
Czubalski et Zarzecki. Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkte aus, von F. Klein.
Zarzecki. Illustration géométrique de la propriété des racines de l'équation du second degré.
Gutkowski. Théorie des erreurs relatives dans leur application à la physique.
J. Kierski. Origine et essence des axiomes géométriques.

En outre, le président du Cercle, M. Dickstein, a fait, presque à toutes les séances, un compte rendu des principales œuvres de la littérature mathématique polonaise et étrangère.

Accomplissant le but dans lequel il a été créé, le Cercle a orga-

nisé en 1906 une commission des programmes, et celle-ci s'est chargée de réunir les programmes des écoles actuelles pour les étudier en détail.

La création de la *Commission internationale de l'enseignement mathématique* a provoqué, au sein de notre Société, une ardeur nouvelle pour l'action. Notre commission, composée des quelques membres de la Société et de quelques professeurs délégués des écoles privées susmentionnées de Varsovie, dans la session préparatoire, s'est proposée, avant tout, de faire un tableau de l'état actuel de l'enseignement des mathématiques dans les écoles privées. Dans ce but, on envoya aux écoles de province une adresse dans le sens ci-dessus, en y joignant le programme de la Commission internationale ; quant aux programmes des écoles de Varsovie, les membres de la Commission se les procurèrent, en cherchant les différents types d'écoles et, selon ces types, se divisèrent en une série de sections, en s'engageant à étudier, dans chaque section, les programmes des écoles du type donné et à indiquer leurs divergences d'avec le programme normal. Indépendamment de cela, conformément aux branches enseignées, les membres de la Commission formèrent deux sous-commissions : mathématique et physico-astronomique. Il fut en plus décidé que, dans les rapports présentés par chaque section, on devrait avoir égard à l'histoire des écoles de l'ancien type ; que, pour se faciliter à l'avenir le travail, la Commission devrait collectionner les manuels polonais pour l'enseignement des mathématiques, ainsi que tous les articles d'ordre didactique parus, tout au moins dans ces derniers temps. En conséquence de cette dernière résolution, M. Laparewicz, membre de cette Commission et rapporteur, a préparé une « Bibliographie », qui parut dans le tome XIV des *Wiadomosci matematyczne*.

II. — Compte rendu de la Commission des Programmes.

A. — *Sous-commission des Mathématiques.*

Le programme des branches des mathématiques dans les écoles privées de jeunes gens correspond, dans ses traits généraux, à celui des écoles officielles du même genre.

Le cours de huit années de mathématiques dans les *gymnases philologiques* officiels comprend : l'arithmétique (classes I-III) ; l'algèbre (cl. III-VII) ; la géométrie (cl. IV-VI) et la trigonométrie (VII). La dernière année (cl. VIII) est consacrée à la répétition du cours avec quelques suppléments.

Dans les *écoles réales, section des mathématiques*, parallèlement à la géométrie (cl. IV-VI), nous avons encore, deux heures par

semaine, de dessin comprenant la solution, à l'aide de constructions, des problèmes de la planimétrie, etc., le dessin projectif ou géométrie descriptive. (Ordinairement, pendant un semestre de la cl. VI). Quant à la trigonométrie, elle est enseignée en Vme cl. au lieu de l'être en VIIme; le cours de la VII cl., à part les derniers chapitres de l'algèbre, embrasse l'application de la géométrie à l'algèbre, ou encore les éléments d'analyse. Dans la *section commerciale* des écoles réales, les mathématiques sont au même niveau que dans les gymnases. Dans les gymnases privés la divergence d'avec le programme officiel a trait à l'unique changement d'une heure de leçon de la VIIIme cl. dans la Vme, consacrée à l'étude plus fondamentale des chapitres suivants de la planimétrie : Proportionnalité des segments et similitude des figures, surtout des figures régulières, ensuite la mesure des aires. Cependant une pareille diminution du temps consacré à l'enseignement mathématique dans la VIIIme classe a forcé de supprimer du programme les éléments d'analyse. C'est, paraît-il, l'école de Lublin qui a trouvé la plus heureuse solution à ce problème. Eliminant de l'arithmétique la théorie des proportions et la règle de trois, et passant directement à la propedeutique de l'algèbre, les chapitres correspondants d'algèbre purent être enseignés, par conséquent, dans la classe inférieure, et le temps ainsi gagné fut consacré aux éléments du calcul différentiel et du calcul intégral.

Les notions élémentaires du calcul des probabilités comme aussi leur application à la pratique des assurances, sont enseignées depuis plusieurs années au gymnase du général Chrzanowski à Varsovie.

M. Ciechanowicz, professeur de ce gymnase, membre de notre Commission, nous présente les remarques suivantes, concernant le but de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires :

« Nous ne perdons pas de vue que le but principal de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires, quelqu'en soit le type, doit être le développement systématique des capacités intellectuelles de l'élève qu'il faut habituer au raisonnement exact sur les matières du domaine de sa connaissance mathématique et dont le savoir intellectuel doit être, simultanément et progressivement, enrichi d'une certaine somme des faits de ce domaine ; en un mot, la culture mathématique de l'esprit, c'est-à-dire la préparation et l'impulsion vers les travaux personnels futurs. Sous le rapport méthodologique, nous sommes d'avis que l'appropriation intellectuelle du savoir est avant tout psychologiquement intuitive puis, au niveau supérieur, formellement logique. Cela exposé, au commencement de l'étude des différentes branches des mathématiques, c'est-à-dire l'arithmétique dans la Ire classe, l'algèbre dans la IIIe classe et la géométrie dans la IVe classe (nous

enseignons la propedeutique géométrique, en passant aux leçons de dessin dans les IIe et IIIe classes, nous rejetons à priori les définitions abstraites des notions introduites qui dépasseraient le niveau intellectuel de ces classes; nous nous efforçons le plus souvent possible d'appliquer la méthode heuristique tendant à créer dans l'esprit de l'élève le besoin de former la notion générale et sa définition sur la base de faits déterminés par des preuves et des observations particulières.

« Tout à côté, comme un autre trait caractéristique de ce stade d'enseignement (l'arithmétique), nous attirons l'attention sur la nécessité de créer chez l'élève une certaine habileté pour le calcul, en appliquant souvent dans ce but, des problèmes mentaux de différents types.

« A un niveau supérieur, nous nous efforçons de faire sortir plus évidemment l'élément théorique, insistant sur les notions et les méthodes mathématiques, sur leur caractère abstrait et général, la relativité de leurs bases, et en même temps sur la continuité de l'enchaînement des anneaux du raisonnement (les lois des opérations mathématiques, l'induction complète en opposition à l'induction ordinaire, postulats et axiomes, etc.

« Simultanément nous commençons systématiquement, dirons-nous, à saturer l'enseignement par les notions des fonctions, et à habituer la pensée à l'association fonctionnelle des grandeurs considérées. Dans ce but, nous débutons par les exemples concrets de la physique, ensuite nous insistons sur les parties de la géométrie métrique (quoique au détriment de la méthode de la géométrie moderne pour laquelle le temps manque) et expliquant les premiers éléments de la géométrie analytique, nous préparons ainsi à l'intelligence du cours de la variabilité des fonctions par la méthode graphique, dans le traitement des différents chapitres du cours : discussions des équations, théorie des logarithmes, maximum et minimum des fonctions du second degré, théorie des fonctions trigonométriques. En ce qui concerne la théorie des fonctions trigonométriques, nous estimons qu'il convient de viser, dans la VIe classe, à un degré de préparation mathématique qui permette le traitement général et immédiat de la trigonométrie, sans devoir la subdiviser en trigonométrie des angles aigus et en trigonométrie générale, ainsi que l'exposent la plupart des manuels. En géométrie, nous considérons comme nécessaire la démonstration des modèles de corps et des théorèmes stéréométriques, dans le but de parfaire chez les jeunes gens d'habitude peu riches en imagination spatiale, la faculté de comprendre les rapports spatiaux.

« Nous traitons l'algèbre formelle au point de vue de la généralisation progressive de la notion du nombre, jusqu'au nombre complexe inclusivement. Enfin, nous dirons que le chapitre sup-

plémentaire (éléments de l'analyse supérieure) placé en tête du programme, a été ensuite retranché. Ne pouvant admettre l'idée de la suppression des éléments du calcul infinitésimal, quoique en passant, nous donnons aux élèves une idée des infiniment petits et de leur ordre, comme aussi des opérations qu'ils permettent dans quelques problèmes, par exemple preuve de la formule de l'aire du triangle comme la limite de la somme des rectangles infiniments petits, comme aussi du volume de la pyramide, etc.

« Comme desiderata postulats des réformes rationnelles des programmes des mathématiques dans les écoles philologiques, nous désignons : 1° approfondissement de la théorie de l'arithmétique en VIIe ; 2° la théorie des séries pour le besoin de la théorie des nombres irrationnels et des logarithmes qui sont devenus déjà la partie intégrale des mathématiques élémentaires ; 3° premiers éléments de la géométrie nouvelle ; 4° les premiers éléments des calculs supérieurs. »

Dans l'*école commerciale* de VIIe classe de l'Union-des commerçants de Varsovie, le programme des mathématiques présente quelques divergences avec le type général exposé plus haut des établissements qui sont proprement des écoles réales, mais sans cours fondamental. Dans la IIIe classe on commence l'algèbre par la solution des équations et à leur application aux plus simples problèmes ; dans l'étude subséquente, on attire l'attention sur la représentation graphique des formules et des équations ; la VIIe classe, outre la trigonométrie, comprend la répétition des chapitres étudiés des mathématiques.

Les *écoles de jeunes filles,* de l'initiative personnelle de leurs directrices, ont introduit, en 1909, la réforme qui les mit sur le même pied que les écoles de jeunes gens. Le nombre d'heures de leçons a été élevé à 4 dans chacune des 7 classes. Dans le 3 premières classes, parallèlement à l'arithmétique, la propedeutique géométrique est enseignée par reprises. L'étude de l'algèbre commence dans la IVe classe et se termine dans la VIIe classe par la théorie des logarithmes, les permutations et le binôme de Newton.

L'enseignement systématique de la géométrie se fait dans les IVe-VIe classes ; de plus, en VIIe classe on enseigne la goniométrie avec applications aux problèmes fondamentaux de la trigonométrie.

Séminaires. — Il convient de classer, au nombre des écoles secondaires, les *séminaires,* (écoles normales) pour la formation d'instituteurs primaires, avec 4 années d'études, et dans lesquels peuvent être admises les personnes possédant la connaissance des opérations sur les nombres entiers et les fractions les plus simples. Au premier cours, avec 5 leçons par semaine, lors de la solution par les élèves eux-mêmes des problèmes sur les

nombres entiers, on attache une grande importance à l'écriture soignée et systématique des nombres, ainsi qu'à la discussion des problèmes; on habitue, en outre, les élèves à une exposition claire et détaillée. Lors de l'examen des propriétés de la somme, de la différence, etc., on donne la première idée de la notation algébrique. L'enseignement systématique de l'arithmétique commence par la théorie des opérations avec fractions, précédée de la théorie de la divisibilité des nombres entiers. L'étude de l'algèbre continue par les opérations sur les monômes et les polynômes; en plus on déduit les propriétés des quantités positives et négatives d'où découlent immédiatement les lois des opérations sur des nombres relatifs. Au reste, on arrive aux propriétés fondamentales des équations par la considération, principalement, des équations du premier degré à une inconnue et par les applications à la solution des problèmes. Les élèves étudient en outre, à ce cours, les éléments de la planimétrie appliqués sur le terrain pour tirer les lignes, la mesure de leur longueur et la construction des perpendiculaires et des parallèles, la mesure des angles, et se familiarisent ainsi avec la chaîne d'arpenteur, l'équerre et la boussole.

Le second cours (5 heures de leçons) comprend, en arithmétique, l'étude des proportions et des règles; en algèbre, le système des équations, la représentation graphique de l'équation du premier degré à 2 inconnues et des phénomènes menant à la ligne droite; on passe ensuite à des constructions plus compliquées, à la règle de l'extraction de la racine carrée d'un nombre donné et à la théorie des équations du second degré à une inconnue. En géométrie, on étudie la théorie des segments proportionnels et le reste de la planimétrie, avec l'application à la prise des plans, et aux instruments susmentionnés s'ajoute l'emploi du rapporteur.

Le troisième cours, outre la stéréométrie, comprend la méthodique arithmétique (2 heures) qui apprend aux élèves à connaître les méthodes typiques d'enseignement et les manuels, et leur permet de donner des leçons d'épreuve, dans une école modèle, avec des conférences convenables avant comme après pareille leçon.

Le quatrième cours (2 heures) est surtout consacré aux exercices pratiques dans l'école modèle. Les élèves y font la connaissance de la méthode de la propedeutique géométrique.

En outre, dans les trois premiers cours, on consacre deux heures de leçons par semaine à la physique; au quatrième cours, une heure à la physique et une heure à la cosmographie. A la fin de ce cours, l'élève a le droit de se présenter à l'examen officiel d'instituteur primaire.

Ecole Rudzka. — En 1906, Mme Rudzka ouvrit dans son pensionnat de demoiselles, un cours d'une durée de deux ans, destiné à former des institutrices avec sections d'humanités et de sciences

mathématiques et naturelles. Y sont admises les élèves des pensionnats de demoiselles qui subissent les épreuves préalables.

A la section des sciences mathématiques et naturelles, les élèves de chaque cours ont trois heures de leçon par semaine. Au premier cours, 2 heures sont consacrées aux connaissances supplémentaires d'algèbre, omises dans le cours moyen, par exemple la division continue entre des expressions algébriques, les équations indéterminées, les éléments de la théorie des nombres ; les fractions continues et leurs réduites comme 2 séries de nombres convergents vers la limite ; l'application des fractions continues à la solution des équations exponentielles, la représentation graphique des fonctions du premier et du second degré et des fonctions exponentielles. La troisième heure de mathématiques est consacrée à la géométrie dans laquelle en plus de l'application de la trigonométrie aux différents problèmes de la planimétrie et de la stéréométrie, sont exposées les méthodes géométriques, et, complétées les notions de géométrie nouvelle.

Au deuxième cours, une leçon d'une heure est consacrée à l'algèbre (combinaisons, binôme de Newton, éléments du calcul des probabilités, enfin discussion du minimum et du maximum de la fonction du deuxième degré accompagnée des notions de la dérivée) ; restent deux heures consacrées à l'arithmétique et aux leçons modèles des classes inférieures du pensionnat.

Le même programme est approximativement admis aux cours pédagogiques de demoiselles de M. Milkowski qui possède, en plus, un cours préparatoire.

Dans l'*école mécanico-technique* H. Wawelberg et S. Rotwand, au cours préparatoire, l'algèbre et la géométrie sont enseignées outre une partie du cours de physique. En algèbre, lors de la solution des équations du premier degré avec 2 inconnues, on explique la dépendance fonctionnelle de ces inconnues par construction et par la solution graphique d'un système de 2 équations à 2 inconnues. Dans la solution des équations du deuxième degré, on explique les moyens de construction de la fonction correspondante à la fonction trinôme du second degré. La solution d'un système à 2 équations du second degré se fait au point de vue des chapitres ultérieurs de la géométrie analytique, chapitres sur la détermination des points d'intersection des courbes du second degré. Le cours de géométrie élémentaire se complète par l'étude de la théorie géométrique du centre de gravité, et cela dans le but de faire des déterminations de la surface et du volume des corps de rotation, en insistant sur les problèmes de construction dont les exercices sont le fondement du dessin technique.

L'enseignement de la trigonométrie au premier cours dure un semestre ; on y traite en détail les transformations des formules

goniométriques, les fonctions sin x et cos x sont développées en séries, à l'aide du calcul différentiel commencé en même temps. La géométrie analytique comprend 2 semestres au premier cours, et vise spécialement la ligne droite, les coniques, les cycliques et la chaînette, comme ayant le plus d'emploi technique ainsi que la droite et le plan dans l'espace. Dans le calcul différentiel et intégral enseigné pendant les deux semestres du premier cours, on attache une importance capitale à la différentiation et l'intégration de la fonction d'une variable, comme aussi à l'application à la géométrie pour la détermination de la tangente, du rayon de courbure, de la longueur de l'arc, des aires et du volume ; on vise aux besoins ultérieurs des cours de mécanique, la résistance des matériaux et la physique.

En géométrie descriptive (il en est de même au premier cours, durant les 2 semestres), on étudie en détail les projections orthogonales sur 1, 2, 3 plans; l'axionométrie orthogonale, la géométrie projective plane et les projections centrales avec des constructions rencontrées en technique. Enfin, dans les chapitres correspondants de la mécanique et de la physique, on expose les notions du calcul vectoriel.

B. — *Sous-commission de la Physique*[1].

Lors de l'examen des programmes de physique admis dans la plupart des écoles privées polonaises, la commission s'est convaincue de ce que la matière étudiée ne s'écartait pas du type en usage depuis longtemps dans les écoles ; cependant, dans la distribution de la matière et dans la méthodique de l'enseignement, il existe des différences assez considérables. Dans le but d'uniformiser les programmes et simultanément d'élargir et d'approfondir quelques chapitres de physique, la commission en est arrivée à certains postulats généraux qui sont déjà réalisés dans quelques écoles. Ces *postulats* sont les suivants :

1. L'introduction de l'enseignement préparatoire de la physique dans les classes inférieures est absolument désirable ; en effet, un nombre considérable d'élèves bornant leurs études à la IVe classe, il est inadmissible de les priver des connaissances élémentaires de physique et de chimie qui se présentent constamment appliquées dans la vie journalière et dans la technique.

2. L'enseignement à un degré inférieur doit être expérimental, basé sur des expériences simples et concluantes, les exemples numériques doivent être choisis avec à propos, et éclairer le côté quantitatif des phénomènes.

---

[1] Rapporteur M. S. LANDAU.

3. Étant donné que nos gymnases philologiques ne donnent pas une instruction purement classique, et que les études y durent une année de plus que dans les écoles réales, l'enseignement de la physique n'y doit pas être moins important que dans ces dernières, tant sous le rapport du nombre d'heures que sous celui de la matière.

4. Il est indispensable de ranimer l'étude de la physique. Les problèmes numériques doivent correspondre à la réalité. Les exemples donnés dans l'enseignement doivent se rapporter aux phénomènes réels qui intéressent immédiatement les élèves. Il faut rejeter absolument les descriptions détaillées des méthodes expérimentales n'ayant pas de réalité pour les élèves, comme aussi la description des instruments surannés exclusivement intéressants au point de vue historique. Par exemple, différents moyens de déterminer la densité des vapeurs, de l'air et des gaz, la méthode de Ramsden pour déterminer le coefficient de dilatation des corps solides, le calorimètre de Lavoisier et Laplace, les aréomètres à volume constant, etc. Il est de même superflu de citer les différentes corrections de mesures qui n'intéressent nullement l'élève.

Il est cependant indispensable que le professeur, au moment opportun, attire l'attention sur l'ordre de grandeur des erreurs expérimentales et dans quelques cas sur l'importance des corrections. Par exemple dans une pesée, tenir compte de la pression hydrostatique de l'air; en parlant du photomètre, calculer les erreurs qui proviennent du peu de sensibilité de l'œil, etc.

5. Le pas en avant le plus important dans l'étude rationnelle de la physique sera sans doute l'introduction d'exercices obligatoires personnels et pratiques. Sous ce rapport, certains progrès ont été réalisés dans ces derniers temps, à Varsovie comme en province; cependant, le nombre des écoles possédant des laboratoires de physique est encore restreint.

Sans doute qu'en l'occurence, les difficultés matérielles l'emportent. Il convient cependant d'avoir en vue que, dans le cas qui nous occupe, les instruments les plus simples, et par conséquent peu couteux, suffiraient : la densité des corps solides et liquides, par exemple, peut être déterminée à l'aide d'une vulgaire balance de pharmacien; on peut parfaitement vérifier à l'aide d'un verre ordinaire acheté chez l'opticien pour quelques dizaines de copecks la formule des lentilles, un petit calorimètre donnant une chaleur spécifique avec une approximation de quelques $^0/_0$, coûte quelques dizaines de copecks. D'ailleurs aucune démonstration faite à l'aide d'instruments remarquables et d'une valeur de plusieurs centaines de roubles, ne pourra remplacer l'expérience personnelle et indépendante de l'élève.

Nous convenons que les expériences prennent du temps, ce qui

peut avoir une certaine influence sur le savoir général de l'élève; cependant, avec un tel système d'enseignement on parvient à approfondir la matière, et l'élève acquerra ainsi l'initiative et l'indépendance dans son travail, tout en faisant connaissance avec les méthodes d'investigation. La pédagogie rationnelle qui a pour but l'instruction de l'individu et non pas de lui entasser dans la tête une quantité de connaissances qui se trouvent dans les livres, doit donc considérer le moyen pratique d'étude comme le seul désirable.

Pour mener à bien la solution de la question de l'introduction des exercices pratiques dans l'étude à l'école, le Cercle mathématico-physique a installé dans son domicile (« Urania » rue Bracka, N° 18, à Varsovie), un laboratoire de physique qui donne gratuitement toutes les informations et renseignements désirables, pour l'organisation de ces exercices; chaque professeur trouvera au laboratoire trente problèmes classés, essayés et expliqués. Les professeurs sont admis gratuitement au laboratoire; les élèves, moyennant une modique redevance.

Les programmes ci-dessous (enseignement préparatoire et systématique) donnent une idée de l'étendue admise de l'enseignement, mais non de son ordre qui dépend seulement de la manière de voir personnelle du professeur. La commission cependant est d'avis que, dans certains chapitres, l'ordre ne pourrait pas être interverti sans préjudice quant aux résultats de l'enseignement. Cela concerne avant tout la mécanique qui doit être traitée en deux degrés.

La mécanique est en grande partie le chapitre le plus abstrait de la physique; l'esprit qui n'est pas bien exercé dans le raisonnement mathématique, rencontre de nombreuses difficultés pour se rendre maître du côté formel de l'objet enseigné. Du reste, le contenu des problèmes (par exemple les formules liées avec le mouvement variable) est tellement profond, qu'un esprit jeune n'en peut avoir de compréhension que tout à fait superficiellement et par la mémoire; la répétition de ces questions dans la classe supérieure, le lien de l'idée de vitesse et d'accélération à l'idée de la dérivée en mathématiques, sont choses nécessaires. Une étude approfondie de la mécanique, dans le début, est impropre et pour la raison que l'élève attend de la physique tout autre chose que ce que lui donne l'étude de la mécanique; la jeunesse s'intéresse avant tout aux phénomènes de la nature, afin de connaître les principes des nombreuses constructions techniques qu'on rencontre à chaque pas dans la vie. Une pensée profonde, une généralisation vaste peuvent intéresser seulement des esprits bien dressés, possédant de nombreuses connaissances positives. Et voilà pourquoi, afin de ne pas créer d'inutiles difficultés et de ne pas décourager tout au début les élèves, il sera

bon de consacrer la première année à l'étude de la mécanique, en ce qui est indispensable à la compréhension des chapitres ultérieurs de la physique et en reportant l'autre partie à la troisième année. Lors d'une étude plus approfondie de cet objet, il est impossible d'omettre un chapitre si important que la théorie du mouvement vibratoire auquel sont intimement liées l'acoustique et l'optique physique. L'interférence de la lumière et certaines notions sur la diffraction, la considération de la lumière comme un cas particulier d'un rayonnement électro-magnétique ne peuvent être omis, en aucun cas, dans l'enseignement secondaire. C'est d'ailleurs une question trop importante pour la science et trop capitale pour l'instruction générale. On pourrait, peut-être, tomber d'accord sur une diminution de quelques parties de l'optique géométrique ; l'abréviation, par exemple, de la théorie des lentilles. La formule des lentilles devrait éventuellement être donnée telle qu'elle, sans démonstration, avec sa seule preuve expérimentale. Il suffit aussi de donner des notions générales sur la polarisation et la diffraction de la lumière ; d'ailleurs, étant données leur difficulté et leur étendue, ces chapitres répondent peu à l'enseignement secondaire.

Si le programme ci-dessous diffère quelque peu de celui qui est généralement admis, c'est parce que, sans doute, l'étude de la chaleur contient les notions de l'équilibre entre les différents états d'agrégation des corps, et quelques données sur la théorie des solutions, à l'exception, d'ailleurs, des travaux de Raoult. L'ordre des leçons sur la lumière et le rayonnement peut paraître très original ; cependant, dans cet ordre, la pensée se développe partout logiquement ; il n'y a ni omission ni retour au même sujet. En somme, l'ordre ci-dessous indiqué est un des plusieurs possibles et admissibles.

a) Programme de l'enseignement préparatoire de la physique.

Phénomènes de la nature. Sens. Observation des phénomènes. Etats d'agrégation des corps. Influence de la chaleur sur le volume des corps solides (anneau de Gravesande), des liquides (thermomètre à mercure), des corps gazeux (thermomètre à gaz). Bons et mauvais conducteurs de la chaleur. Fonte de la glace. Gelée. Solidification et vaporisation des liquides. Absorption de chaleur pendant la vaporisation. Ebullition des liquides ; points d'ébullition. Condensation de la vapeur. Transformation de l'eau dans la nature : nuages, pluie, neige, grêle, rosée, givre. Applications de la vapeur d'eau. Sources de chaleur (le soleil, le frottement).

Mouvements uniforme et varié des corps. Chute des corps. La verticale. Centre de gravité. Equilibre des corps, équilibre stable, instable, indifférent. Poids des corps ; balance ordinaire, pesée, contrôle de la balance. Unité de poids, leviers, exemples, applications des leviers, poulie fixe. Equilibre des liquides. Surface des niveaux. Vases communiquants, fontaines, puits arté-

siens. Vases capillaires. Pression des liquides sur le fond. Pression des liquides vers le haut. Corps immergés dans un liquide (loi d'Archimède). Flottement des corps sur l'eau. Densité des corps relativement à l'eau. Détermination de cette densité.

Propriétés des gaz. Densité des gaz par rapport à l'eau, à l'air. Expansibilité des gaz. Influence du volume des gaz sur leur élasticité. Diffusion des gaz. Pression atmosphérique (baromètre, loi d'Archimède pour les gaz, ballons). Ondes aériennes, le son, tons, interférences, résonnateurs, vitesse du son. Echo.

Le soleil. Sources de chaleur et de lumière. Rayons lumineux. Propagation rectiligne de la lumière. Corps diaphanes et opaques. Ombre. Pénombre. Image au travers d'une petite ouverture. Réflexion de la lumière dans les miroirs plans. Images imaginaires. Réflexion de la lumière dans les miroirs concaves et convexes. Réfraction de la lumière des lentilles. Foyers de la lentille convergente. Images réelles et imaginaires. Courte explication des instruments d'optique. Dispersion de la lumière. Spectre. Couleurs du spectre continu. Arc-en-ciel. Couleurs des corps.

Electrisation des corps par le frottement. Pendule électrique. Deux genres d'électricité. Electricité par influence. Machines électriques. Etincelle (la foudre, le tonnerre). Idée sur le courant électrique (courant dans un conducteur unissant les pôles de la machine électrique). Piles galvaniques, batterie, application du courant électrique, lampes électriques. Electro-aimants, sonnerie électrique, aimants artificiels et naturels. Pôles des aimants. Zone neutre. Aiguille magnétique, boussole.

(D'après le programme des branches enseignées dans l'école de commerce de jeunes filles *A. Werecka*. Cours de la IIe classe).

b) Programme de physique des classes supérieures.

Première année (3 leçons par semaine). — Introduction. Phénomènes physiques et chimiques. Propriétés des corps. Grandeurs physiques. Rapports entre des grandeurs physiques. Observations et expériences. Lois physiques. Mesures physiques. Système métrique. Vernier à ligne.

Mécanique Mouvement. Chemin. Mouvement uniforme, sa vitesse. Mouvement rectiligne et mouvement curviligne. Genre du mouvement par rapport au chemin. Mouvement uniforme et varié relativement à la vitesse. Mouvement rectiligne uniforme. Formule du chemin parcouru. Dimension de la vitesse. Représentation graphique du mouvement uniforme. Mouvement rectiligne varié. Mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale. Accélération. Formule de la vitesse et du chemin parcouru (démonstration par procédé graphique). Lois du mouvement de *Newton*. Première loi. Inertie. Deuxième loi. La masse. Formule de la force. Unité de force. La force comme quantité dirigée. Indépendance de l'action des forces. La force au point de vue statique. Dynamomètres. Troisième loi. Composition et décomposition des mouvements et des forces. Loi du parallélogramme. Projection horizontale. Composition des forces parallèles. Couple de forces. Notions générales sur la gravitation universelle. Poids des corps. Centre de gravité. Poids spécifique. Densité des corps. (Méthodes de détermination — voir plus loin). Equilibre des forces. Notion du moment statique. Equilibre des corps pesants appuyés à un point sur le plan. Machines simples.

Leviers. Balances. Poulie multiple. Cabestan. Roues dentées. Plan incliné. Coin. Notion de la vis.

Le travail. Formule du travail. Unité de travail. Représentation graphique du travail. L'effet. Son unité.

Energie. Energie potentielle et cinétique. Transformation de l'énergie. Principe de la conservation de l'énergie. Propriétés des corps solides, liquides et gazeux. Division des corps en solides, liquides et gazeux. Déformations élastiques. Corps solides. Hypothèse de l'agrégation moléculaire. Corps cristallisés et amorphes. Genres de déformations des corps solides. Elasticité. Loi de *Hooke*. Résistance. Notions générales du frottement des solides. Liquides. Surface libre. Pression. Son unité. Compression des liquides. Loi de *Pascal*. Presse hydraulique. Pression hydrostatique sur le fond et les parois latérales des vases. Equilibre des liquides dans les vases communiquants. Sources. Fontaines. Conduits d'eau.

Loi d'*Archimède*. Conditions du flottement des corps. Méthodes de détermination de la densité et des poids spécifiques des solides et des liquides. Mesure directe et pesée, pesée hydrostatique. Aréomètres. Pyknomètres. Phénomènes expliqués par l'action des forces intermoléculaires. Tension superficielle. Pression superficielle. Humidification. Equilibre des liquides dans les tubes capillaires. Notions générales sur la viscosité des liquides et sur le mouvement des liquides. Loi de Torricelli. Distribution de la pression dans un tuyau (aspirateur). Diffusion et osmose des liquides. Corps gazeux. Pression atmosphérique. Expérience de Torricelli, de Guericke et de Pascal. Baromètre à mercure (à siphon, de Fortin). Baromètres métalliques (Vidi, Bourdon). Barographes. Pompes à piston et à mercure. Loi de Boyle, limites de son exactitude. Représentations graphiques. Manomètres fermés et ouverts. Manomètres à ressorts. Appareils basés sur l'élasticité des gaz. Pipette. Siphon. Pompes, pompes à main. Notions sur la densité des gaz. Loi d'Archimède dans les gaz. Ballons et aérostats. Résistance de l'air. Aéroplanes. Diffusion des gaz. Loi de Dalton.

Chaleur. Thermométrie. Thermomètres. Thermomètre à mercure. Echelles thermométriques. Thermomètres à différents liquides. Thermomètres métalliques. Thermographe. Thermomètre à maxima et à minima. Dilatibilité des corps solides. Coefficients de dilatation, de longueur et de volume. Dilatation des vases et des règles. Dilatabilité apparente et réelle des liquides. Dilatation du mercure (par la méthode de Dulong et Petit), dilatation de l'eau. Corrections barométriques. Dilatation des gaz. Loi de Charles (Gay-Lussac). Echelle absolue des températures. Thermomètres à gaz. Equation de Clapeyron ($pv = RT$).

Deuxième année (3 heures de leçon par semaine). — *Chaleur* (suite). Unité de chaleur. Chaleur spécifique. Calcul. Détermination de la chaleur spécifique d'un corps solide. Calorimètres à glace (Bunsen) et à eau. Chaleur spécifique des gaz. Transformation des différents états d'agrégation. Congélation. Fusion et solidification. Point de solidification de l'eau. Chaleur latente de fusion. Surfusion. Changement de volume dans les phénomènes de la fusion. Deux catégories de corps. Influence de la pression sur le point de fusion. Représentation graphique de la dépendance de la pression de la température de fusion. Fonte de la glace et solidication de l'eau dans la nature. Point de fusion des alliages. Vaporisation et ébullition. Point d'ébullition. Chaleur latente de la vaporisation. Retard de l'ébullition. Etat sphéroïdal. Changement de volume dans la vaporisation. Dépendance

du point de vaporisation de la pression. Représentatian graphique de cette dépendance. Chaudière de Papin. Distillation. Propriétés de la vapeur. Vapeur saturée et non saturée. Condensation de la vapeur. Sublimation. Représentation graphique du changement des points d'agrégation d'un corps simple, de l'eau par exemple. Condensation des gaz. Expériences de Faraday, d'Andrews. Température critique. Représentation graphique. Derniers applanissements des difficultés expérimentales. Machine pour la liquéfaction de l'air. Solutions non saturées, saturées, sursaturées, leur congélation. Point eutectique. Mélanges réfrigérants. Ebullition des solutions. Moteurs thermiques. Machines à vapeur. Chaudière à vapeur. Moteurs à alcool, à benzine, à gaz (en général). Côté énergétique des processus thermiques. Hypothèse sur la nature de la chaleur. Travaux de Mayer, Joule, Helmholtz, Equivalent mécanique de la chaleur. Idées générales sur les deux principes de la thermodynamique. Propagation de la chaleur. Conductibilité des corps solides. Conductibilité des liquides et des gaz. Quelques considérations sur le rayonnement (voir troisième année). Humidité de l'air, absolue et relative. Corps hygroscopiques. Méthodes de détermination de l'humidité atmosphérique (Loi de Dalton par rapport à l'air). Point de rosée. Hygromètre. Psychromètre d'Auguste. Hygromètre Saussure. Météores atmosphériques.

Electricité et magnétisme. Aimants artificiels et naturels. Aiguille aimantée. Pôles d'un aimant. Loi de Coulomb. Unité de la masse magnétique et sa dimension. Champs magnétiques. Ecrans magnétiques, Paramagnétisme et diamagnétisme. Magnétisme terrestre. Déviation et inclinaison des lignes du magnétisme terrestre. Composante horizontale du magnétisme. Lignes isogones et isoclines. Variations du magnétisme terrestre. Phénomènes électriques causés par frottement (et quelques mots sur d'autres sources d'électricité). Conducteurs. Non-conducteurs. Loi de Coulomb. Unité de la masse électrique. Electroscopes. Electromètres. Distribution d'une charge électrique (électroscopes, électromètres). Influence électrique. Potentiel électrique et son unité. Champ électrostatique. Electrophore. Machine à frottement. Machine à influence. Capacité électrostatique. Théorie du condensateur. Diélectriques. Bouteille de Leyde. Décharge électrique. Courant électrique. Décharge et étincelles. Electricité atmosphérique. Expériences de Galvani et de Volta. Pile de Volta. Force électromotrice au point de vue de la différence de potentiels. Déviation de l'aiguille aimantée sous l'influence du courant. Lois d'Ampère. Direction du courant. Galvanomètre à aiguille aimantée. Polarisation de l'élément de Volta. Dépolarisateurs. Eléments à dépolarisateurs. Eléments secs. Eléments réversibles Accumulateurs (en général — voir plus loin). Intensité du courant (quantité, force). Boussole des tangentes. Unité de force du courant. De l'unité électrolytique (voir plus loin). Ampèremètre. Résistance des conducteurs. Lois d'Ohm. Unité de résistance. Résistance des corps solides, liquides et gazeux. Résistance interne des éléments. Groupement des éléments en séries parallèles et groupements mixtes. Moyen le plus avantageux des groupements. Les dérivations du courant. Lois de Kirchhoff. Pont de Wheatstone. Détermination de la grandeur des résistances. Electromagnétisme. Action du courant sur les aimants mobiles (voir plus haut), action des aimants sur les conducteurs mobiles. Application dans la construction des galvanomètres. Champs magnétiques autour des conducteurs à courant. Propriétés des sélénoïdes. Action mécanique des conducteurs à courant sur d'autres conducteurs à courant. Electro-aimants. Sonnerie élec-

trique. Télégraphie électromagnétique. Courants induits. Mouvement du conducteur dans le champ magnétique. Règle de Lenz. Force électromotrice. Selfinduction. Courants de Foucault. Téléphone. Microphone. Dynamos. Machines à courant variable et constant. Collecteurs. Système dynamoélectrique de Siemens. Moteurs électriques et leurs applications dans les constructions techniques et la locomotion. Courants alternatifs. Transformateurs. Bobine de Ruhmkorff. Transport d'énergie électrique à distance. Thermo-électricité. Eléments et batteries thermo-électriques. Thermomètres (pyromètres) électriques. Transformation de l'énergie électrique en chaleur et en lumière. Les unités employées aux mesures d'énergie électrique. La puissance dans les phénomènes électriques. Lois de Joule Chauffage et éclairage électriques. Electrolyse. Ions. Réactions secondaires. Loi de Faraday. Applications de l'électrolyse. Polarisation des électrodes. Réactions électrolytiques dans les éléments et les accumulateurs.

Troisième année (3 heures de leçon par semaine). — *Compléments de mécanique.* — Mouvement varié Approfondissement de la notion de vitesse et d'accélération. Mouvement uniforme circulaire. Force centripète. Figure de la terre. Lois de Kepler. Gravitation. Coefficient de la formule de Newton. Variation du poids. Projection oblique. Répétition de la théorie des machines. Bascule. Généralisation du principe de la conservation de l'énergie. Sur les systèmes d'unités en physique. Considération répétée des unités en mécanique et électricité. Mouvement harmonique simple. Vitesse et accélération du mouvement pendulaire. Cas les plus simples de sommation des mouvements harmoniques. Pendule mathématique. (Indication sur l'existence de la longueur réduite du pendule physique sans démonstration mathématique.) Horloge à pendule. Expérience de Foucault. Explication de cette expérience au pôle. Sur la propagation du mouvement pendulaire. Etude des ondes. Vibrations longitudinales et transversales. Longueur des ondes. Principe d'Huygens. Théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes d'après Huygens. Interférences. Ondes stationnaires (nœuds, ventres).

Le son. Sources du son. Conditions de la propagation des ondes sonores. Vitesse du son dans de différents milieux. Réflexion des ondes sonores. Interférences. Battements. Ondes stationnaires. Caractères du son. Intensité du son. Hauteur du son (sirènes). Principe de Doppler. Timbre. Analyse et synthèse du son (de la résonnance). Echelles musicales.

Vibrations des corps. Vibrations des barres (diapason). Vibrations des plaques (figures de Chladni). Lois des vibrations des cordes (expérimentalement). Vibrations des colonnes d'air (tuyaux à anches et flûtes). L'oreille et la trachée artère. Phonographe.

Lumière et énergie rayonnante en général. Propagation de la lumière. Vitesse de la lumière. Méthode de Rœmer et méthode de Fizeau. Couleur. Décomposition de la lumière blanche. Recherches de Newton. Analyse et synthèse de la lumière. Couleurs des corps. Parties ultra-violette et ultra-rouge du spectre et moyen de les déceler (Réactions photochimiques). Fluorescence. Application des méthodes électriques. Radiomètres.

Décomposition de la lumière blanche indépendamment de sa dispersion. Théorie ondulatoire de la lumière. Interférences de la lumière. Expérience de Young. Longueur de l'onde lumineuse. Rapport entre la couleur et la longueur de l'onde. Couleurs des couches minces, anneaux de Newton (sans formule mathématique).

Sous-divisions de l'optique en optique géométrique et optique physique. Dif-

ficulté de la définition du rayon lumineux. Phénomènes expliqués par la propagation rectiligne de la lumière : ombre, pénombre, images à l'aide de petites ouvertures (chambre obscure). Lois de la réflexion de la lumière. Diffusion de la lumière. Miroirs plans. Méthode de Poggendorff de la mesure des petits angles. Formule des miroirs. Discussion de la formule. Construction des images. Réfraction de la lumière. Coefficient de réfraction. Réflexion totale. Explication à l'aide de la réfraction et de la réflexion de la lumière de quelques phénomènes cosmiques : réfraction astronomique, mirages, arc-en-ciel (notions générales). Passage des rayons à travers une plaque aux plans parallèles. Prisme. Angle de la déviation minima (traiter comme fait expérimental). Réfraction de la lumière sur une surface sphérique. Lentilles. Formule des lentilles. Discussion de la formule. Construction des images (expliquant la théorie des lentilles très minces, admettre l'existence du centre optique comme une chose évidente). Défauts des lentilles. Aberration sphérique. Astigmatisme. Aberration chromatique. Instruments d'optique. Chambre noire. Photographie. Explication des procédés de la photographie. Idée de la photographie des couleurs. L'œil. Construction anatomique (vision). Accommodation des objets éloignés et rapprochés. Défauts de l'œil. Lunettes. Vision binoculaire. Stéréoscope. Quelques remarques sur la physiologie et la psychologie de la vue.

Loupe. Agrandissement. Microscope. Télescope. Caractères communs et différences. Construction. Formation des images. Agrandissement. Télescope terrestre. Lunette de Galilée. Lorgnettes prismatiques. Côté énergétique du rayonnement. Rayonnement de la chaleur (par incandescence et luminescence). Relation entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant de l'incandescence (Expérimentalement). Questions pratiques sur l'éclairage. Unité de l'intensité de la lumière. Eclairage. Comparaison des différentes sources de lumière. Photométrie. Spectres d'émission et d'absorption (spectres continu et linéaire). Mentions sur les spectres à bandes. Analyse spectrale et sa signification. Spectre solaire. Lignes de Fraunhofer. Constitution du soleil. Analyse spectrale d'autres corps célestes. Principe de Doppler. Mention sur les phénomènes de diffraction de la lumière. Les réseaux de diffraction. Notions sur la polarisation de la lumière. Polarisation par réflexion. Double réfraction. Polarisation par double réflexion. Spath d'Islande. Nicol. Rotation du plan de polarisation et application pratique de ce phénomène. Notions sur la théorie électromagnétique de la lumière. Idées de Faraday et de Maxwell. Expériences de Hertz. Ondes électromagnétiques, leur production, leur découverte et leurs propriétés ; leur application à la télégraphie sans fil.

Quelques mots de l'influence du champ magnétique. Sur les phénomènes lumineux. Polarisation rotatoire magnétique. Phénomène de Zeeman. Nouveaux genres de rayons. Rayons X. Rayons cathodiques. Corps radioactifs. Electrons.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

I. — RÉUNION DE MILAN

Nous rappelons ici les grandes lignes du programme dont nous avons déjà donné le détail dans le numéro de mai.

Lundi 18 septembre, à 9 h. du matin, séance du Comité central. 4 h. de l'après-midi, séance du Comité central avec les sous-commissions spéciales A et B.

Le soir à $8^1/_2$ h., réunion familière des participants.

Mardi 19 septembre, le matin à 9 h. et à 4 h. de l'après-midi, séances des délégués et des membres des sous-commissions nationales.

Le programme comprend, comme on sait :

1. La présentation des rapports élaborés par les sous-commissions nationales ; elle sera suivie d'une discussion.

2. La question des rapports à présenter au Congrès de Cambridge.

3. La discussion des deux questions suivantes mises à l'ordre du jour par le Comité central :

A. — *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des mathématiques ? — La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.*

B. — L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles.

Mercredi 20 septembre, le matin à 9 h., séance des délégués et des membres des sous-commissions nationales. Suite de la discussion.

A 4 h. de l'après-midi, *séance générale publique*, dont voici l'ordre du jour :

1. Allocution d'un représentant de l'Italie.

2. Allocution de M. le prof. F. Klein, président de la Commission.

3. Conférence de M. le prof. F. Enriques (Bologne), sur les Mathématiques et la Théorie de la connaissance.

Les séances ont lieu à l'Ecole polytechnique, place Cavour.

Jeudi 21 septembre. — La réunion sera suivie d'une excursion au Lac Majeur organisée par les soins du Comité local.

Les adhésions et demandes de renseignements doivent être adressées au secrétaire-général, M. H. Fehr, 110, Florissant, Genève.

II. — SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Allemagne. — *Berichte und Mitteilungen:* Le fascicule VI vient de paraître, il comprend la traduction en allemand, par M. W. Lietzmann, de la circulaire n° 4 (mars 1911) mise au point jusqu'en mai 1911 (14 p.).

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland: Deux nouveaux fascicules viennent de sortir de presse, ce qui porte à douze le nombre des fascicules parus. Ce sont : le 3e fasc. du 1er volume, sur les examens d'état et la préparation pratique des mathématiciens, par M. W. Lorey et le 3e fasc. du 3e volume, sur l'enseignement du dessin linéaire et de la géométrie descriptive, par M. P. Zühlke. En voici les titres :

I. *Band,* Heft 3. Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und einigen norddeutschen Staaten, von Prof. Dr. W. Lorey (118 p.).

III. *Band,* Heft 3. Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten; von Dr. P. Zühlke (92 p.).

France. — La Sous-Commission française vient de faire paraître un premier volume de ses rapports. C'est le Tome III, consacré à l'*enseignement supérieur* (123 p.), et publié sous la direction de M. A. de St-Germain. Il est édité par la maison Hachette. En voici le sommaire :

Aperçu général sur l'enseignement supérieur des Mathématiques, par M. A. de St-Germain.

Rapport sur l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, de la Mécanique rationnelle, de l'Astronomie et des Mathématiques générales dans les Facultés des Sciences en France, par M. E. Vessiot.

Rapport sur les Enseignements mathématiques d'ordre élevé dans les Facultés des Sciences des Universités françaises, par M. Emile Borel.

Faculté des Sciences de Paris : programme des Certificats d'études supérieures pour l'année 1911.

Rapport sur les Diplômes d'études supérieures de Sciences mathématiques, par M. A. de St-Germain.

Rapport sur l'Enseignement mathématique dans les Instituts techniques des Facultés des Sciences, par M. H. Vogt.

Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole normale supérieure et sur l'Agrégation des Sciences mathématiques, par M. Jules Tannery.

Note sur l'Enseignement mathématique au Collège de France, par M. A. de St-Germain.

Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique, par M. G. Humbert.

Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, par M. Maurice d'Ocagne.

Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole nationale supérieure des Mines, par M. René Garnier.

Rapport sur l'Enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Mines de Saint-Etienne, par M. M. Friedel.

Note sur l'Ecole d'application du Génie maritime, par M. A. Janet.

Hollande. — La Sous-Commission hollandaise publie l'ensemble de ses rapports en un volume, qui vient d'être distribué aux membres de la Commission internationale. Les rapports sont rédigés en français; en voici la liste :

L'Enseignement mathématique à l'école primaire.

L'Enseignement mathématique aux « Burgeravondscholen », écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques.

Ecoles de marine.

Ecole moyenne à trois années d'études.

Ecole moyenne à cinq années d'études.

Ecoles moyennes pour jeunes filles.

L'Enseignement mathématique aux Gymnases.

Les Universités.

Académie technique.

L'Enseignement mathématique aux Instituts militaires de l'armée de terre dans les Pays-Bas.

Ecole de Machinistes pour la Marine à Hellevœtsluis.

Institut Royal de Marine à Willemsoord.

Rapport complémentaire sur les propositions de la Commission d'Etat pour la réorganisation de l'enseignement, établie par Arrêté Royal du 21 mars 1903, nº 49.

Italie. — La Sous-Commission italienne vient de publier deux premiers fascicules de ses rapports. L'un traite du doctorat et de la préparation des candidats à l'enseignement, par M. S. Pincherle; l'autre des cours de mathématiques à l'université pour les étudiants de 1re année, par M. C. Somigliana.

Sugli studi per la laurea in Matematica e sulla sezione di Matematica delle Scuole di Magistero. — Relazione di S. Pincherle, Prof. nella R. Universita di Bologna (16 p.).

Intorno all'ordinamento degli Studi Matematici nel primo bienno universitario in Italia. — Relazione di C. Somigliana, Prof. nella R. Universita di Torino (11 p.).

Russie. — La Délégation russe nous adresse deux nouveaux fascicules contenant chacun deux rapports, rédigés en français.

1. L'Enseignement mathématique dans les Ecoles primaires et les Ecoles normales, par M. S..., ancien directeur d'Ecole d'instituteurs (24 p.).

2. L'Enseignement mathématique dans les Gymnases du Ministère de l'Instruction Publique et dans les Instituts de jeunes filles du ressort des établissements de l'Impératrice Marie, par M. Kondratiev, directeur du 8e Gymnase de St-Pétersbourg (5 p.).

1. L'Enseignement des Mathématiques dans les corps de cadets, par M. Poprugenko, lieutenant-général attaché à la Direction générale des Ecoles militaires (16 p.).

2. Notice sur les cours pour la préparation des maîtres des corps de cadets, par Z. Makchéev, directeur du Musée pédagogique des Ecoles militaires à St-Pétersbourg (4 p.).

Ve Congrès international des Mathématiciens.

Nous venons de recevoir, en date du 5 juillet, la première circulaire concernant le Congrès international des mathématiciens. Ainsi que nous l'avons annoncé en mai, le Congrès aura lieu à *Cambridge*, du 22 au 28 août 1912. Le Comité d'organisation est composé de MM. G.-H. Darwin, Président; J. Larmor, Trésorier; E.-W. Hobson et A.-E.-H. Love, Secrétaires; H.-F. Baker et A. Berry.

On prévoit une série de conférences destinées à donner une idée de l'état actuel des principales branches mathématiques et de leurs applications. Elles seront faites par MM. E. Borel, E.-W. Brown, A. Kneser, E.-G.-H. Landau, J. Larmor, Sir W. White. Les sujets seront indiqués ultérieurement.

Les travaux seront répartis sur quatre sections :

I. Arithmétique, Algèbre, Analyse. — II. Géométrie. — III. Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées. — IV. Questions philosophiques, historiques et didactiques.

La carte de membre est de 1 L. ; elle donne droit au volume des comptes rendus. Les personnes qui accompagnent un membre du Congrès auront les mêmes avantages (sauf le volume des comptes rendus), moyennant une carte de 12 Sh.

Pour tous les renseignements concernant le Congrès, s'adresser au Secrétaire-général, Prof. E.-W. Hobson, Christ's College, Cambridge, Angleterre.

Le Congrès sera placé sous les auspices d'un Comité international. La circulaire donne une première liste de noms qu'il y aurait lieu de compléter afin que tous les pays qui prennent une part active aux congrès internationaux des mathématiciens soient représentés dans ce Comité.

Universités allemandes. — Thèses de doctorat ; 1909-1910.

Le *Bulletin of the American mathem. Society* publie la liste des thèses de mathématiques acceptées par les universités allemandes pendant l'année scolaire 1909-1910. D'après ses indications, les thèses se répartissent comme suit :

Berlin 0, Bonn 0, Breslau 3, Erlangen 3, Fribourg-i-B. 0, Giessen 1, Göttingue 7, Greifswald 1, Halle-a-S. 2, Heidelberg 1, Jena 0, Kiel 1, Königsberg-i-Pr. 2, Leipzig 2, Marbourg 0, Munich 3, Munster 1, Rostock 3, Strasbourg-i-E. 6, Tubingue 1, Wurzbourg 1. En voici les titres :

Breslau. — R. Dittrich, Abstandsörter im Polarraume. — E. Juretzka, Die Entwickelung unstetiger Funktionen nach den Eigenfunktionen des schwingenden Stabes auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. — Nelly Neumann, Ueber das Flächennetz 2. Ordnung und seine Korrelative Beziehung auf einen Strahlenbündel.

Erlangen. — R. Baldus, Ueber Strahlensysteme, welche unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten. — C. Gerstenmeier, Beiträge zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit 4 und 5 singulären Stellen. — A. Geus, Die eindeutigen Transformationen der ebenen Kurve dritter Ordnung in sich, invarianten- und funktionentheoretisch behandelt.

Giessen. — H. Wehrheim, Ueber das kombinatorische Produkt dreier Kollineationen in der Ebene.

Gœttingue. — L. Bieberbach, Zur Theorie der automorphen Funktionen. — R. Courant, Ueber die Anwendung des Dirichletschen Prinzipes auf die Probleme der konformen Abbildung. — E. Freundlich, Analytische Funktionen mit beliebig vorgeschriebenem unendlich-blättrigem Existenzbereiche. — M. Jæger, Graphische Integrationen in der Hydrodynamik. — Grete Kahn, Eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten algebraischer Kurven. — Klara Löbenstein, Ueber den Satz, dass eine ebene, algebraische Kurve 6. Ordnung mit 11 sich einander ausschliessenden Ovalen nicht existiert. — A. Wink, Ueber die Diskontinuitätsbereiche der Gruppen aus linearen nicht infinitesimalen Substitutionen.

Greifswald. — Th. Beyer, Die Integrationen der simultanen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Halle. — P. Lehmann, Beiträge zur Theorie der Darstellung der stetigen Funktionen durch Reihen von ganzen rationalen Funktionen. — E. Rœser, Die Verfolgungskurve auf der Kugel.

Heidelberg. — J. Carlebach, Lewi ben Gerson als Mathematiker.

Kiel. — W. Koch, Beiträge zur affinen Geometrie der Flächen zweiten Grades.

Königsberg. — W. Gædecke, Die inversen Flächen der Mittelpunktsflächen 2. Ordnung. — E. Schimanski, Die algebraischen Invarianten der projektiven Gruppen der Ebene und die geometrische Charakterisierung dieser Gruppen.

Leipzig. — H. Alberti, Die Grundlagen des Systems Spinozas im Lichte der kritischen Philosophie und der modernen Mathematik. — W. Feyer, Ueber die Höldersche Funktion

$$Fu = e^u \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{1} \left\{ (1 - u/n)^n \cdot e^{u + \frac{1}{2} u^2/n} \right\}$$

und einige verwandte Transzendente.

Munich. — Ch.-H. Ashton, Die Heineschen O-Funktionen und ihre Anwendungen auf die elliptischen Funktionen. — A. Læhrl, Ueber konforme und äquilonge Transformationen im Raum. Ein Beitrag zur Geometrie der Kugeln. — A. Rosental, Untersuchungen über gleichflächige Polyeder.

Munster. — F. Ferrari, die geometrische Lösung der Aufgaben dritten und vierten Grades mittels des Lineals und einer festen Kurve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt oder reellem Doppelpunkte.

Rostock. — W. Düker, Ueber Beziehungen der Strahlenkomplexe zweiten Grades zu den Flächen zweiter Ordnung. — C. Nadler, Ueber den Zusammenhang der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies mit ihrem Polartetraeder. — H. Wolff, Behandlung des Vorganges, dass eine ebene elektromagnetische Welle, die auf die ebene Oberfläche eines Körpers, insbesondere eines Leiters auftrifft, von diesem reflektiert wird, auf Grund der Maxwellschen Gleichungen unter ausführlichem Eingehen auf die Art der stattfindenden Energiefortpflanzung.

Strassbourg. — Wanda Braun, Bestimmung der Körperdiskriminante in einem kubischen Zahlkörper. — R. Burgwedel, Ueber die Eulerschen und Gaussschen Methoden der Primzahlbestimmung. — L. Girod, Das sphärische Analogon der Hypocykloïdenbewegung des Cardanus und sein Zusammenhang mit der Theorie eines verallgemeinerten Hookeschen Gelenkes. — A. Kiefer, Die Einführung der homogenen Koordinaten durch K.-W. Feuerbach. — H. Plate, Punktausgleichung und Fehlerbestimmung noch graphischen Methoden in ihrer Anwendung auf Ortsbestimmung durch Standlinien. — O. Stampfli, Der Zweiteilungskörper der elliptischen Funktionen.

Tubingue. — F. Blum, Die infinitesimale Biegung von Flächen bei vollständiger Starrheit eines Kurvensystems.

Wurzbourg. — G. Gräbner, Algebraische Bertrand-Kurven und algebraische Kurven konstanter Torsion.

Dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* M. le Prof. Gutzmer fait remarquer que cette liste est sans doute incomplète et qu'il y aurait lieu d'ajouter, pour l'Université de *Halle :* E. Görges, Die Zusammensetzung der Kräfte. — K. Krienelke, J.-H. Lamberts Philosophie der Mathematik.

Bien que ces travaux soient plutôt de nature philosophique, ils doivent être attribués aux mathématiques au même titre que celui de Alberti (Leipzig).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — *Université de Gœttingue.* Les mathématiques seront bientôt dotées d'un institut spécial. Les fonds destinés à la construction du bâtiment se montent déjà à 200,000 Mk. ; la Société de mathématiques et de physique appliquées de Gœttingue a donné 100,000 Mk. et deux grandes usines ont souscrit chacune pour 50,000 Mk.

— M. F. Bernstein, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire à l'Université de Gœttingue.

M. G. Cantor, de l'Université de Halle, a été nommé membre correspondant de l'Institut royal de Venise.

M. E. Schmidt, professeur à l'Université d'Erlangen, a accepté un appel à l'Université de Breslau.

Autriche. — M. Laska a été nommé professeur à l'Université bohême de Prague.

Belgique. — *Manifestation en l'honneur de M. le professeur J. Neuberg.* — Ainsi que nous l'avons annoncé, M. J. Neuberg a pris sa retraite et vient d'être nommé professeur émérite de l'Université de Liège. A cette occasion il s'est constitué un comité en vue d'organiser une manifestation en l'honneur du savant mathématicien. Ce comité vient de lancer une circulaire dont voici le principal passage :

« Un des Maîtres les plus distingués de l'Université de Liège, M. J. Neuberg, vient d'être promu à l'éméritat.

« Pendant près d'un demi-siècle, il s'est consacré avec un rare dévouement à l'enseignement des Mathématiques ; ses travaux de Géométrie lui ont acquis une réputation enviable parmi les mathématiciens de toutes les nations.

« Membre de l'Académie Royale de Belgique depuis 1891, il est directeur de la classe des Sciences pour la période actuelle ; directeur de la revue *Mathesis,* il a rendu les plus grands services à la

science et à l'enseignement des Mathématiques; membre du Conseil de Perfectionnement de l'Enseignement moyen et président des Jurys des Sections normales moyennes, il a eu une heureuse influence sur la formation des professeurs en Belgique.

« Par ses belles leçons, tant à l'Athénée qu'à l'Université, il a su inspirer le goût des mathématiques aux générations d'ingénieurs qui se sont succédé pendant plus d'un quart de siècle, et il est peu de professeurs qui se soient, autant que lui, concilié l'estime et l'admiration de leurs auditeurs.

« C'est pourquoi un groupe d'élèves, d'anciens élèves et d'amis a pensé qu'il convenait de faire appel à tous ceux qui profitèrent de ses leçons ou de ses conseils, comme à ceux qui ont pu l'apprécier dans les différents domaines de son activité scientifique ou professorale, afin d'offrir à M. J. Neuberg son portrait et une adresse contenant les noms des souscripteurs.

« La souscription minima est fixée à dix francs; chacun des souscripteurs recevra un portrait du jubilaire et un *Liber Memorialis* en souvenir de la cérémonie. »

Les souscriptions sont reçues auprès de M. Ed. Barbette, Directeur de l'Institut Franken, 18, rue Darchis, Liège.

France. — *Jubilé Darboux.* — « Cette année, l'un des plus éminents géomètres de notre époque, M. Gaston Darboux, aura accompli sa cinquantième année de services dans l'enseignement public : depuis plus de vingt-cinq ans, il est membre de l'Académie des sciences, depuis dix ans il en est le Secrétaire perpétuel.

« Sa vie tout entière a été consacrée à la science et à l'enseignement. Ses beaux travaux d'analyse mathématique, de mécanique rationnelle, de géométrie infinitésimale l'ont placé au premier rang des savants de tous les pays. Par ses ouvrages, par ses cours à la Sorbonne, par ses conférences à l'Ecole normale supérieure et à l'Ecole normale de jeunes filles de Sèvres, il est devenu le maître aimé et admiré d'un grand nombre de mathématiciens de nationalités diverses, et de la plupart des professeurs de mathématiques de France. Dans ses fonctions de doyen à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, de membre et de vice-président du Conseil supérieur de l'Instruction publique, il a rendu les plus grands services à l'enseignement dans tous ses degrés.

« C'est pourquoi un groupe d'élèves, d'admirateurs et d'amis de M. Gaston Darboux croit devoir faire appel à ceux qui ont étudié ses ouvrages ou suivi ses leçons, comme à ceux qui ont pu apprécier sa bienveillante influence dans l'ordre scientifique ou dans l'ordre administratif, pour lui offrir à l'occasion de ses noces d'or universitaires et de ses noces d'argent académiques, une médaille reproduisant son effigie, avec une adresse portant les signatures des souscripteurs. »

Les adhésions et les souscriptions sont reçues auprès de M. Gu-

CHARD, professeur à la Sorbonne, au secrétariat de la Faculté des Sciences, Sorbonne, Paris.

Une souscription de vingt-cinq francs donne droit à une médaille de bronze, et une souscription de cinquante francs à une médaille d'argent, réductions de celle qui sera offerte à M. Darboux. Le Comité espère envoyer à tous les souscripteurs, quel que soit le montant de leur souscription, un exemplaire de la brochure commémorative.

— M. COSSERAT, directeur de l'Observatoire de Toulouse, a été nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences, en remplacement de M. Ch. Méray, décédé.

M. HENNEQUIN est chargé des conférences de mathématiques à la Faculté des Sciences de Caen.

M. LATTÉS, chargé de cours, est nommé professeur de Mécanique rationnelle à l'Université de Toulouse.

Etats-Unis. — *Columbia University.* M. J. HADAMARD, professeur au Collège de France, donnera des cours en octobre et novembre prochain sur les sujets suivants : Calcul des variations (mardi et jeudi de 4 h. à 6 h.). — Equations aux dérivées partielles de la physique (mercredi et vendredi de 4 h. à 6 h.). — En outre quatre conférences ayant pour objet : Des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires par les conditions aux limites ; Applications récentes de certaines théories mathématiques à des problèmes physiques ; Analysis situs ; Solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles et fonctions de Green (samedi de 10 h. $^1/_2$ à midi $^1/_2$). Toutes les personnes s'intéressant aux mathématiques seront admises aux conférences du samedi.

Hongrie. — M. FEJÉR, professeur à l'Université de Klausenbourg, a été nommé professeur à l'Université de Budapest.

Italie. — M. LEVI-CIVITA, professeur à l'Université de Padoue, a été nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.

M. F. D'ARCAIS, professeur à l'Université de Padoue, a été nommé membre ordinaire du Reale Institut Veneto.

M. D. MONTESANO, professeur à l'Université de Naples, a été nommé membre ordinaire de l'Académie royale des Sciences de la même ville.

M. V. VOLTERRA, professeur à l'Université de Rome, a été élu associé étranger de la National Academy of Sciences de Washington.

Russie. — *Ecole russe de Paris.* — Le gouvernement russe a décidé d'envoyer à Paris, avec une bourse de 5000 fr., une vingtaine d'étudiants russes qui, pendant trois ans, poursuivront leurs études de droit et de mathématiques. Ces pensionnaires forme-

ront l'Ecole russe de Paris, à l'instar de l'Ecole française d'Athènes. Ils participeront ensuite à l'enseignement donné dans les universités russes. La *Revue scientifique,* à laquelle nous empruntons ces renseignements, ajoute une statistique qui montre l'importance de la colonie russe à l'Université de Paris : en 1910, on compte 1635 étudiants russes, dont 301 en sciences; en 1911, 1555 étudiants russes dont 256 en sciences.

Suède. — La 2e *Réunion des mathématiciens scandinaves* aura lieu à Copenhague, du 28 au 31 août prochain.

Suisse. — M. Michel Plancherel, privat-docent à l'Université de Genève, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Fribourg.

Nécrologie.

R. Bonola. — Nous avons le regret d'apprendre la mort de M. R. Bonola, survenue à Bologne le 16 mai dernier. Agé de 36 ans seulement, il venait d'être nommé professeur de mathématiques à l'Ecole normale supérieure de jeunes filles de Rome.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Année universitaire 1911-1912.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University (New-York). — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 3 h.; The principles of mathematics, 3 h. — Prof. T. S. Fiske : Advanced calculus, introduction to the theory of functions of a real variable, 3 h.; Theory of functions of a complex variable, 3 h. — Prof. F. N. Cole : Theory of Groups, 3 h.; Theory of invariants, 3 h. — Prof. James Maclay : Higher algebra, 3 h.; Elliptic functions, 3 h. — Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 3 h. — Prof. Edward Kasner : Differential equations, 3 h., second half year : Dynamical geometry, 3 h. — Dr N. J. Lennes : General theory of assemblages, 3 h.

The mathematical colloquium will meet at intervals of about two weeks.

M. J. Hadamard, professeur au Collège de France, donnera une série de conférences en octobre et en novembre 1911 (voir p. 328 de ce fascicule, *Réd.*).

Cornell University (Ithaca, New-York). — Prof. J. McMahon : Mathematical physics, 3 h. — Prof. J. H. Tanner : Teachers' course, 3 h. — Prof. J. I. Hutchinson : Elliptic functions, 3 h. — Prof. V. Snyder : Projective geometry, 3 h. — Prof. F. R. Sharpe : Mechanics, 3 h. — Prof. W. B. Carver : Theory of numbers, 3 h. (first term) ; Conjugate coordinates, 3 h. (second term). — Dr D. C. Gillespie : Theory of functions of a real variable, 3 h. — Dr C. F. Craig : Algebraic curves, 3 h. — Dr F. W. Owens : Differential equations, 2 h. — Dr J. V. McKelvey : Analytic geometry, 3 h. — Dr L. L. Silverman : Infinite series, 3 h. (first term) ; Algebra, 3 h. (second term). — Dr W. A. Hurwitz : Differential equations of mathematical physics, 3 h. — Dr E. J. Miles : Advanced calculus, 3 h.

Johns Hopkins University (Baltimore). — Prof. F. Morley : Higher geometry, 3 h. ; Theory of functions, 2 h. ; Vector analysis, 2 h. — Prof. A. B. Coble : Theory of Groups, 3 h. ; Theory of correspondences, 3 h. — Dr A. Cohen : Elementary theory of functions 3 h. ; Differential equations, 2 h. ; Differential geometry, 2 h.

University of Illinois (Urbana). — Prof. E. J. Townsend : Theory of functions of a complex variable, 3 h. ; Seminar in special topics in the theory of functions. — Prof. S. W. Shattuck : Differential equations and calculus of variations, 3 h. — Prof. G. A. Miller : Theory of numbers, 3 h. — Prof. H. L. Rietz : Theory of statistics, 3 h. — Prof. C. H. Sisam : Solid analytic geometry, 3 h. — Prof. J. B. Shaw : Theory of potential and related functions, 3 h. ; Seminar course in general algebra. — Prof. A. Emch : Projective geometry, 3 h. — Dr A. R. Crathorne : Theory of functions of a real variable, 3 h. — Dr R. L. Börger : Invariants and higher plane curves, 3 h. Dr E. B. Lytle : Teachers course in mathematics, 2 h. (second semester).

Indiana University (Bloomington). — Prof. S. C. Davisson : Theory of functions, 3 h. *(a, w, s)*. — Prof. D. A. Rothrock : Contact transformations, 2 h. *(a, w)*; Differential equations, 3 h. *(a, w)*; Fourier series, 3 h. *(s)*. — Prof. U. S. Hanna : Elliptic functions, 2 h. *(a, w, s)*; Advanced calculus, 3 h. *(a, w, s)*. — Prof. R. D. Carmichael : Linear differential equations, 3 h. *(a, w, s)*: Difference equations, 3 h. *(a, w, s)*. *(a, w, s* = autumn, winter, spring).

Princeton University. — Prof. H. B. Fine : Theory of elimination, 3 h. (first term). — Prof. H. D. Thompson : Infinitesimal geometry, 3 h. ; Coordinate geometry, 3 h. — Prof. L. P. Eisenhart : Mechanics, 3 h. ; Partial differential equations, 3 h. (first term) ; Vector analysis, 3 h. (second term). — Prof. O. Veblen : Projective geometry, 3 h. ; Theory of functions of real variables, 3 h. — Prof. G. D. Birkhoff : Analysis, 3 h. ; Linear differential equations, 3 h. — Prof. W. Gillespie : Theory of substitutions, 3 h. (first term). — Prof. J. G. Hun : Analytic projective geometry, 3 h. (second term). — Prof. E. Swift : Differential equations, 3 h. ; Calculus of variations, 3 h. (second term). — Prof. J. H. McL. Wedderburn : Theory of functions of a complex variable, 3 h. — Prof. O. Veblen : Seminar in geometric group theory, both terms. — Prof. G. D. Birkhoff : Seminar in linear difference equations, both terms. — Prof. E. P. Adams : Analytic mechanics, 3 h.

Yale University (New-Haven, Conn.). — Prof. J. Pierpont : Theory of functions of a complex variable, 2 h. ; Modern analtyic geometry, 2 h. ; Advanced differential equations, 2 h. ; Theory of numbers, 2 h. — Prof. P. F.

SMITH : Differential geometry, 2 h.; Geometric analysis, 1 h. — Prof. E. W. BROWN : Mechanics, 2 h.; Advanced calculus, 3 h.; Celestial mechanics, 2 h. — Prof. W. R. LONGLEY : Calculus of variations, 2 h. — Dr H. F. MACNEISH : Differential equations, 1 h. — Dr G. M. CONWELL : Foundations of geometry, 2 h. — Dr G. F. GUNDELFINGER : Analytic geometry, 2 h. — Dr D. D. LEIB : Transformations of space, 2 h. — Dr H. H. MITCHELL : Advanced algebra, 2 h. — Mr. W. A. WILSON : Theory of functions of a real variable, 2 h.

ITALIE [1]

Bologna; *Università.* — ARZELA : Matematiche superiori[2], 3. — BURGATTI : Dinamica dei corpi rigidi con applicazione al moto dei pianeti; Equilibrio di una massa fluida ruotante, 3. — DONATI : Esposizione comparativa delle varie teorie elettromagnetiche e delle recenti ricerche sul principio di relatività, 3. — PINCHERLE : Teoria delle funzioni analitiche; Equazioni differenziali lineari, 3. — SCARPIS : Gruppi di operazioni e loro applicazioni alla teoria dei numeri, 3.

Catania; *Università.* — DE FRANCHIS : Cenni di geometria sulle curve e superficie algebriche e sugli integrali relativi; Superficie iperellittiche, 4. — PENNACCHIETTI : Dinamica dei corpi solidi; Meccanica dei corpi deformabili, 4. — SEVERINI : Equazioni integrali e loro applicazioni all'analisi, 4. — N. N. : Fisica matematica, 4.

Genova; *Università.* — LEVI : Teoria elementare delle funzioni di una e più variabili complesse; Problema dell'uniformizzazione delle funzioni polidrome, 4. — LORIA : Curve e superficie algebriche e trascendenti, 3. — TEDONE : Metodi d'integrazione di Riemann-Volterra ed applicazione alla soluzione di problemi con condizioni al contorno, 3.

Napoli; *Università.* — AMODEO : Storia delle matematiche nell'evo medio (secoli XIII-XVI), 3. — DEL RE : Analisi di Grassmann ad n dimensioni, con applicazioni alla Geometria ed alla Meccanica degli spazi a curvatura costante, 4 1/2. — MARCOLONGO : Applicazione dei metodi delle omografie vettoriali a questioni di idrodinamica teorica, 3. — MONTESANO : Teoria generale delle superficie algebriche; Superficie di 3° e 4° ordine, 4 1/2. — PASCAL : Capitoli scelti di analisi superiore, 3. — PINTO : Elettrostatica, 4 1/2 — TORELLI : Teoria analitica dei numeri (seconda parte), 3.

Padova; *Università.* — D'ARCAIS : Teoria generale delle funzioni; Funzioni ellittiche, 4. — CISOTTI : Teoria matematica dell'elasticità con applicazioni tecniche, 3. — GAZZANIGA : Teoria dei numeri, 3. — LEVI-CIVITA : Teoria delle onde nei suoi differenti aspetti, 4 1/2. — RICCI : Metodi di calcolo differenziale assoluto, Teoria del potenziale, 4. — SEVERI : Teoria delle funzioni algebriche di due variabili e dei loro integrali (seconda parte), 4. — VERONESE : Fondamenti di geometria (seconda parte), 4.

---

[1] Les cours généraux (tels que ceux d'Analyse algébrique et infinitésimale, de Géométrie analytique, projective, descriptive, Mécanique rationnelle, Géodésie) ne sont pas indiqués dans la liste.

[2] Une indication plus précise fait défaut à cause de l'état de santé de M. Arzela. Nous lui souhaitons prompte guérison.

Palermo ; *Università*. — BAGNERA : Teoria generale delle funzioni analitiche ; Funzioni algebriche di una variabile, 3. — GEBBIA : Elasticità ; Teoria ondulatoria della luce. 4 1/2. — GUCCIA : Teoria generale delle curve e delle superficie algebriche, 4 1/2. — VENTURI : Forma dei pianeti con speciale riguardo alla terra ; teorie di Pratt, di Stokes, di Helmert ; isostasi ; maree della scorza ; gravità, 3.

Pavia ; *Università*. — BERZOLARI : Trasformazioni birazionali nel piano e nello spazio, 3. — GERBALDI : Generalità sulle funzioni di variabile complessa ; Funzioni ellittiche, 3. — VIVANTI : Calcolo delle variazioni ; Equazioni integrali, 3. — N. N. Fisica matematica, 3.

Pisa ; *Università*. — BERTINI : Geometria sopra una superficie (seconda parte), 3. — BIANCHI : Teoria aritmetica delle forme quadratiche (binarie e ternarie) ; Principii di aritmetica analitica ; Aritmetica dei corpi algebrici, 4 1/2. — DINI : Funzioni sferiche e cilindriche, 4 1/2. — MAGGI : Equilibrio e movimento dei corpi elastici ; Applicazione alla teoria dei fenomeni luminosi, 4 1/2. — PIZZETTI : Principii di astronomia sferica ; Determinazione delle orbite planetarie ; Teoria meccanica della precessione e della nutazione ; Teoria delle maree, 4 1/2.

Roma ; *Università*. — BISCONCINI : Studio differenziale delle curve e delle superficie, 3. — CASTELNUOVO : Geometria differenziale, 3. — LAURICELLA : Problemi al contorno, 3. — ORLANDO : Elementi fisico-matematici della navigazione aerea, 3. — SILBERSTEIN : Fondamenti di termodinamica ; Elettromagnetismo ed ottica ; Meccanica e principio di relatività, 3. — VOLTERRA : Ottica, 3. — Applicazione della meccanica teorica a questioni geofisiche, 3.

Torino ; *Università*. — BOGGIO : Figure d'equilibrio di masse fluide ruotanti, 3. — FUBINI : Teoria delle equazioni a derivate parziali nel campo reale e nel campo complesso ; Problemi di Cauchy ; Problemi al contorno, 3. — SANNIA : Applicazioni geometriche della teoria delle forme algebriche, 1. — SEGRE : Gruppi continui di trasformazioni, 3. — SOMIGLIANA : Teoria della propagazione del calore ; Termodinamica, 3.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales [1].

(4e article.)

AUTRICHE

Les mathémathiques dans les gymnases [2].

On sait que de nouveaux plans d'études ont été adoptés en Autriche pour les trois types d'établissements secondaires supérieurs : gymnases, gymnases réaux et écoles réales. Ils tiennent compte, dans une large mesure, des réformes qui ont été proposées au cours des dix dernières années. Ces pro-

[1] Voir l'*Ens. math.* du 15 janvier, du 15 mars et du 15 mai 1911.

[2] *Der mathematische Unterricht an den Gymnasien*, von Dr Erw. DINTZL. — Berichte über den mathem. Unterricht in Oesterreich, Heft 3 (78 p.), Hölder. Wien, 1910.

grammes sont entrés en vigueur dès l'année scolaire 1909-10 dans les classes inférieures. Dans son numéro de juillet 1910 *L'Enseignement mathématique* (p. 326-341)) a reproduit entièrement, avec les observations qui l'accompagne, le programme des écoles réales, en le faisant suivre d'un aperçu du rapport que la sous-commission autrichienne consacre à ces écoles.

Les nouveaux plans d'études ne présentent que peu de différences pour les trois types d'établissements. Nous pouvons donc nous borner à signaler très brièvement l'intéressant rapport de M. Dintzl sur les gymnases autrichiens.

Dans la *I*re *partie* il examine d'abord la situation qui est faite aux mathématiques par rapport aux autres branches. Le gymnase comprend huit années d'études ; l'âge d'admission est de 10 ans révolus pour la classe inférieure et l'âge moyen de sortie (obtention du certificat de maturité) de 19,7 (en 1907-08). Dans chaque année il est consacré 3 heures par semaine aux mathématiques, sauf pendant la dernière année (2 h.). On estime avec raison que ce temps est insuffisant.

L'auteur établit ensuite un parallèle entre le plan d'études de 1900 et celui de 1909. Tandis que depuis près de 60 ans on avait suivi le principe de deux cycles d'études (le cycle propédeutique et le cycle de l'exposé plus systématique) le nouveau plan d'études cherche à adapter les programmes encore plus étroitement au développement des élèves en instituant trois cycles. Le cycle propédeutique dure trois ans, puis vient un cycle intermédiaire de deux ans formant un acheminement à l'étude plus systématique qui embrasse les trois dernières années.

Dans la 2me *partie*, M. Dintzl passe en revue le programme des différentes branches en l'accompagnant de renseignements et d'observations qui seront lus avec beaucoup d'intérêt par les professeurs de l'enseignement secondaire. Nous terminerons en reproduisant le sommaire de ce rapport :

I. Allgemeiner Teil. — 1. Die äussere Stellung der Mathematik als Unterrichtsgegenstand am österreichischen Gymnasium. (Fragen der Gesamtorganisation; Verhältnis zu den übrigen Lehrfächern ; Stundenzhal ; Prüfungen ; Lehrbefähigung der Mathematiklehrer). — 2. Die Lehrpläne aus den Jahren 1900 und 1909. — Die gegenwärtigen Ziele des mathematischen Unterrichtes. — 4. Allgemeine methodische Bemerkungen.

II. Besonderer Teil. — *A. Arithmetik und Algebra.* — 5. Der Rechenunterricht auf der Unterstufe. — 6. Die arithmetischen Grundoperationen der ersten, sweiten und dritten Stufe und der Zahlbegriff. — 7. Die algebraischen Probleme des Unterrichtes. — 8. Zahlentheoretische Fragen. — 9. Numerisches Rechnen.

B. Geometrie. — 10. Der propaedeutische Unterricht in der Geometrie auf der Unterstufe. — 11. Planimetrie auf der Mittelstufe. — 12. Stereometrie auf der Mittelstufe. Darstellende Geometrie. — 13. Trigonometrie.

C. Analysis. — 14. Analytische Geometrie. — 15. Der Funktionsbegriff. — 16. Differential- und Integralrechnung.

D. Angewandte Mathematik, Geschichte der Mathematik. — 17. Die Anwendungen der Mathematik im Unterrichte. — 18. Das historische Moment im Unterrichte.

Anhang. — Stundenübersicht. — Auszug aus dem Lehrplane für Mathematik vom Jahre 1909. — Literaturverzeichnis.

RUSSIE

Écoles réales.

Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen[1], von K. W. Vogt. — Fondées en 1872, les écoles réales russses n'avaient, à l'origine, pour but que l'enseignement conforme aux exigences de l'instruction pratique et technique.

Mais, peu à peu, leurs plans d'études se sont transformés, et, actuellement, presque toutes les écoles réales de Russie comprennent 7 classes et préparent non seulement les élèves pour les écoles supérieures techniques, mais aussi les futurs étudiants de la Faculté physique-mathématique de l'Université. Au reste, les autres Facultés de l'Université sont accessibles aux élèves ayant suivi l'école réale, après un examen complémentaire de latin.

L'enseignement mathématique, à l'école réale, embrasse l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie. Depuis 1906, des éléments de géométrie analytique plane et de calcul infinitésimal sont enseignés dans la 7me classe (classe complémentaire).

Le nombre d'heures consacrées à l'enseignement mathématique est, par semaine :

Classe préparatoire (arithmétique), 6 heures.

Classes I et II (arithmétique), III (arithmétique et algèbre), chaque classe : 4 heures.

Classe IV (algèbre, géométrie, dessin géométrique), 7 heures.

» V (algèbre, géométrie), 6 heures.

» VI (algèbre, géométrie, trigonométrie), 8 heures.

» VII, classe complémentaire (arithmétique, algèbre, trigonométrie, géométrie analytique, calcul infinitésimal), 5 heures.

M. Vogt donne ensuite un aperçu du champ des études mathématiques à l'école réale, y compris la section commerciale.

Remarquons, en passant, que les opérations sur les nombres complexes font partie du programme d'algèbre de la 7me classe.

M. Vogt indique également l'organisation des examens dans ces écoles.

A propos de la méthode et des manuels d'enseignement en usage, l'auteur remarque que, dans les classes inférieures, la méthode intuitive est prépondérante ; les règles arithmétiques sont expliquées par des exemples, les démonstrations étant laissées de côté au moins jusqu'à la 3me classe, où la méthode déductive commence à être appliquée. On réserve cependant pour la dernière classe certaines démonstrations telles que celles se rapportant à la divisibilité.

L'algèbre, introduite dès la 3me classe, n'est, au début, qu'une généralisation de l'arithmétique au moyen d'exercices. Par exemple, la notion de nombre négatif est amenée par la généralisation de la soustraction à tous les cas, celle de nombre irrationnel par l'extraction de la racine carrée, ainsi que celle de limite.

Dans la 3me classe, la résolution des équations est limitée aux équations numériques du 1er degré à une inconnue, les équations littérales n'étant abordées que dans la 4me classe.

---

[1] Résumé par Mlle R. Masson (Genève).

L'enseignement de la 7me classe reprend les notions déjà acquises pour les compléter et les généraliser.

L'étude de la géométrie est purement systématique dès le début (4me classe), l'intuition, dans ce domaine, étant laissée pour la leçon de dessin.

Le but de l'enseignement géométrique est, d'après le plan d'études, « l'acquisition systématique des vérités géométriques et des méthodes de démonstration des principes géométriques ».

Les manuels de géométrie employés s'éloignent peu de la méthode de Legendre et ne semblent pas avoir subi l'influence des méthodes de la géométrie moderne.

Les notions de coordonnées et de fonctions ne sont encore introduites que dans la 7me classe, par les éléments de géométrie analytique et de calcul infinitésimal.

Au sujet de la préparation des maîtres, M. Vogt note que l'on exige d'eux des études universitaires. Etudes purement scientifiques, qui ne leur donnent aucune préparation pédagogique ; pour remédier à cette lacune, il a été organisé, depuis 1909, des cours d'une année en vue de la préparation des maîtres de gymnase et d'école réale. Les candidats à l'enseignement ayant achevé leurs études universitaires y reçoivent un enseignement pédagogique et pratique.

L'enseignement théorique consiste en conférences sur la logique, la psychologie, la pédagogie et l'histoire de la pédagogie. L'enseignement spécial, pour chaque branche, se donne dans une école moyenne (gymnase ou école réale), sous la direction d'un maître expérimenté, entre autres sous forme de leçons d'épreuve et de remplacements de maîtres absents.

Universités et Ecoles techniques supérieures.

L'enseignement mathématique dans les Universités, les Ecoles techniques supérieures et quelques unes des Ecoles militaires de Russie, par E. Posse[1]. — Dans la 1re partie, l'auteur examine les Universités russes, dont la première a été fondée, à Moscou, en 1755.

Sont venues ensuite :

2. L'Université de Juriew (ci-devant Dorpat), en 1802,
3. » » Kazan, en 1804,
4. » » Kharkow, en 1805.
5. » » St-Pétersbourg, en 1819,
6. » » *St-Wladimir*, à Kiew, en 1834,
7. » » *la Nouvelle Russie*, à Odessa, en 1865,
8. » » Varsovie, en 1869.
9. » » Tomsk, en 1888,
10. » » Saratow, en 1909.

« Les deux dernières n'ont pas encore de Facultés physico-mathématiques, et il n'y est pas donné d'enseignement mathématique. L'Université de Varsovie, après sa clôture temporaire, en 1905, n'est pas encore reconstituée en entier, et ne fonctionne maintenant qu'avec les quatre premiers semestres, un nombre incomplet de professeurs et un plan d'études réduit

« Dans toutes les Universités russes, la Faculté physico-mathématique se

[1] Un fasc. de 100 p. ; Imprimerie Trenké et Fusnot, St-Pétersbourg.

compose de deux sections : Section des sciences mathématiques et Section des sciences naturelles.

« A l'exception d'un Cours général de physique et d'un Cours général de chimie, professés pendant une année communément aux étudiants de l'une et de l'autre section, toutes les autres matières de ces deux sections sont différentes.

« Dans les Universités de Moscou, de St-Pétersbourg, de Kiew, de Kharkow, d'Odessa, on a introduit, à diverses époques, un cours succinct des mathématiques et, dans les deux premières, encore un Cours d'éléments de la mécanique pour les étudiants-naturalistes.

« Le temps consacré à ces cours est différent dans les Universités mentionnées ; le plus long est à St-Pétersbourg, savoir 3 heures par semaine pendant deux semestres pour les mathématiques et 2 heures pendant deux semestres pour la mécanique.

« Remarquons, en passant, que le premier semestre, nommé semestre d'automne, dure du 1er septembre (ancien style) jusqu'au 20 décembre ; le second, dit du printemps, du 15 janvier jusqu'à la fin d'avril, avec 15 jours de vacances à Pâques.

« Ainsi, la durée d'une année scolaire comporte 26-27 semaines. Au mois de mai, ordinairement, il n'y a plus de cours, mais les travaux dans les laboratoires, ainsi que les examens, ont encore lieu. En juin, juillet et août, tous les travaux scolaires sont suspendus. La durée d'un cycle complet d'études universitaires est de 8 semestres.

Revenant sur les cours de mathématiques pour les naturalistes, remarquons que ce cours est obligatoire (ainsi que le cours de mécanique) pour les étudiants de la subdivision de chimie de la Section naturaliste, c'est-à-dire qu'il est exigé aux examens.

L'introduction de ces cours dans le plan d'études de la Section naturaliste, au moins pour les chimistes, est une preuve que la nécessité des connaissances des éléments du calcul infinitésimal et de la géométrie analytique est depuis longtemps conçue par les naturalistes. »

Le chap. I se termine par un exposé des conditions d'admission qui sont exigées par les Universités.

Viennent ensuite (chap. II) les plans d'études et les programmes des Universités de St-Pétersbourg, de Moscou, de Kharkow, de Kiew, d'Odessa, de Kazan et de Juriew ; puis, dans le chapitre suivant, un exposé de l'organisation des examens, notamment de ceux qui conduisent aux grades de professeur de l'enseignement secondaire et maître ès sciences.

Les chapitres IV et V traitent des méthodes d'enseignement et du rôle des Universités dans la préparation des professeurs d'enseignement supérieur et secondaire. M. Possé examine ce que fournit l'Université à ceux de ses élèves qui vont entreprendre une carrière pédagogique dans l'enseignement secondaire.

« On peut dire d'emblée, écrit-il, qu'elle ne leur donne, dans le cas le plus favorable, qu'un développement scientifique général et des connaissances spéciales dans un domaine plus large que celui de leur propre enseignement. Personne ne doute que ces conditions sont nécessaires pour un pédagogue, mais sont-elles aussi suffisantes ?

« On n'est pas d'accord sur cette question. Deux opinions opposées s'y font entendre.

« Selon l'une, pour être bon pédagogue, il suffit d'avoir du bon sens et de

savoir bien la matière de son enseignement, dans un volume plus large que celui qu'on doit transmettre aux élèves, le reste viendra avec l'expérience et ne peut être enseigné dans aucune école supérieure ; les résultats dépendent du talent individuel du maître.

« Cette opinion est très répandue dans nos sphères pédagogiques, parmi les professeurs des Universités et des écoles secondaires.

« Conformément à cette opinion, on ne trouve, dans les plans d'étude de la Faculté physico-mathématique, aucun cours d'un caractère pédagogique, comme : Histoire de la philosophie et de la pédagogie, Logique, Psychologie, Méthodique de l'enseignement, Hygiène scolaire, etc.

« Selon l'autre opinion, la profession d'un pédagogue, aussi bien que toute autre, demande une préparation spéciale. Les partisans de cette opinion verraient avec satisfaction l'introduction, dans le plan d'études de la Faculté physico-mathématique, de cours de Pédagogie, Logique, Psychologie, selon le vœu émis par la réunion des membres de la Société des naturalistes et médecins allemands, à Dresde, en 1907 (V. Gutzmer, *Die Thätigkeit der Unterrichtscommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte*, 1908 [1]). »

Dans la 2e *partie*, l'auteur fait une revue rapide de l'enseignement mathémathique dans quelques *écoles techniques supérieures* de différents types.

« Jusqu'à 1885 il n'y avait que huit écoles techniques supérieures en Russie ; il y en a maintenant dix-sept, sans compter les écoles supérieures agricoles où il n'est pas donné d'enseignement mathématique. Nous avons cinq Instituts polytechniques composés de 4-6 sections, savoir : les Instituts polytechniques de St-Pétersbourg, Riga, Kiew, Varsovie et Novotcherkassk, nommé Donskoï ; trois Instituts technologiques à St-Pétersbourg, Kharkow et Tomsk, dont les deux premiers ont deux sections : mécanique et chimique, et le troisième quatre ; un Institut des ingénieurs des voies de communications à St-Pétersbourg et une Ecole supérieure des ingénieurs à Moscou : un Institut des Mines à St-Pétersbourg et une Ecole supérieure des Mines à Ekatérinoslaw ; un Institut électrotechnique à St-Pétersbourg ; un Institut des ingénieurs civils à St-Pétersbourg ; un Institut forestier à St-Pétersbourg ; une Ecole technique supérieure et l'Institut Constantin d'arpentage à Moscou.

« Chacune de ces écoles est destinée à former des ingénieurs appelés à diriger les institutions et travaux techniques et industriels, à pourvoir aux emplois techniques de l'Etat et aux chaires d'enseignement spécial dans ces écoles mêmes.

L'étude des sciences mathématiques n'est pas le but principal des ingénieurs, mais elle leur est indispensable comme étude auxiliaire, les Mathématiques étant la base de toutes les sciences techniques précises.

Officiellement la durée du cours complet est de 4 ans pour les Instituts polytechniques et 5 ans pour les autres écoles supérieures, excepté l'école supérieure des ingénieurs à Moscou, où elle n'est que de 3 ans. En réalité, le séjour d'un étudiant à l'école technique supérieure dure au moins 6-7 ans, grâce au surchargement des plans d'études dont nous aurons encore à parler plus loin. La condition nécessaire pour l'admission aux écoles supérieures est l'instruction préliminaire dans une école secondaire, gymnase, école réale ou école commerciale, ayant les mêmes droits que la précédente.

---

[1] V. traduction dans l'*Ens. math.* du 15 janvier 1908, p. 1-49.

Or, cette condition n'est plus suffisante, grâce à l'afflux énorme des candidats, surpassant presque partout le nombre des places. Cette circonstance a provoqué l'établissement de différents genres de conditions supplémentaires.

Parmi les *écoles militaires* comportant un enseignement mathématique, l'auteur examine principalement l'Académie de marine de St-Pétersbourg.

L'enseignement des Mathématiques dans les Ecoles de Finlande.

Ce Rapport[1] a été rédigé par une Commission instituée par le Sénat impérial de Finlande. Il donne un aperçu de l'enseignement mathématique dans toutes les écoles, depuis l'enseignement primaire jusqu'à l'enseignement universitaire :

1. Ecoles primaires. — 2. Ecoles populaires supérieures. — 3. Ecoles préparant aux écoles normales primaires, en formant les maîtres d'école ambulants. — 4. Ecoles normales primaires. — 5. Etablissements d'enseignement secondaire. — 6. Formation des professeurs d'enseignement secondaire. — 7. Ecoles de jeunes filles. — 8. Ecoles commerciales. — 9. Ecoles techniques et inférieures, et écoles professionnelles. — 10. Ecoles techniques supérieures. — 11. Université d'Helsingfors.

Nous nous bornerons à quelques indications concernant l'Université d'Helsingfors, qui comprend quatre Facultés : théologie, droit, médecine et philosophie. Celle-ci comprend trois sections, dont une de physique et de mathématiques. L'âge moyen des étudiants à l'entrée est d'environ 19 ans. L'expérience ayant montré que les cours de mathématiques dans plusieurs Lycées du pays n'ont pu être étudiés à fond en raison du temps considérable absorbé par les langues, on a été obligé à l'Université de revoir et de compléter certaines parties du cours et surtout de la trigonométrie. Vient ensuite un cours d'un an de géométrie analytique, qui part des premiers éléments. La trigonométrie sphérique est en général enseignée en connexion avec la géométrie analytique de l'espace ; on la reprend plus tard dans le cours d'astronomie sphérique. En même temps que la géométrie analytique commence le cours différentiel et intégral. Le cours s'étend sur une période de deux ans avec 4 heures par semaine, et 2 heures d'exercices.

Tous les deux ans il se fait un cours sur la théorie des équations différentielles. L'enseignement de l'algèbre et de la théorie des nombres commence en général en seconde année

Tous les deux ans il se fait aussi des leçons sur la théorie des fonctions analytiques. A côté de ces branches qui reviennent régulièrement, il se fait des cours sur d'autres domaines des mathématiques.

L'auteur examine en terminant la question de la préparation des candidats à l'enseignement dans les écoles moyennes. Nous le citerons textuellement :

« La moitié environ des étudiants de la Faculté de philosophie se destinent à la carrière de l'enseignement secondaire. L'éducation professionnelle des futurs maîtres n'a cependant pas été jusqu'ici prise sensiblement en considération dans l'enseignement universitaire, qui a presque exclusivement un caractère scientifique général. Pendant ces derniers temps on a néanmoins visé à modifier cet état de choses. Dans l'enseignement des ma-

[1] Un fascicule de 52 pages ; imprimerie de la Société de Littérature finnoise.

thématiques, en particulier, on a attaché plus d'importance qu'autrefois aux parties du cours qui ont une importance spéciale pour la formation professionnelle des futurs maîtres. Cependant, comme le nombre des chaires ordinaires de mathématiques à l'Université — il y a un professeur ordinaire et un professeur-adjoint — ne suffisait pas à assurer, outre l'enseignement purement scientifique, ces besoins pédagogiques spéciaux, on créa en 1908 une chaire nouvelle de professeur-adjoint de mathématiques, dont le titulaire, d'après le texte de l'ordonnance, « participera à l'enseignement général dans cette matière, et aura pour tâche spéciale de faire des cours et de diriger des exercices pratiques pour les futurs professeurs de mathématiques dans les établissements d'enseignement secondaire ». Le titulaire sera nommé au cours de la présente année.

« Le titulaire du nouveau poste traitera dans des cours peu étendus, comprenant deux à trois leçons par semaine pendant un semestre, de questions ayant un lien direct avec le programme de mathématiques des écoles, ou d'une importance spéciale pour la formation professionnelle des professeurs. Les éléments du sujet enseigné devront être éclaircis d'une manière approfondie, et les méthodes d'exposition applicables dans les écoles discutées en détail. D'autre part, le professeur exposera le développement ultérieur du sujet et ses relations avec d'autres branches des mathématiques. A côté des points de vue pédagogiques, le développement historique sera envisagé d'une manière aussi étendue que possible. A chaque cours seront rattachés des exercices pratiques où les questions d'un intérêt pédagogique devront tenir une grande place.

« Parmi les matières convenant au cours en question on peut citer :

en *géométrie :* les axiomes de la géométrie euclidienne ; les principes de la géométrie projective ; un coup d'œil sur les divers systèmes géométriques ; un exposé systématique des méthodes élémentaires de résolution des problèmes géométriques ; l'histoire de la géométrie élémentaire ;

en *trigonométrie :* le développement historique de cette science ;

en *arithmétique :* les méthodes de calcul numérique ; le développement historique de l'arihmétique élémentaire ; l'extension de la notion de nombre ;

dans *l'algèbre* et *la théorie des nombres :* la notion de divisibilité dans la théorie des nombres et l'algèbre ; le développement historique de l'algèbre et de la notation algébrique ; l'application de l'algèbre à la résolution de problèmes de construction géométrique à l'aide de divers instruments.

« Le nouvel adjoint devra aussi dans son enseignement rendre compte des réformes de l'enseignement mathématique à l'école qui ont été introduites ou proposées dans les principaux pays étrangers et qui semblent avoir une valeur durable ».

SUÈDE

Gymnases.

Die Mathematik an den schwedischen Gymnasien[1], *von* Dr E. Göransson. — Ce rapport fait suite à l'exposé du même auteur sur les écoles réales en Suède[2].

---

[1] Nous devons ce résumé à Mlle R. Masson (Genève).

[2] Voir l'*Ens. math.* du 15 mars 1911.

La création des gymnases suédois est due à Gustave-Adolphe ; le plus ancien date de 1620 et les premiers règlements scolaires de 1649.

Le titre de gymnase, cependant, a pris son acception actuelle depuis les règlements scolaires de 1905.

M. Göransson indique le but que se propose l'enseignement des gymnases d'après les règlements de 1905 : « L'enseignement du gymnase se base sur les connaissances acquises dans les 5 classes inférieures de l'école réale et a comme tâche spéciale, outre l'instruction générale commencée par les écoles réales, de poser les bases des connaissances scientifiques qui seront développées ensuite dans les Universités, dans les écoles techniques supérieures ou dans les écoles militaires. »

La nouvelle organisation des établissements supérieurs d'instruction est la suivante.

Pendant les cinq premières années, il y a un enseignement unique, celui des 5 classes inférieures de l'école réale (point de latin), puis vient le choix (vers l'âge de 15 ans) entre, d'un côté, la 6e classe de l'école réale, classe de fin d'études, et, de l'autre, le gymnase, qui se subdivise dès le début en gymnase réal et gymnase latin, et qui est formé de 4 classes ; enfin ce dernier comprend encore, pour les deux dernières classes, une sous-section dite section classique pure, avec le grec, et sans mathématiques ni dessin.

La réforme la plus caractéristique de l'enseignement du gymnase concerne les branches facultatives.

Avant 1905, le choix d'une branche entraînait la renonciation à l'étude d'une autre. Depuis 1905, l'élève a le droit d'étudier toutes les branches, mais il a aussi le droit d'en abandonner.

L'expérience a démontré que les élèves de la classe III du gymnase ont une assez grande maturité de caractère pour profiter de la liberté de choix et en comprendre la responsabilité, ce qui ne serait pas le cas dans les degrés inférieurs.

Les règlements scolaires préconisent une liberté de plus en plus grande en ce qui concerne le choix des études. Cependant le nombre maximum de branches qui peuvent être supprimées est de 2, formant un maximum de 6 heures par semaine.

M. Göransson expose les raisons multiples pour lesquelles, malgré une vive opposition, on a conservé les mathématiques parmi les branches pouvant être laissées de côté, et cela même au gymnase réal, ainsi que celles qui ont fait supprimer totalement les mathématiques des deux dernières années (IIIe et IVe classes) de la section classique pure du gymnase latin.

L'auteur indique ensuite le temps accordé à l'enseignement (la durée de scolarité annuelle est de 38 semaines) et la distribution des vacances et jours de congé ; en plus de ceux-ci, le directeur, d'accord avec les maîtres, peut, deux à trois fois par semestre, dispenser une ou plusieurs classes des travaux à domicile, afin de permettre à la classe de se livrer à des exercices de sport et à des jeux en plein air.

En général, il n'y a pas de travaux à domicile pour le lundi, et le travail à domicile des autres jours ne doit pas excéder 2 à 3 heures et demie par jour pour les élèves de force moyenne. L'enseignement des diverses branches ne doit pas dépasser 6 heures par jour, y compris le dessin.

Les leçons, d'une durée de 45 minutes, sont séparées par une récréation.

M. Göransson traite ensuite la question des examens. L'examen de maturité comprend des examens écrits et des examens oraux ; les écrits se font

simultanément et sont identiques pour toute la Suède. Depuis 1910, la géométrie et l'algèbre font l'objet d'une seule épreuve, pour laquelle il est accordé 6 heures et demie, et qui comporte 8 à 9 problèmes embrassant les diverses parties du programme ; 3 d'entre eux au minimum doivent être résolus d'une manière satisfaisante pour l'admissibilité.

L'auteur indique ensuite les tendances de l'organisation et ses transformations depuis 1870.

La seconde partie du rapport est consacrée au programme des études mathématiques du gymnase.

L'auteur donne un aperçu du développement de l'enseignement mathématique des gymnases, avec ses fluctuations correspondant aux diverses idées prédominantes, spécialisation, surmenage, etc. Cet enseignement était, d'une manière générale, jusqu'en 1905, un peu moins étendu pour les mathématiques que celui des écoles correspondantes dans d'autres pays.

Le plan d'études de 1905 a réalisé des changements importants, principalement en mathématiques et sciences naturelles.

La distribution des heures consacrées aux mathématiques est, par semaine, de

	I	II	III	IV
Gymnase réal	7	6	6	6
» latin	5	4	4	5
Pour toutes les branches réunies	30	31	33	33

Au sujet de la distribution de l'enseignement mathématique, M. Göransson donne les raisons qui ont fait désirer une répartition un peu différente de celle ci-dessus, telles qu'elles ressortent de l'enquête faite auprès des maîtres de mathématiques, enquête dont M. Göransson s'est déjà occupé dans son rapport sur l'enseignement mathématique des écoles réales.

Relativement au programme des études mathématiques, il insiste surtout sur l'emploi de la notion de fonction. On cherche à faire de plus en plus des mathématiques enseignées à l'école un tout homogène, et, bien que cela ne soit pas indiqué formellement, le plan d'études tend à donner à la notion de fonction la place de notion centrale fondamentale.

Il semble que l'expérience ait démontré que la notion d'intégrale elle-même peut être enseignée à des élèves de capacités moyennes et qu'elle peut être pour eux d'un grand intérêt et d'une réelle utilité. Les élèves se destinant aux études techniques supérieures, entre autres, abordent celles-ci avec plus de facilité lorsqu'ils ont eu le temps de se familiariser avec les notions fondamentales du calcul infinitésimal.

Dans un chapitre consacré à des remarques sur quelques points particuliers, l'auteur note que le plan d'étude recommande d'insister, dans tous les domaines des mathématiques, sur la clarté et la rigueur (pour autant que cette dernière ne nuira pas à la clarté). Le choix des matières doit être basé autant sur leur valeur scientifique que sur leur importance pour les applications pratiques. Les exercices doivent être simples et naturels. Chaque sujet doit être illustré par un grand nombre d'exemples, sans oublier cependant qu'un choix judicieux permet d'en restreindre notablement le nombre.

Chaque connaissance nouvelle doit amener des applications nouvelles.

Il faut se borner aux points essentiels de chaque sujet, ne pas s'arrêter

trop sur des détails, afin que l'enseignement mathématique puisse profiter à tous les élèves, et cela sans surmenage.

La méthode heuristique doit être fréquemment employée, surtout pour introduire des sujets nouveaux.

L'auteur termine par les manuels d'enseignement. A ce sujet, il note le fait que la question de l'enseignement de la géométrie descriptive par le maître de mathématiques, soulevée il y a plusieurs années, a été écartée par un compromis, les deux maîtres, celui de mathématiques et celui de dessin, travaillant ensemble.

M. Göransson rappelle que la préparation des maîtres de dessin et l'enseignement du dessin au gymnase a été traitée par M. P. H. Henriques dans un rapport et dans un manuel de dessin géométrique.

Au rapport de M. Göransson est jointe la *Préface* que M. le prof. H. von Koch a écrite pour l'ensemble des 8 fascicules concernant l'enseignement mathématique en Suède.

M. v. Koch remarque que la Suède n'est pas restée en dehors de la vague de réforme de l'enseignement mathématique qui agite l'Europe depuis dix ans, les nouveaux plans d'études en font foi.

Un caractère important de ces plans d'études est l'introduction de la notion de fonction et, pour le gymnase réal, celle des éléments du calcul infinitésimal.

Ecoles industrielles élémentaires.

Die Mathematik an elementartechnischen Gewerbeschulen in Schweden [1], von Dr K. L. Hagström, Ing. G. Erikson und Dr C. Heüman. — Le rapport est divisé en trois chapitres rédigés chacun par l'un des auteurs indiqués ci-dessus.

Dans le premier, il est question d'une façon générale, de l'enseignement mathématique dans les 60 écoles complémentaires que possède la Suède. Ces écoles donnent des cours du soir et du dimanche matin pendant 30 semaines par an. Elles reçoivent comme élèves les apprentis des deux sexes à partir de l'âge de 14 ans.

L'arithmétique est la principale branche mathématique ; on fait aussi de l'algèbre jusqu'au 2e degré, quelques livres d'Euclide et des calculs de surfaces et de volumes.

Le programme des différentes écoles devrait être unifié ; l'obligation légale de suivre les cours n'existe pas.

Le deuxième chapitre, le plus important de ce rapport, est consacré à l'Ecole technique de Stockholm, qui comptait en 1908-1909 plus de 2000 élèves et 173 maîtres.

Elle compte cinq divisions : une école du soir et du dimanche (1230 élèves) ; une école technique pour jeunes filles (266 élèves) et trois divisions de 80 à 90 élèves chacune, consacrées à l'art industriel, au bâtiment et à la mécanique.

La scolarité est de 3 ans.

L'enseignement mathématique des 2 premières divisions comprend l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie.

---

[1] Un fascicule de 22 pages, Stockholms-Tryckeriet, Stockholm, 1911. — Nous devons ce compte rendu à M. E. Steinmann (Genève).

L'arithmétique est le cours le plus fréquenté; l'algèbre est poussée jusqu'aux progressions et logarithmes; la géométrie est enseignée d'après Euclide (livres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 et 12).

Les élèves sont reçus à n'importe quel moment de l'année; la présence aux cours est absolument facultative; le règlement prévoit que l'enseignement doit être organisé de telle sorte que les progrès d'un élève soient indépendants de ceux de ses camarades; dans ce but, on a institué un système de « cartes », sortes de feuilles contenant chacune un certain nombre d'exercices; l'élève peut passer à la « carte » suivante quand il présente une « carte » complètement faite. On insiste particulièrement sur les définitions et opérations fondamentales.

Le système des cartes n'est pas applicable à la géométrie; c'est le seul cours où l'enseignement soit collectif.

La division d'art industriel n'a, en fait de mathématique, que la géométrie descriptive.

Les deux dernières divisions (bâtiment, mécanique) sont des écoles avec 8 heures de classe par jour, pendant trois ans. On y fait 6 à 8 heures de mathématiques par semaine pendant deux ans: le programme s'étend sur l'arithmétique appliquée, l'algèbre jusqu'au 2e degré inclusivement et les progressions et logarithmes, les livres 5, 6, 11 et 12 d'Euclide et la trigonométrie plane.

Il existe un cours préparatoire d'une année, avec 11 heures de mathématiques par semaine. Ce cours est très fréquenté.

Le troisième chapitre contient quelques notes sur les cours de 2e année des écoles dont il vient d'être parlé. Les méthodes graphiques y sont particulièrement développées. On représente de cette façon un grand nombre d'exemples *pratiques* de fonctions du 1er degré et de degrés supérieurs, ainsi que des fonctions transcendantes. On se sert de papier millimétrique et de papier à quadrillage logarithmique.

Pour la stéréométrie pratique, on emploie beaucoup la formule des 3 niveaux $V = \frac{h}{6}(B + b + 4m)$; une méthode graphique ingénieuse ramène le calcul des volumes à celui des aires d'un diagramme.

Le calcul logarithmique est fait à 4 décimales sans interpolation, ce qui fait gagner beaucoup de temps. L'interpolation elle-même est exercée à part. L'auteur est partisan de la division décimale du degré.

Ecoles techniques.

Die Mathematik an technischen Lehranstalten in Schweden [1] von Dr H. von Koch und O. Gallander. — L'exposé comprend deux parties :

1re partie. Ecole technique supérieure de Stockholm. — Le rapport débute en accordant que les deux Ecoles techniques supérieures de Suède sont en retard au point de vue des laboratoires sur les écoles d'autres pays; une réorganisation est à l'étude et se réalisera probablement en 1911. L'Ecole de Stockholm comprend 6 divisions embrassant toutes les branches de l'industrie du bâtiment, de la mécanique et des mines. L'admission est accordée

---

[1] Un fascicule de 21 pages. Stockholms-Tryckeriet, Stockholm, 1910. — Nous devons ce compte rendu à M. E. Steinmann (Genève).

aux porteurs du certificat de maturité ayant des notes suffisantes en mathématiques et en sciences, ainsi qu'une certaine pratique du dessin. Les cours durent de trois à quatre ans. Suivant les divisions, le cours de mathématiques comprend trois semestres ou un semestre, avec une moyenne de 8 h. par semaine. Les heures se répartissent en cours et en répétitoires avec exercices. Les parties les plus abstraites des cours sont illustrées par des exemples pratiques et des constructions graphiques. Un programme fort détaillé des mathématiques et de la géométrie descriptive clôt cette première partie.

2e *partie. Les écoles techniques moyennes.* La scolarité est de 3 ans. L'âge moyen d'entrée est de 18 ans. Il n'est pas fait d'examen d'admission; le résultat des premières épreuves de l'année décide de l'admissibilité d'un élève. Les dispositions légales sur le programme de mathématiques sont très larges, et laissent au professeur la plus grande liberté d'atteindre le but demandé de la façon qui lui convient le mieux. Le nombre des heures de mathématiques diffère d'une école à l'autre; (en moyenne six heures par semaine pendant 3 ans).

La méthode d'enseignement est celle qui a été traitée en détail dans le rapport sur les gymnases. La matière enseignée, par contre, est loin d'être la même; tandis que dans les gymnases, la mathématique est une branche de culture générale, elle devient dans l'école technique la branche qui doit se borner parfois, s'étendre souvent, à tout ce qui peut être employé pratiquement.

Quoique le programme officiel ne le prescrive pas, le calcul infinitésimal est enseigné, vu ses nombreuses applications. On exerce beaucoup le calcul numérique et la règle à calcul.

Malgré le but utilitaire de l'enseignement, on tient beaucoup à la démonstration aussi rigoureuse que possible des théorèmes. On y voit, avec raison, l'occasion d'un exercice de langage correct et de déduction logique.

BIBLIOGRAPHIE

W.-M. Baker and A.-A. Bourne. — **A New Geometry.** — 1 vol. in-16, XXII-246-VI p.; relié 2 s. 6 d.; G. Bell and Sons, Londres.

Ce volume est une réédition condensée d'un volume paru en 1903, « Elementary Geometry », des mêmes auteurs. MM. Baker et Bourne ont conservé en principe la méthode de démonstration d'Euclide, mais, afin de répondre aux désirs exprimés par le Board of Education, ils ont fait des changements quant au groupement des théorèmes. L'ordre suivi est : Introduction relative à la construction des figures géométriques; Définitions; Théorèmes concernant les droites et les angles qu'elles forment entre elles dans leurs diverses positions; Les figures planes qu'elles déterminent;

Aires ; Théorème de Pythagore ; Equivalence des figures ; Cercle ; Figures inscrites et circonscrites ; Cercle des neuf points.

Le IVe livre reprend l'étude du rectangle, des polygones réguliers et des aires en y joignant la démonstration du carré et du produit des binômes et le théorème général liant les côtés d'un triangle quelconque entre eux : l'algèbre est alors utilisée.

Le Ve livre traite la question des rapports et proportions.

La géométrie dans l'espace est introduite avec le VIe livre et se termine avec le livre VII par la description de quelques corps solides géométriques, leurs principales propriétés, leur surface et leur volume.

Chaque sujet est accompagné de nombreux exercices. A la fin du volume sont adjointes les réponses à ceux d'entre ces exercices qui sont des applications numériques.

D. Behrendsen u. Dr E. Götting. — **Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchen-Bildungsanstalten,** nach modernen Grundsätzen. *I. Teil :* Für höhere Mädchenschulen, zugleich Unterstufe für Lyzeen und Studienanstalten. — 1 vol. in-8°, 348 p. et 306 fig. ; relié 3 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'ouvrage de MM. Behrendsen et Götting comprend la géométrie et les éléments d'algèbre correspondant aux programmes des *écoles supérieures de jeunes filles. L'Enseignement mathématique* (nov. 1910) avait déjà signalé ce manuel. Une deuxième édition vient de paraître. Cet ouvrage a subi quelques transformations, mais d'une manière générale la deuxième édition consacre le principe de la première en s'inspirant comme elle de l'esprit qui a guidé la réforme actuelle de l'enseignement mathématique. La pénétration de plus en plus complète de l'enseignement par la notion de fonction en est un des caractères principaux. L'interprétation géométrique prend une place plus importante encore qu'auparavant dans l'algèbre élémentaire. Le volume se termine par une adjonction à la stéréométrie sous forme d'un chapitre sur les polyèdres réguliers.

P. Duhem. — **Traité d'Energétique ou de Thermodynamique générale.** Tome I. Conservation de l'énergie. Mécanique rationnelle. Statique générale. Déplacement de l'équilibre. — 1 vol. gr. in-8° de 528 p. ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Cette nouvelle œuvre de M. Duhem est le développement d'idées déjà exposées magistralement dans différents recueils par le savant professeur de Bordeaux. Il y traite d'une mécanique générale, opposée à la mécanique locale qui devait tout expliquer mais qui satisfait plus les métaphysiciens que les physiciens. La mécanique rationnelle, avec l'ancien sens classique de l'expression, est peut-être au fond de toutes choses ; les variations calorifiques et électriques, par exemple, ne sont peut-être que des mouvements particulaires soumis aux lois énoncées depuis longtemps pour les mouvements de points matériels. Mais nous ne sommes pas encore au grand jour où l'on rejettera définitivement cette hypothèse, ou bien où l'on pourra l'accepter et tout faire avec elle. En attendant, les réalités physiques ont des exigences immédiates ; on parle des *équilibres chimiques* aussi naturellement que des équilibres mécaniques. Si l'on chauffe un bâton de soufre

de manière à ne le fondre que progressivement, il y aura une *vitesse* pour la propagation du phénomène et on pourrait ainsi trouver une infinité d'exemples dans lesquels on parle le langage de la mécanique rationnelle en dehors des phénomènes rentrant dans la forme classique de cette science. Il y a donc une mécanique générale faite de Thermodynamique aussi bien que de Dynamique pure; elle devra donner l'ancienne mécanique comme cas particulier. Je crois que ces quelques mots permettent de caractériser l'esprit du nouveau volume. M. Duhem s'est attaché à y généraliser des notions relativement récentes; c'est ainsi qu'il voit dans l'immense majorité des systèmes physiques, l'impossibilité d'exprimer les liaisons par des relations finies ou par des relations différentielles intégrales, c'est-à-dire le caractère de non holonomie reconnu par Neumann pour des systèmes dynamiques.

Tout en attachant la plus grande importance aux définitions primordiales il reconnaît que celles-ci ne peuvent être que le résultat d'approximations successives. La masse peut être provisoirement définie par une vulgaire balance mais, en possession de cette première définition, nous ferons une meilleure théorie de la balance; nous perfectionnerons cette dernière d'où un perfectionnement correspondant pour la masse et ainsi de suite. De même pour la température et pour le thermomètre. Cette notion de température, à laquelle on fait si facilement perdre un sens précis, n'est d'ailleurs introduite qu'avec de rigoureuses précautions dans les systèmes physiques; avec Helmholtz, nous considérons d'abord le système *normal* où l'on peut distinguer le changement d'état sans changement de température, du changement de température sans changement d'état.

Comme préliminaires du principe de Carnot, M. Duhem revient encore avec grand soin sur la statique chimique; il s'efforce de la comparer avec la statique mécanique, montre qu'il est nécessaire d'exclure d'abord de celle-ci les phénomènes de frottement et d'hystérésis si on veut la transformer en statique générale, ce qui fait ressembler cette dernière science aux parties les plus élégantes de la statique ordinaire.

Quant au principe de Carnot lui-même et, d'une manière générale, quant à tous les cycles décrits par des systèmes physiques, l'analogie avec la simple dynamique a été conservée avec une extrême habileté; le potentiel thermodynamique est défini comme le potentiel dynamique et l'entropie elle-même, qui s'évanouit en mécanique rationnelle, est introduite immédiatement avec le potentiel thermodynamique. En somme, l'auteur donne l'impression de ne pas dédaigner le moins du monde la mécanique classique, mais, au contraire, de la posséder profondément et d'avoir pu ainsi y faire une très adroite sélection d'éléments susceptibles d'être généralisés pour constituer l'Energétique qu'il expose.

J'admire aussi son habileté d'analyste, qui se déploie avec une grande aisance dans le chapitre, assez difficile, qu'il consacre au déplacement de l'équilibre. Il condense de longues formules avec d'heureuses notations symboliques. Enfin, il essaie de fondre dans son œuvre bien des résultats dus à ses prédécesseurs dont on pouvait croire les travaux enfouis pour toujours dans les publications académiques, ce qui n'étonne pas de la part d'un savant qui a si bien étudié Léonard de Vinci. Le volume a donc une certaine allure encyclopédique et comme, malgré tout, il reste fort simple, il donnera l'idée que l'Energétique générale peut bien, à l'heure actuelle, être présentée sous forme didactique. A. Buhl (Toulouse).

Maurice Lecat. — **Leçons sur la théorie des déterminants à *n* dimensions** avec applications à l'algèbre, à la géométrie, etc. — 1 vol. in-4°, VII-228 p.; 16 fr.; Ad. Hoste, Gand.

Alors que la théorie des déterminants ordinaires à deux dimensions est depuis longtemps classique, la théorie générale des déterminants à *n* dimensions est restée l'objet des recherches d'un très petit groupe de mathématiciens, parmi lesquels on peut citer Cayley, Garbieri, Gegenbauer. L'ouvrage de M. Lecat rassemble et ordonne toutes nos connaissances sur ce sujet. Il est accompagné de nombreuses notes critiques et d'un index bibliographique très complet. Il peut être recommandé à celui qui veut s'occuper de cette théorie spéciale. En voici la table des matières.

Avant-propos. — Bibliographie. — Notice historique. — Introduction : Matrices symétriques et autres.

Livre I. — Théorie des déterminants et des permanents. (Déterminants généraux. Déterminants spéciaux. Théorie des déterminants cubiques ou à *n* dimensions et d'ordre infini.)

Livre II. — Applications de la théorie des déterminants. (Applications à l'algèbre. Applications géométriques. Applications arithmologiques.)

Appendice. — (Déterminants adjoints de classe supérieure. Erreurs de Gegenbauer. Structure des matrices actinomorphes. Théorème de Kronecker généralisé. Analogies des matrices avec les produits ordinaires.)

M. Plancherel (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Livres nouveaux :

F. Adami. — **Die Elektrizität.** Erster Teil. (*Bücher der Naturwissenschaft*, herausgegeben von S. Günther, 9. Band.) — 1 fasc., 127 p. ; 40 Pf., Philipp Reclam jun., Leipzig.

W. M. Baker and A. Bourne. — **A New Geometry.** — 1 vol. in-16, XXII 246-VI p. ; 2 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, Londres.

H. Bouasse. — **Cours de mathématiques générales** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de mathématiques générales servant d'introduction aux cours de mécanique et de physique du même auteur. — 1 vol. in-8°, 646 p.; 20 fr., Ch. Delagrave, Paris.

P. Crantz. — **Planimetrie zum Selbstunterricht.** (Sammlung *Aus Natur und Geisteswelt*, n° 340). — 1 vol. in-16, 134 p.; 1 M. 25, B. G. Teubner, Leipzig.

V. Ducla. — **Démonstration d'un théorème de Fermat.** — 1 fasc. in-8°, 22 p.; Garet, Pau.

F. Enriques. — **Fragen der Elementargeometrie.** I. Teil : *Die Grundlagen der Geometrie.* Deutsche Ausgabe von H. Thieme. — 1 vol. in-8, X-366 p. ; 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

S. Holba. — **Fermats letzter Satz als Minimumaufgabe.** — 1 fasc. in-8, 29 p. ; 1 M. ; Königl. Ung. Universitätsbuchhandlung, Budapest.

F. Klein. — **Aktuelle Probleme der Lehrerbildung.** Vortrag gehalten auf der Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, am 6. Juni 1911 zu Münster. — 1 fasc. in-8°, 32 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Kneser. — **Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen** in der mathematischen Physik.— 1 vol. in-8, VIII-243 p.; 6 M.; F. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

E. Legrand. — **Sommations par une formule d'Euler,** de l'usage qu'on peut en faire pour résoudre de nombreux problèmes. — 1 fasc. in-8°, 46 p.; Coni Hermanos, Bueno-Aires.

R. Neuendorf. — **Praktische Mathematik I.** Graphisches und numerisches Rechnen (Sammlung *Aus Natur und Geisteswelt,* n° 341.). — 1 vol. in-8°, 105 p.; 1 M. 25; B. G. Teubner, Leipzig.

Niels Nielsen. — **Théorie des fonctions métasphériques.** — 1 vol. in-4°, VI-212 p., 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

R. de Montessus et R. d'Adhémar. — **Calcul numérique.** Opérations arithmétiques et algébriques, intégration. (Coll. *Encyclopédie scientifique.* — 1 vol. gr. in-18, 250 p.; 5 fr.; O. Doin & Fils, Paris.

G. Scheffers. — **Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik.** Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. — 1 vol. in-8, 2e édition; VIII-732 p.; 18 M.; Veit & Comp., Leipzig.

R. Schimmack. — **Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland.** — Mit einem Einführungswort zu Band III von F. Klein. (*Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland,* Band III, Heft 1.) — 1 vol. gr. in-8, VI-146 p.; 3 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Mingot Shelly. — **Coordenadas hyperboloidales** y su aplicacion al estudio de las conicas y cubicas contenidas en una cuadrica alabeada. Thèse de doctorat. — 1 fasc. in-8, 57 p.; Alemana, Madrid.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. Mit 70 Figuren im Text und 747 Fragen und Aufgaben. (*Mathematisches Unterrichtswerk.*) — 1 vol. in-8, 303 p.; 4 M. 50, Tempsky, Vienne.

P. Treutlein. — **Der geometrische Anschauungsunterricht** als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen. Mit einem Einführungswort von F. Klein und mit 33 Tafeln und 87 Abbildungen im Text. — 1 vol. in-8, X-216 p.; 5 M., relié 5 M. 60; B. G. Teubner, Leipzig.

J.-W. Young. — **Lectures on fundamental conceps of algebra and geometry.** Preparated for publication with the cooperation of W.-W. Denton. With a note on the growth of algebraic symbolism by U.-G. Mitchell. — 1 vol. p. in-8°, VI-247 p.; 1 s. 6 d.; The Macmillan company, New-York.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome III. vol. 1, fasc. 1 : *Principes de la géométrie;* exposé par F. Enriques. — *Notes sur la géométrie non-archimédienne,* par A. Schœnflies. — *Les notions de ligne et de surface;* exposé d'après l'article allemand de H. von Mangoldt, par L. Zoretti. — Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

UN APPAREIL DÉMONTRANT LA TRANSFORMATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE EN ÉNERGIE CINÉTIQUE

1. Le mécanisme décrit dans les lignes suivantes a été imaginé pour démontrer d'une façon simple comment l'énergie potentielle peut être transformée directement en l'énergie cinétique d'une roue en rotation et inversement. Le problème théorique dont il est question, quoique d'ordre élémentaire, est cependant très instructif et peut être trouvé dans plus d'un ouvrage important de mécanique théorique[1]. Il ressemble à celui de la machine d'Atwood, avec la différence essentielle que dans notre mécanisme l'énergie cinétique est celle d'une masse tombante et en rotation au lieu d'une masse tombante seule. L'énergie de la masse rotative est utilisée pour soulever la même masse d'une partie de sa hauteur originale. Etant donné l'importance de la machine d'Atwood dans l'enseignement élémentaire, un appareil dont le caractère essentiel est de mettre en évidence les propriétés de l'énergie rotative semble également important et digne d'attention.

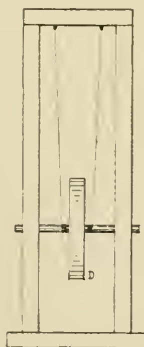


Fig. 1 $_a$.

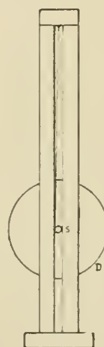


Fig. 1 $_b$.

2. La partie principale de l'appareil consiste en un disque circulaire D, fixé sur un axe horizontal *s* passant par son centre et lui étant perpendiculaire. Le

[1] Voir par exemple E.-J. Routh, *Elementary rigid dynamics*, 6e éd., p. 220.

disque et l'axe sont suspendus à un cadre à l'aide d'une suspension bifilaire, comme le montrent les fig. 1_a et 1_b de face et de côté. Sur les côtés du cadre (fig. 1_b) est adaptée une échelle servant à mesurer les distances parcourues par le centre de l'axe.

L'expérience se fera de la manière suivante : On enroule les fils autour de l'axe d'une façon égale de chaque côté du disque et aussi haut que le cadre le permet. On abandonne alors l'appareil à lui-même; grâce à leur poids, le disque et l'axe commencent à descendre lentement; les fils se déroulent et obligent le disque à tourner autour de son axe aussi rapidement que les fils se détortillent. Cette descente se continue aussi longtemps que la longueur des fils le permet. Si l et G représentent la longueur du fil déroulé et le poids du disque et de l'axe, l'énergie potentielle avant le mouvement est $P = Gl$. Cette énergie est transformée actuellement en l'énergie cinétique K de la masse tournante et l'énergie V due à la vitesse acquise de chute. Par conséquent

$$P = K + V \,. \qquad (1)$$

L'énergie V est compensée par la réaction du cadre[1]. L'énergie cinétique utile du disque et de l'axe est alors

$$K = P - V \,. \qquad (2)$$

En vertu de cette énergie le disque continue à tourner et les fils s'enroulent de nouveau autour de l'axe (cette fois évidemment sans l'intervention de l'expérimentateur). Le mouvement ascensionnel cessera dès que toute l'énergie (2) aura été utilisée. Cette énergie est ainsi transformée en l'énergie potentielle $P_1 = P - V$. Comme $P_1 < P$, il est clair que le mouvement ascensionnel n'atteindra pas la hauteur primitive. Le même processus de mouvement de chute et d'ascension se continuera de lui-même un nombre infini de fois. Chaque fois que le disque atteint le point le plus bas, une partie de l'énergie restante est compensée par le cadre,

[1] Pour plus de simplicité on néglige tout frottement.

c'est pourquoi chaque ascension est moins élevée que la précédente.

En désignant par V, V_1, V_2, ... les valeurs de ces pertes successives d'énergie au point le plus bas, on aura

$$P = V + V_1 + V_2 + \dots \quad \text{ad inf.}$$

3. Afin de calculer les diverses quantités qui interviennent dans ce mouvement quasi périodique, désignons par R et r les rayons du disque et de l'axe, s la longueur du fil déroulé après t secondes et I le moment d'inertie de la masse mobile, abstraction faite des fils. Soit en outre Φ l'angle dont a tourné le disque au bout de t secondes, l'énergie cinétique accumulée dans le disque et l'axe en rotation sera alors

$$K = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 . \tag{3}$$

Mais, comme la longueur s du fil déroulé sur l'axe est $s = r\Phi$, on aura $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}$ et

$$K = \frac{I}{2r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \tag{4}$$

Le travail effectué au bout de t secondes sera

$$P = G \cdot s \tag{5}$$

et l'énergie due au mouvement de chute

$$V = \frac{G}{2g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 , \tag{6}$$

où g est la constante de la gravitation.

Par suite, en tenant compte de (1), nous aurons l'équation différentielle

$$Gs = \frac{I}{2r^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{G}{2g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 . \tag{7}$$

Résolvant, nous obtenons

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2r^2 gG}{gI + r^2 G}} \cdot \sqrt{s} \tag{8}$$

et

$$s = \frac{1}{2} \frac{r^2 gG}{gI + r^2 G} t^2 . \qquad (9)$$

Comme l est la longueur totale du fil enroulé, le temps T au bout duquel le disque atteint sa position la plus basse s'obtiendra par

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 gG}{gI + r^2 G} T^2 .$$

$$T = \sqrt{\frac{2l(gI + r^2 G)}{r^2 gG}} . \qquad (10)$$

Au bout de ce temps, d'après (8)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2r^2 gGl}{gI + r^2 G}$$

et, d'après (6)

$$V = \frac{r^2 G^2 l}{gI + r^2 G} . \qquad (11)$$

Par conséquent, au bout de T secondes,

$$K = Gl - \frac{r^2 G^2 l}{gI + r^2 G} ,$$

ou

$$K = \frac{gGIl}{gI + r^2 G} . \qquad (12)$$

Cette énergie est utilisée à soulever le disque et l'axe d'une certaine hauteur l_1, de sorte que

$$l_1 G = \frac{gGIl}{gI + r^2 G} \quad \text{et} \quad l_1 = \frac{gIl}{gI + r^2 G} . \qquad (13)$$

D'après cela, on voit que la longueur du deuxième cycle du mouvement s'obtient en multipliant la longueur précédente par le facteur $\frac{gI}{gI + r^2 G}$. Par suite, pour le $n^{\text{ème}}$ cycle ou pulsation, la longueur parcourue par le centre de la masse mobile sera

$$l_n = \left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l . \qquad (14)$$

On voit clairement que $\lim_{n=\infty} (l_n) = 0$.

L'énergie perdue lors de cette pulsation au point le plus bas sera, en tenant compte de (11),

$$V_n = \frac{r^2 G^2 l_n}{gI + r^2 G}, \qquad \text{ou} \qquad V_n = \frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l \ . \qquad (15)$$

En effectuant la somme $\frac{r^2 G^2}{gI + r^2 G}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{gI}{gI + r^2 G}\right)^n l$, on trouve facilement qu'elle vaut $Gl = P$, comme on l'a indiqué précédemment.

Il serait facile de s'arranger à pouvoir fixer d'autres disques de différentes masses sur l'axe, ce qui modifierait le moment d'inertie I. On pourra étudier de cette façon l'influence de la masse sur les diverses énergies et les relations qui existent entre elles.

Arn. Emch (University of Illinois).

(Traduction de J.-P. Dumur, Genève.)

SUR LA REPRÉSENTATION DES DÉTERMINANTS PAR DES SYSTÈMES ARTICULÉS

1. — A propos du calcul des déterminants. — Le calcul numérique d'un déterminant est en général une opération fort laborieuse, dès que l'ordre du déterminant est un peu élevé. On s'en aperçoit notamment dans le cas assez rare où l'on a à résoudre un système d'équations du premier degré, et où il n'est pas possible de simplifier au préalable celui-ci. On sait qu'une racine est donnée par le quotient de deux déterminants identiques, à une colonne près ; or on est obligé néanmoins de développer intégralement chacun des deux déterminants. Nous nous étions demandé, il y a dix ans environ, à propos du calcul d'une voûte par la méthode de l'arc élastique qui conduit à la résolution d'un système

d'équations linéaires, s'il ne serait pas possible de faire apparaître, en vue de simplifications, la partie commune des deux termes dont on cherche le quotient. Il convenait d'abord de mettre le développement d'un déterminant sous la forme d'un monôme. Nous pensâmes à appliquer aux déterminants la conception du système articulé.

2. — Déterminant articulé du second ordre. — Notre point de départ fut la considération du système articulé dans l'instrument dit « pantographe ».

Considérons le système ci-dessous ABCDEF (fig. 1) et posons :

$$AB = a_1^1 , \qquad AD = a_1^2 ,$$

$$BC = a_2^1 , \qquad DE = a_2^2 ,$$

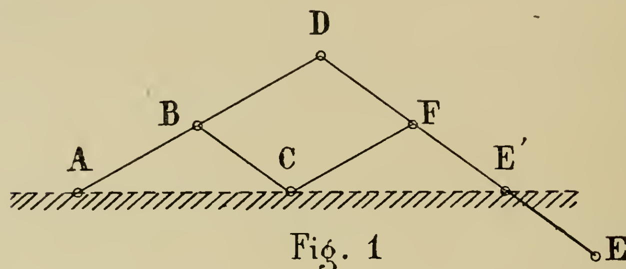


Fig. 1

on a :

$$BD = CF , \qquad DF = BC .$$

Traçons la droite ACE′ et posons :

$$EE' = \alpha_2^2$$

nous avons :

$$\alpha_2^2 = a_2^2 - \frac{a_2^1 \, a_1^2}{a_1^1} ,$$

ou :

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{a_1^1} (a_2^2 \, a_1^1 - a_2^1 \, a_1^2) ,$$

et en posant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

on a :

$$\alpha_2^2 = \frac{\Delta}{a_1^1} \qquad \text{ou enfin :} \qquad \Delta = a_1^1 \alpha_2^2 .$$

Autrement écrivons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' + \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_2^1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

et comme

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & \mathrm{DE}' \end{vmatrix} = 0$$

on a :

$$\Delta = a_1^1 \alpha_2^2 .$$

3. — Déterminant articulé du troisième ordre. — Soit maintenant le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

écrivons-le :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3'^3 + \alpha_3^3 \end{vmatrix}$$

et en posant :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3'^3 \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta_3^3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

on aura

$$\Delta = \Delta' + \alpha_3^3 \Delta_3^3 :$$

or on peut toujours prendre a_3^3 de façon que Δ' soit nul ; par suite on aura

$$\Delta = \alpha_3^3 \Delta_3^3 .$$

et comme on sait que Δ_3^3 est égal à $a_1^1 \alpha_2^2$, on a en définitive :

$$\Delta = a_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 .$$

Considérons maintenant le système articulé ci-dessous (fig. 2) où :

$$AB = a_1^1 , \quad BC = a_2^1 , \quad CD = a_3^1 ,$$

$$AE = a_1^2 , \quad EF = a_2^2 , \quad FG = a_3^2 ,$$

$$AH = a_1^3 , \quad HI = a_2^3 , \quad IK = a_3^3 .$$

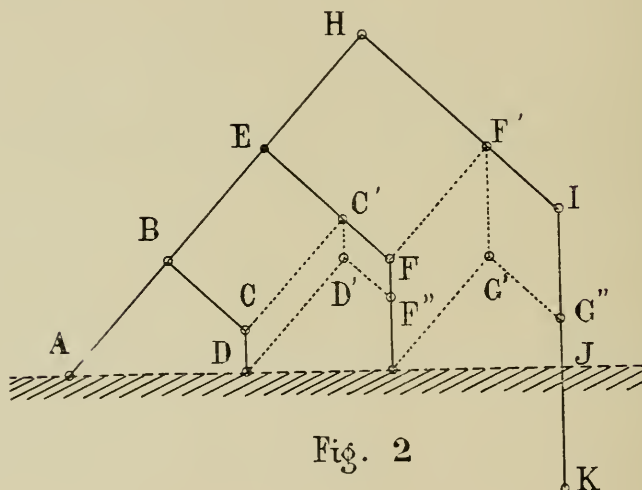


Fig. 2

Les bielles BC, EF, HI d'une part, CD, FG, IK, d'autre part, sont assujetties à rester parallèles, à l'aide de liaisons par bielles faciles à concevoir. Ayant assujetti A et D sur une règle, nous pouvons toujours déplacer le système de façon à amener G sur la même droite. Soit alors J l'intersection de cette droite avec IK, et posons $IJ = a'^3_3$.

Le déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & .. & a_1^3 \\ \dots & & \dots \\ a_3^1 & \dots & a_3'^3 \end{vmatrix}$$

est nul.

En effet, projetons le système sur une perpendiculaire à AD. Soient β_1, β_2, β_3, les cosinus directeurs des côtés. On aura :

$$a_1^1 \beta_1 + a_2^1 \beta_2 + a_3^1 \beta_3 = 0\,,$$

$$a_1^2 \beta_1 + a_2^2 \beta_2 + a_3^2 \beta_3 = 0\,,$$

$$a_1^3 \beta_1 + a_2^3 \beta_2 + a_3'^3 \beta_3 = 0\,.$$

Ce système a des solutions, donc Δ' est nul. Or on a :

$$\Delta = \Delta' + \mathrm{JK} \,.\, \Delta_3^3$$

et par suite

$$\Delta = \Delta_3^3 \,.\, \mathrm{JK} \qquad \text{ou} \qquad \Delta = \Delta_3^3 \,.\, \alpha_3^3\,.$$

Il suffira donc d'aligner à la règle les trois extrémités A, D, G, et de mesurer JK sur IK pour avoir α_3^3.

On a vu d'autre part comment le système articulé ABCEF permet de déterminer α_2^2. On a donc ainsi les trois facteurs du produit qui représente Δ :

$$\Delta = a_1^1 \; \alpha_2^2 \; \alpha_3^3\,.$$

Le système articulé du troisième ordre présente :

3(3 — 1) + 1 = 7	bielles	éléments
3(3 — 1) + 2 = 8	»	de parallélisme
Total. . . 15	»	

4. — Déterminant articulé d'ordre *n*. — La théorie qui précède est générale et s'applique au cas d'un déterminant d'ordre *n* :

$$\Delta = a_1^1 \; \alpha_2^2 \dots \alpha_{n-1}^{n-1} \; \alpha_n^n\,.$$

On obtiendra successivement les facteurs comme ci-dessus.

Le nombre des bielles sera :

1° Bielles éléments :

$$n(n-1)+1 = n^2 - n + 1$$

2° Bielles de parallélisme :

a) Bielles longitudinales (CF')

$$n-1+2(n-1)+\dots(n-1)^2 = \frac{n(n-1)^2}{2}.$$

b) Bielles transversales (F'G')

$$n-1+2(n-1)+\dots(n-2)(n-1) = \frac{(n-2)(n-1)^2}{2}$$

soient $(n-1)^3$ au total pour les bielles de parallélisme et

$$N = (n-1)^3 + (n-1)n + 1$$

pour tout le système.

Application :

Pour

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots\ 10,\ 11,\ \dots$$

on a

$$N = 4,\ 15,\ 40,\ 85,\ \dots\ 820,\ 1111,\ \dots$$

5. — Résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. — Soit le système :

$$a_1^1 x_1 + \dots + a_1^n x_n = A_1\ ,$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$a_n^1 x_1 + \dots + a_n^n x_n = A_n\ .$$

On sait que l'on a :

$$x_p = \frac{D_p}{\Delta}\ , \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

et

$$D_p = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^{p-1} & A_1 & a_1^{p+1} & \dots & a_1^n \\ \dots\dots & & & & & & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^{p-1} & A_n & a_n^{p+1} & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Considérons le système articulé Δ auquel nous ajoutons une colonne — autrement dit un contour polygonal — $A_1\ A_2 \dots A_n$. soit D le système obtenu

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n & A_1 \\ \dots & & & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n & A_n \end{vmatrix}.$$

Ce système, en laissant le contour A, donne Δ, et on calculera :

$$\Delta = a_1^1 \times \alpha_2^2 \times \dots \alpha_n^n ;$$

on calculera de même D_p en excluant le contour a^p :

$$D_p = a_1^1\ \alpha_2^2 \dots \alpha_{p-1}^{p-1}\ \alpha_{p+1}^{p+1} \dots \alpha_n^n\ \beta_p$$

β_p étant le résidu de la dernière colonne A.

D'où

$$x_p = \frac{a_1^1\ \alpha_2^2 \dots \alpha_n^n}{a_1^1 \dots \alpha_{p-1}^{p-1}\ \alpha_{p+1}^{p+1} \dots \beta_p} \quad \text{ou} \quad x_p = \frac{\alpha_p^p}{\beta_p}.$$

La simplification est considérable. Ayant construit le système D, il suffira d'aligner deux fois pour avoir les résidus α_p^p et β_p^p en excluant successivement les colonnes A et a_p. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que la réalisation du système est très compliquée à cause du nombre des bielles, et que la méthode n'a pas d'intérêt pratique.

6. — Dilatation d'un déterminant articulé. — Les éléments d'un déterminant ne sont pas toujours des constantes. Ils peuvent être des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Admettons que les éléments du système articulé soient constitués par des barres métalliques de nature différente ayant des coefficients de dilatation :

$$\begin{matrix} \lambda_1^1, & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \dots & & \dots & \\ \lambda_n^1, & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{matrix}$$

Si la température subit une variation t, les éléments deviennent :

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda_1^1 a_1^1 t & \ldots & a_1^n + \lambda_1^n a_1^n t \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n^1 + \lambda_n^1 a_n^1 t & \ldots & a_n^n + \lambda_n^n a_n^n t \end{vmatrix}.$$

On concevrait facilement le dispositif de bielles et coulisses permettant la conservation du parallélisme des éléments.

L'équation $\Delta(t) = 0$ est une équation en t du degré n, que l'on résoudra en alignant $n - 1$ extrémités et faisant varier la température pour aligner la $n^{\text{ème}}$ sur les précédentes. On conçoit donc la résolution par un procédé physique de l'équation $\Delta(t) = 0$.

7. — Equation en λ. Equation en S. — Les équations en λ et en S que l'on rencontre en géométrie analytique sont un cas particulier du précédent.

Dans le cas de $\Delta(\lambda) = 0$ on a

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1^1 + \lambda a_1'^1 & \ldots & a_1^n + \lambda a_1'^n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n^1 + \lambda a_n'^1 & \ldots & a_n^n + \lambda a_n'^n \end{vmatrix} = 0$$

on voit qu'il faudra poser

$$\begin{aligned} \lambda a_1'^1 &= \lambda_1^1 a_1^1 t\,, \\ \ldots & \quad \ldots \\ \lambda a_n'^n &= \lambda_n^n a_n^n t\,, \end{aligned}$$

ce qui revient à choisir $\lambda_1^1 \ldots \lambda_n^n$ comme suit :

$$\lambda_1^1 = \frac{a_1'^1}{a_1^1}\,, \ldots \lambda_n^n = \frac{a_n'^n}{a_n^n}\,.$$

Dans les cas de $\Delta(S) = 0$

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_1^1 - S & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^1 - S & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - S \end{vmatrix} = 0$$

il faudra poser :

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{a_1^1} \quad \lambda_1^2 = 0 \quad \dots \quad \lambda_1^n = 0$$

$$\lambda_2^1 = 0 \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{a_2^2} \quad \dots \quad \lambda_2^n = 0$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\lambda_n^1 = 0 \quad \lambda_n^2 = 0 \quad \dots \quad \lambda_n^n = \frac{1}{a_n^n}$$

Pratiquement, on ne peut concevoir l'application de ce procédé que pour les racines très petites des équations en S ou en λ, ou encore dans le cas où les termes a sont très grands vis-à-vis de l'unité pour l'équation en S, et vis-à-vis des termes a' pour l'équation en λ.

Dans l'ensemble, l'intérêt pratique de ce qui précède est à peu près nul; il serait peut-être même exagéré de lui attribuer quelque intérêt théorique, cependant la méthode est curieuse, et c'est à ce titre que nous l'avons exposée.

F. Butavand (Alger).

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DE DROITES

Dans mes recherches sur le problème de TRANSON, j'ai été amené à attribuer une importance particulière à la projection orthogonale d'un point fixe O sur chaque rayon d'une congruence ou d'un complexe de droites. Une représentation des congruences dans laquelle on fait jouer un rôle à la projection d'un point O sur chaque rayon se rattache d'ailleurs à la représentation la plus générale d'une congruence de droites par RIBAUCOUR : étant donnée, en effet, une surface (S), RIBAUCOUR associe à chaque point M de cette surface une droite parallèle à la normale à (S) en M et introduit les paramètres qui déterminent la trace de la droite sur le plan tangent à (S) en M ; en supposant la surface (S) réduite à une sphère de rayon nul, on est ainsi amené à envisager la projection d'un point fixe.

Soient p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 les six coordonnées plückériennes d'une droite appartenant à une congruence ; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection P de l'origine O des axes rectangulaires $Oxyz$. Je poserai

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{v+u}{uv+1}, \\ p_2 = i\dfrac{v-u}{uv+1}, \\ p_3 = \dfrac{uv-1}{uv+1}, \end{cases}$$

ce qui revient à prendre pour paramètres ceux qui déterminent les génératrices rectilignes de la sphère de centre O et de rayon un. Il résulte de ces expressions (1) des relations remarquables et dont l'emploi est fréquemment avantageux.

Par dérivations partielles des fonctions p_1, p_2, p_3, il vient :

$$(1+uv)^2\frac{\partial p_1}{\partial u} = 1 - v^2, \quad (1+uv)^2\frac{\partial p_2}{\partial u} = -i(1+v^2), \quad (1+uv)^2\frac{\partial p_3}{\partial u} = 2v;$$

$$(1+uv)^2\frac{\partial p_1}{\partial v} = 1 - u^2, \quad (1+uv)^2\frac{\partial p_2}{\partial v} = i(1+u^2), \quad (1+uv)^2\frac{\partial p_3}{\partial v} = 2u;$$

de ces relations résultent les suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\mathop{S}_{k=1}^{k=3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial u}\right)^2 = 0, \quad \mathop{S}_{k=1}^{k=3}\left(\frac{\partial p_k}{\partial v}\right)^2 = 0, \\ \displaystyle\mathop{S}_{k=1}^{k=3}\frac{\partial p_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v} = \frac{2}{(1+uv)^2} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} p_3\dfrac{\partial p_2}{\partial u} - p_2\dfrac{\partial p_3}{\partial u} = i\dfrac{\partial p_1}{\partial u}, & p_3\dfrac{\partial p_2}{\partial v} - p_2\dfrac{\partial p_3}{\partial v} = -i\dfrac{\partial p_1}{\partial v}, \\ p_1\dfrac{\partial p_3}{\partial u} - p_3\dfrac{\partial p_1}{\partial u} = i\dfrac{\partial p_2}{\partial u}, & p_1\dfrac{\partial p_3}{\partial v} - p_3\dfrac{\partial p_1}{\partial v} = -i\dfrac{\partial p_2}{\partial v}, \\ p_2\dfrac{\partial p_1}{\partial u} - p_1\dfrac{\partial p_2}{\partial u} = i\dfrac{\partial p_3}{\partial u}, & p_2\dfrac{\partial p_1}{\partial v} - p_1\dfrac{\partial p_2}{\partial v} = -i\dfrac{\partial p_3}{\partial v}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \frac{D(p_2, p_3)}{D(u, v)} = \frac{-2ip_1}{(1+uv)^2}, \quad \text{etc.}$$

Il existe de même des identités remarquables entre les dérivées du second ordre. Toutes ces relations sont d'ailleurs des cas particuliers de celles que l'on rencontre à propos de l'étude de la représentation sphérique générale des surfaces et des congruences de droites.

De l'expression précédente (4) du déterminant fonctionnel de deux des fonctions p_1, p_2, p_3, il résulte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_4 & \dfrac{\partial p_1}{\partial u} & \dfrac{\partial p_1}{\partial v} \\ p_5 & \dfrac{\partial p_2}{\partial u} & \dfrac{\partial p_2}{\partial v} \\ p_6 & \dfrac{\partial p_3}{\partial u} & \dfrac{\partial p_3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

est nul ; je poserai donc

$$(5)\quad \begin{cases} p_4 = \dfrac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_1}{\partial v} - q\dfrac{\partial p_1}{\partial u}\right), \\ p_5 = \dfrac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_2}{\partial v} - q\dfrac{\partial p_2}{\partial v}\right), \\ p_6 = \dfrac{i}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_3}{\partial v} - q\dfrac{\partial p_3}{\partial v}\right); \end{cases}$$

dans ces formules, p et q sont deux fonctions absolument quelconques de u et de v définies, lorsque les coordonnées plückériennes sont données, par les relations :

$$(6)\quad \begin{aligned} p &= -iSp_4\frac{\partial p_1}{\partial u}, \\ q &= \quad iSp_4\frac{\partial p_1}{\partial v}; \end{aligned}$$

les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la projection P de O deviennent alors :

$$(7)\quad \begin{cases} x_0 = p_3p_5 - p_2p_6 = \dfrac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_1}{\partial v} + q\dfrac{\partial p_1}{\partial u}\right), \\ y_0 = p_1p_6 - p_3p_4 = \dfrac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_2}{\partial v} + q\dfrac{\partial p_2}{\partial u}\right), \\ z_0 = p_2p_4 - p_1p_5 = \dfrac{1}{2}(1+uv)^2\left(p\dfrac{\partial p_3}{\partial v} + q\dfrac{\partial p_3}{\partial u}\right). \end{cases}$$

La comparaison des expressions (4) des moments p_4, p_5, p_6 et des expressions (7) des coordonnées de la projection P de O m'avait conduit à étudier une certaine transformation de droites à laquelle j'ai consacré un premier article dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1909, p. 249). Les articles *Sur les surfaces de M. Appell* (1910, p. 145) et *Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale* (1911, p. 165) concernent des applications de la même transformation de droites ; j'ai montré que, dans cette transformation, les seules congruences de normales qui conservent leur propriété d'être normales à des surfaces sont les congruences de normales aux surfaces de M. Appell ; toute autre congruence de normales est transformée en une

congruence de droites qui admet un point pour surface centrale; cette remarque permet de déterminer toutes les congruences qui jouissent de cette dernière propriété et de les définir géométriquement. L'une de ces congruences est constituée par les génératrices des quadriques du système de LAMÉ découvert par M. G. HUMBERT : cette remarque a été faite par M. E. KERAVAL dans un Mémoire *Sur les surfaces partiellement cylindroïdes* (*Nouvelles Annales*, 1910, p. 529) et — ainsi que je m'en suis aperçu depuis la publication de mon troisième article — par M. J. HAAG dans son récent Mémoire *Sur certains mouvements remarquables et leurs applications* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1910, p. 357).

Les résultats auxquels j'ai consacré les articles cités sont susceptibles d'être généralisés : les formules (5) permettent d'étudier les transformations de droites avec conservation de la direction et d'attacher à toute transformation de cette nature une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, particulièrement simple, et qui représente les congruences de normales qui restent invariantes.

La propriété fondamentale est celle des fonctions p et q lorsque la congruence représentée par les formules (5) est une congruence de normales : la *condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit une congruence de normales est que les fonctions* p *et* q *soient les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à* u *et à* v *respectivement.* Cette propriété découle immédiatement des expressions des coordonnées plückériennes de la normale, en un point quelconque, à une surface quelconque définie comme enveloppe du plan d'équation

$$p_1 x + p_2 y + p_3 z = \varpi(u, v) ;$$

il est possible aussi de la rattacher, au moyen des formules (7), à la relation générale

$$\frac{\partial(x_0, p_1)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(y_0, p_2)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(z_0, p_3)}{\partial(u, v)} = 0$$

qui caractérise les congruences de normales.

Étant donnée une droite définie par u, v, p et q, si on pose

$$F(p, q, p', q') = 0, \qquad G(p, q, p', q') = 0,$$

F et G étant deux fonctions quelconques des quatre variables p, q, p', q', on établit ainsi une certaine correspondance entre les droites (u, v, p, q) et (u, v, p', q'). Si en outre on suppose p et q fonctions de (u, v), les formules précédentes définissent p' et q' comme fonctions de (u, v) et par conséquent établissent une correspondance entre deux congruences de droites. Cette correspondance entre congruences se fait au moyen d'une transformation de droites, avec conservation de la direction ; les formules $F = 0$ et $G = 0$ étant données, la transformation géométrique est parfaitement définie et est indépendante de la considération des congruences (p, q) ou (p', q').

Je me propose de déterminer celles des congruences (p, q) et (p', q') qui sont simultanément des congruences de normales. Il suffit d'écrire que, p' et q' étant les dérivées d'une même fonction, il en est de même de p et q. La condition de compatibilité

$$(F, G) = 0$$

conduit au résultat suivant : la *fonction* ϖ, *dont* p *et* q *sont les dérivées partielles, est l'intégrale générale d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du second ordre et qui est invariante dans la dilatation infinitésimale ;* il en est de même de la fonction ϖ' dont p' et q' sont les dérivées. A toute correspondance $F = 0$, $G = 0$ est ainsi associée une équation du second ordre unique si la correspondance est réciproque ; sinon on doit associer deux équations définissant respectivement ϖ et ϖ'.

Si, en particulier, les formules $F = 0$ et $G = 0$ sont supposées résolues par rapport à p' et q', par exemple, c'est-à-dire si l'on pose

$$(8) \qquad \begin{cases} p' = P(p, q), \\ q' = Q(p, q), \end{cases}$$

l'équation définissant ϖ est l'équation

$$(9) \qquad r\frac{\partial Q}{\partial p} + s\left(\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p}\right) - t\frac{\partial P}{\partial q} = 0 .$$

Plus particulièrement encore, supposons que la correspondance s'établisse par une transformation de droites définies par les formules :

$$p' = \text{fonction de } p ,$$
$$q' = \text{fonction de } q :$$

l'équation devient alors

$$\left(\frac{dQ}{dq} - \frac{dP}{dp}\right)s = 0 .$$

Si l'on a

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{dP}{dp}$$

c'est-à-dire

$$p' = ap + a_1 , \qquad q' = ap + a_2 ,$$

la transformation est une homothétie conservant toutes les congruences de normales. Sinon les seules congruences de normales qui conservent leur propriété sont définies par l'équation

$$s = 0 ,$$

qui caractérise les congruences de normales aux surfaces de M. Appell. Ce théorème généralise celui que j'avais antérieurement établi relativement à la transformation de droites

$$p' = -ip , \qquad q' = iq ,$$

dont le produit par une symétrie par rapport au point O est précisément la transformation de droites précédemment étudiée.

Étant donnée une équation linéaire et homogène du second ordre

$$(10) \qquad Hr + 2Ks + Lt = 0 ,$$

dans laquelle H, K, L sont des fonctions de p et de q, on peut se proposer de déterminer toutes les transformations (8)

$$(8) \qquad p' = P(p, q) \qquad q' = Q(p, q)$$

auxquelles cette équation est attachée. λ et μ étant deux fonctions auxiliaires de p et de q, on devra avoir, d'après la forme de (9),

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= \lambda H \quad, & \frac{\partial P}{\partial p} &= \mu - \lambda K \;, \\ \frac{\partial Q}{\partial q} &= \mu + \lambda K \;, & \frac{\partial P}{\partial q} &= - \lambda L \quad ; \end{aligned} \right.$$

d'où il résulte tout d'abord deux relations définissant les dérivées de μ :

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial q}(\lambda H) - \frac{\partial}{\partial p}(\lambda K) \;, \\ \frac{\partial \mu}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q}(\lambda K) - \frac{\partial}{\partial p}(\lambda L) \;, \end{aligned} \right.$$

et finalement une équation linéaire du second ordre définissant λ :

$$(13)\quad \frac{\partial^2(\lambda L)}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2(\lambda K)}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2(\lambda H)}{\partial q^2} = 0 \;;$$

les fonctions H, K, L de p, q étant données, on intégrera d'abord l'équation (13) ; soit λ une intégrale ; les formules (12) permettront de calculer μ ; les formules (11) donneront ensuite les fonctions cherchées P et Q.

Comme premier exemple, on peut prendre l'équation des surfaces de M. Appell

$$s = 0 \;,$$

et l'on est conduit à prendre pour P une fonction arbitraire de p, et pour Q une fonction arbitraire de q.

Comme second exemple, soit l'équation de Laplace,

$$\Delta\varpi = r + t = 0 \;;$$

l'équation (13) est elle-même l'équation de Laplace $\Delta\lambda = 0$: on doit alors prendre pour $P + iQ$ une fonction arbitraire de $p + iq$ et pour $P - iQ$ une autre fonction également arbitraire de $p - iq$.

É. Turrière (Alençon).

SUR LA THÉORIE DES CONIQUES

1. — Depuis l'introduction de l'étude des sections planes des cônes à base circulaire au programme de géométrie descriptive de la classe de Mathématiques en France, deux auteurs se sont proposés de simplifier la démonstration du théorème suivant : *la perspective d'un cercle est une conique.*

La démonstration donnée par M. HADAMARD[1] (*N. A.*, avril 1905) s'appuie sur le théorème de Dandelin. Celle de M. REBEIX (*N. A.*, mars 1910) a l'inconvénient, au point de vue de l'enseignement, de s'appuyer sur une définition tangentielle des coniques. Je donne ici une démonstration très élémentaire, ne supposant pas connue la notion de rapport anharmonique; j'indique ensuite comment, en supposant connue cette notion, on pourrait abréger les démonstrations.

I. — Méthode élémentaire[2].

2. — Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME I. A *et* A' *étant deux points diamétralement opposés d'une ellipse ou d'une hyperbole,* AT *et* A'T' *les tangentes en ces points :* 1° *La tangente en un point variable* M *coupe ces deux tangentes aux points* P *et* P' *tels que le produit* $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'}$ *est constant;* 2° *le point* M *partage le segment* P, P' *dans le rapport de* $-\overline{AP}$ *à* $\overline{A'P'}$; 3° *la droite* A'M *coupe* AT *au point* Q, AM *coupe* A'T' *en* Q' *tels que* $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AP}$, $\overline{A'Q'} = 2\overline{A'P'}$, *par suite* $\overline{AQ} \times \overline{A'Q'} = C^{te}$.

---

[1] M. Hadamard a repris la question, par une méthode plus simple, dans la nouvelle édition de son traité de Géométrie.

[2] Cette exposition est, à peu de choses près, le résumé d'une leçon faite à mes élèves de Mathématiques spéciales préparatoires en décembre 1909.

Considérons par exemple le cas de l'ellipse, soit (fig. 1) F l'un des foyers, FX la parallèle aux tangentes AT, A'T' menée par F. D'après le théorème de Poncelet, nous avons $\widehat{AFP} = \widehat{PFM}$, et $\widehat{MFP'} = \widehat{P'FA'}$. l'angle $\widehat{PFP'}$ est donc égal

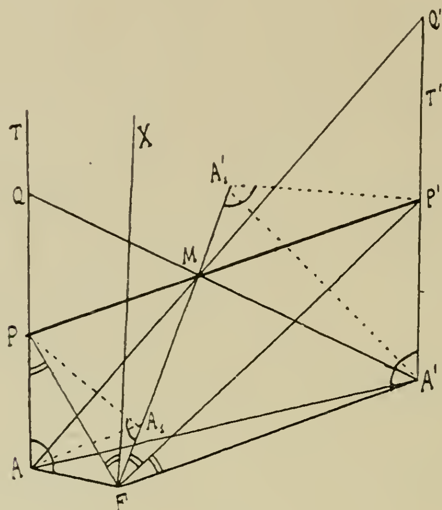


Fig. 1.

à la moitié de $\widehat{AFA'}$, et par suite égal à $\widehat{XFA'}$. Nous déduisons de là l'égalité des angles $\widehat{PFX}$ et $\widehat{P'FA'}$, ou

$$\widehat{APF} = \widehat{P'FA'} \ ,$$

les deux triangles APF, A'FP' sont donc semblables (les angles A et A' étant évidemment égaux), d'où il suit

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = AF \cdot A'F$$

(dans le cas de l'hyperbole on aurait $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = - AF \cdot A'F$) ce qui démontre la première partie.

Le symétrique A_1 de A par rapport à la droite PF est sur FM, de même le symétrique A'_1 de A_1 par rapport à FP' est

sur la droite FM, et de plus l'égalité des angles $\widehat{PAF}$ et $\widehat{P'A'F}$ entraîne celle de $\widehat{PA_1F}$ et $\widehat{P'A'_1F}$, par suite

$$\pm \frac{PA_1}{P'A'_1} = \frac{\overline{PM}}{\overline{P'M}} = - \frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} ,$$

(dans le premier rapport on a le signe — pour l'ellipse, + pour l'hyperbole), la deuxième partie est donc démontrée.

Enfin Q étant le point d'intersection de MA' avec AT, nous avons

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{A'P'}} = - \frac{\overline{PM}}{\overline{P'M}} = + \frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} ,$$

d'où

$$\overline{PQ} = \overline{AP} .$$

De même

$$\overline{P'Q'} = \overline{A'P'} ,$$

d'où il suit la troisième partie.

3. — *Conséquences et réciproque dans le cas de l'ellipse.* — Prenons pour AA' le grand axe de l'ellipse, si $2b$ désigne la grandeur du petit axe, on voit (en plaçant M en l'un des sommets de ce petit axe) que l'on a :

$$\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'} = 4b^2 .$$

Si M_1 est le point du cercle principal ayant la même projection R sur AA' (et situé du même côté de AA'); $A'M_1$ coupera AQ en Q_1; AM_1 coupe $A'Q$ en Q'_1 et l'on a

$$\overline{AQ_1} \cdot \overline{A'Q'_1} = 4a^2$$

puisque l'angle AM_1A' est droit. Mais on a par des triangles semblables évidents :

$$\overline{AQ_1} = \overline{AQ} \cdot \frac{M_1R}{MR} , \qquad \overline{A'Q'_1} = \overline{A'Q'} \frac{M_1R}{MR} ,$$

par suite la comparaison des deux égalités précédentes donne

$$\frac{M_1R}{MR} = \frac{a}{b} .$$

Nous obtenons donc le résultat connu :

L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle.

On déduira alors de là la construction d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués[1], ce qui nous permet de démontrer la réciproque du théorème I.

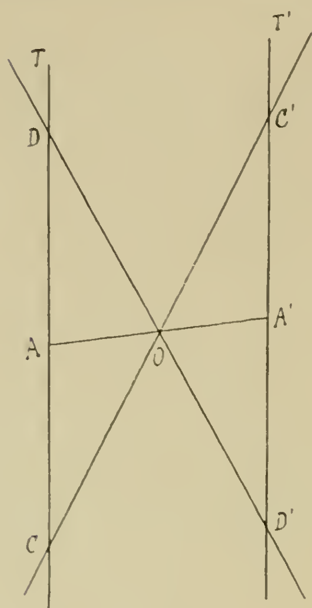


Fig. 2.

THÉORÈME II_1. *Etant données deux parallèles* T, T', *menées par deux points* A, A'; *le lieu des points* M, *tels que le produit* $\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'}$ *des segments interceptés sur* T *et* T' *par les droites* A'M, AM, *est constant et égal à* $4b^2$, *est l'ellipse ayant pour diamètres conjugués* AA' *et la parallèle aux droites* T, T' *de longueur* $2b$.

Il y a en effet identification entre l'ellipse et le lieu considéré, une droite quelconque passant par A coupant l'ellipse et le lieu au même point.

4. — *Cas de l'hyperbole.* Pour l'hyperbole les asymptotes étant des tangentes particulières coupent (fig. 2) les tangentes AT, A'T', aux points C, C' D, D', et l'on a :

$$\overline{AC} \cdot \overline{A'C'} = -\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{A'D'} = -\overline{AD}^2 \ ,$$

d'où $\overline{AD} = -\overline{AC}$[2]. Il résulte de là que la droite AA' et la parallèle à AT menée par son milieu, qui sont des diamètres conjugués pour l'hyperbole, le sont aussi pour les asymptotes ; donc :

---

[1] L'existence des diametres conjugués résulte du théorème I immédiatement.

[2] Ceci montre que le point de contact d'une tangente est le milieu du segment déterminé par les asymptotes sur cette tangente.

Les milieux des segments interceptés par une droite sur l'hyperbole et les asymptotes coïncident.

On déduit de là les propriétés de l'hyperbole relativement aux asymptotes et la définition de l'hyperbole donnée par un point et ses asymptotes.

Enfin la troisième partie du théorème I s'écrit :

$$\overline{AQ}\cdot\overline{A'Q'} = -\overline{4AC}^2$$

De ces propriétés résulte la réciproque du théorème I :

Théorème II_2. *Étant données deux parallèles* T, T′, *menées par deux points* A *et* A′ ; *le lieu des points* M, *tels que*

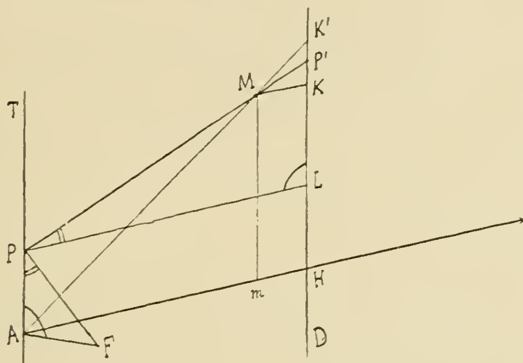


Fig. 3.

le produit $\overline{AQ}\cdot\overline{A'Q'}$ *des segments interceptés sur* T *et* T′ *par les droites* A′M, AM, *est constant et égal à* $-4b^2$, *est l'hyperbole passant en* A *et* A′ *et ayant pour asymptotes les droites* CC′, DD′, *telles que* $AD = \overline{A'C'} = -\overline{AC} = -\overline{A'D'} = b$.

En effet, une droite quelconque passant par A coupe l'hyperbole et le lieu au même point.

5. — *Propriétés correspondantes de la parabole.* Nous obtiendrons ici le théorème suivant :

A *étant un point d'une parabole*, D *une parallèle à la tangente en* A, *qui coupe la parallèle à l'axe passant en* A *au point* H *intérieur à la parabole ; la droite joignant un point variable* M *de la parabole à* A, *coupe la droite* D *en* K′; *la*

parallèle à l'axe passant par M *coupe la droite* D *au point* K, *tels qu'on ait*

$$\overline{HK} \cdot \overline{HK'} = 4 \cdot AH \cdot AF \ ,$$

F *étant le foyer.*

Soient, en effet (fig. 3), P et P′ les points où la tangente en M coupe la tangente en A, et la droite D; L le point où la parallèle à l'axe menée par P coupe la droite D; nous avons, d'après la propriété de la tangente en A, $\widehat{PAF} = \widehat{PLP'}$; et d'après le théorème de Poncelet $\widehat{APF} = \widehat{LPP'}$, par suite les triangles APF, LPP′ sont semblables, d'où :

$$\frac{LP'}{AF} = \frac{PL}{AP} \ ,$$

ce qui peut s'écrire comme PL = AH,

$$LP' \cdot AP = AF \cdot AH \ .$$

D'autre part, et encore d'après le théorème de Poncelet [1], $\overline{LK} = \overline{HL}$, d'où nous tirons

$$\overline{HK} = 2\overline{AP} \ , \qquad \text{et aussi} \qquad \overline{HK'} = 2\overline{LP'} \ ,$$

de sorte que la relation précédente devient, en remarquant que HK et HK′ sont toujours de même sens, si H est intérieur à la parabole,

$$\overline{HK} \cdot \overline{HK'} = 4 \cdot AH \cdot AF \ ,$$

c'est la propriété annoncée [2].

La réciproque s'obtiendra encore par identification :

Théorème II_3. *Etant donnés le point* A, *la droite* D *et le point* H *de cette droite; le lieu des points* M, *tels que le produit des segments* HK′, HK, *interceptés par la droite* AM *et la parallèle à* AH *passant par* M, *est constant et égal à*

---

[1] Cette partie du théorème de Poncelet (qui correspond à l'égalité $\widehat{AFP} = \widehat{PFM}$) n'est pas énoncée en général, on en déduit immédiatement la propriété de la sous-tangente.

[2] m étant le point d'intersection de la parallèle à D passant en M avec AA′, on obtiendrait facilement la relation

$$\overline{Mm}^2 = 4Am \cdot AF \ .$$

Si H est extérieur, on aura HK · HK′ = — 4AH · AF .

$4\overline{AH} \cdot l$, *est une parabole dont l'axe est parallèle à* AH, *qui passe par* A *et dont le foyer* F *est sur la symétrique de* AH *par rapport à la parallèle à* D *menée par* A, *à une distance égale à* l, *et du côté de* H.

(Si l était négatif on porterait la longueur $|l|$ en sens contraire.)

Des trois théorèmes II, on peut déduire une proposition générale :

Théorème général. *Etant donnés deux points* A, A' (*dont l'un peut être à l'infini*), *et une droite* D (*ne passant ni par* A, *ni par* A'), *le lieu des points* M *tels que le produit des segments interceptés sur la droite* D *par les angles* MAA', MA'A, *est constant, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole*[1].

C'est une parabole si l'un des points est à l'infini (théorème II_3), une ellipse si la constante donnée est du signe contraire au rapport des segments déterminés par D sur la droite AA', et une hyperbole dans l'autre cas. On ramène en effet ces deux cas aux théorèmes II_1 ou II_2.

6. — *Perspective d'une conique.* Le théorème sur la perspective d'une conique (ou la projection parallèle) résulte immédiatement du théorème général précédent. Soit une conique Γ contenue dans un plan Π, S le point de vue et Π_1 le plan sur lequel on projette. Supposons que l'on puisse mener à Γ des tangentes (une tangente pour une parabole) parallèles à la droite D d'intersection des plans Π et Π_1, soient A et A' les points de contact, M un point quelconque de Γ, les droites AM, A'M, AA' coupent D aux points Q, Q' et H et nous avons

$$\overline{HQ} \cdot \overline{HQ'} = C^{te} .$$

Soient A_1, A'_1, M_1 les perspectives de A, A', M ; la droite A_1M_1 coupe D au point Q, A'_1M_1 en Q' et $A_1A'_1$ en H, et, d'après la relation précédente et le théorème général, on voit que le lieu de M_1 est une conique.

Si l'on ne peut pas mener de tangentes à Γ parallèle à D

---

[1] Ce théorème donne par une construction de moyenne proportionnelle les points d'intersection d'une droite D avec une conique définie par les points où la tangente est parallèle à D et un autre point. (Application à la construction des tangentes au point double de l'intersection de deux cônes du second degré.)

ce qui nécessite que Γ soit une hyperbole), on prendra un plan auxiliaire Π'' coupant Π suivant une droite D' parallèle à une tangente à Γ, et on choisira ce plan de façon que la perspective de Γ sur lui soit une ellipse, en projetant cette ellipse sur Π' on aura la perspective de Γ qui sera bien une conique.

II. — Méthode des projections.

7. — Le théorème I (3e partie) et le théorème correspondant pour la parabole sont un cas particulier du théorème connu :

Les rapports anharmoniques des deux faisceaux de droites ioignant deux points d'une conique à quatre autres points de la conique sont les mêmes, théorème évident pour le cercle et qui s'étend aux coniques par projection (théorème de Dandelin).

En effet, en joignant le point A aux points A, M, M_1, A', et le point A' aux mêmes points on aura, en coupant les deux faisceaux obtenus par les tangentes en A' et A

$$(A, Q, Q_1, \infty) = (\infty, Q', Q'_1, A')$$

d'où

$$\overline{AQ} \cdot \overline{A'Q'} = \overline{AQ_1}\,\overline{A'Q'_1} = C^{te}.$$

Les théorèmes inverses se déduiront comme précédemment[1], mais le théorème sur la perspective d'une conique pourra se démontrer de la façon suivante :

Soit Δ l'intersection du plan Π de la conique Γ avec le plan parallèle à Π' mené par S, et soit τ un point de la droite Δ extérieur à Γ, A et A' les points de contact des tangentes menées par ce point, M et M' deux points quelconques de Γ, on a

$$A'(\tau M M' A) = A(A' M M' \tau).$$

En désignant par A_1, A'_1, M_1, M'_1 les projections de A, A', M, M', par Q, Q_1 les points d'intersection des droites A'_1M_1,

[1] Le théorème sur le milieu des segments interceptés par une hyperbole et ses asymptotes sur une droite peut se déduire du théorème de Pascal.

$A'_1M'_1$ avec la perspective de $A\tau$, par Q, Q'_1 les intersections de A_1M_1, $A_1M'_1$ avec la perspective de $A'\tau$, on aura comme la perspective de τ est à l'infini

$$\overline{A_1Q} \cdot \overline{A'_1Q'} = \overline{A_1Q_1}\ \overline{A'_1Q'_1} = C^{te}$$

et comme les droites A_1Q_1, $A'_1Q'_1$ sont parallèles, le lieu du point M_1 est une conique.

G. Valiron (Besançon).

SUR UNE THÉORIE DE LA MESURE

A propos d'un article de M. G. Combebiac.

Dans son étude sur une théorie de la mesure publiée dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1910, M. G. Combebiac considère les fonctions $F(x, y)$ possédant les propriétés suivantes :

1° $F(x, y)$ est continue et croissante comme fonction de y, continue et décroissante comme fonction de x ; il s'ensuit qu'elle est encore continue comme fonction des deux variables x et y.

2° Les valeurs de $F(x, y)$ et de $F(x, z)$ déterminent la valeur de $F(y, z)$.

En supposant de plus que la fonction $F(x, y)$ possède des dérivées premières continues, M. Combebiac établit qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\Phi\{f(y) - f(x)\},$$

où Φ et f sont des fonctions continues, croissant avec leur argument.

Je me propose de démontrer ici, comme M. Combebiac le présume, que ce résultat est indépendant de l'existence des dérivées de $F(x, y)$.

1. — Si nous ne considérons des valeurs de x que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_1, et des valeurs de y que celles qui sont comprises dans un certain intervalle i_2, x est une fonction continue de F et de y, croissante comme fonction de y, décroissante comme fonction de F.

En effet, si cette fonction n'était pas continue, on pourrait déterminer une telle suite de valeurs x', x'', x''', ... possédant une seule valeur limite x_l, et une telle suite de valeurs y', y'', y''', ... possédant une seule valeur limite y_l, que

$$\lim F(x^{(n)}, y^{(n)}) = F(x_a, y_l),$$

où x_a serait une valeur différente de x_l, ce qui est absurde, puisque d'autre part $\lim F(x^{(n)}, y^{(n)})$ doit être égale à $F(x_l, y_l)$.

Cette propriété établie, choisissons deux nombres arbitraires a et b. Il existe un intervalle i_b contenant b, tel que, le nombre β étant arbitrairement choisi dans i_b, on peut déterminer un nombre α satisfaisant l'égalité

$$F(\alpha, \beta) = F(a, b) = \gamma. \tag{1}$$

Soit γ' un nombre variable différant suffisamment peu de γ, et tendant vers γ. Il détermine un nombre β' tendant vers β, et un nombre b' tendant vers b, tels que

$$F(\alpha, \beta') = F(a, b') = \gamma'. \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2) nous concluons

$$F(\beta, \beta') = F(b, b'),$$

ou en passant à la limite

$$F(\beta, \beta) = F(b, b).$$

C'est dire que le nombre arbitraire b est contenu dans un intervalle i_b, dans lequel $F(x, x)$ est une constante. *Donc* $F(x, x)$ *est une constante dans tout le continu numérique.* Désignons cette constante par j.

2. — Choisissons arbitrairement deux nombres d_0 et d_1, et déterminons une série de nombres

$$\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots,$$

se succédant dans leur succession naturelle, et satisfaisant la relation

$$F(d_n, d_{n+1}) = F(d_0, d_1) = \nu.$$

Cette série, prolongée autant que possible de chaque côté, où d'ailleurs elle peut être trouvée finie ou infinie, sera désignée par σ.

Entre d_0 et d_1 il existe un nombre $d_{\frac{1}{2}}$, défini univoquement par la relation

$$F(d_0 \,,\, d_{\frac{1}{2}}) = F(d_{\frac{1}{2}} \,,\, d_1) \,.$$

Les nombres d_0 et $d_{\frac{1}{2}}$ définissent une série σ' :

$$\ldots,\, d_{-\frac{3}{2}} \,,\, d_{-1} \,,\, d_{-\frac{1}{2}} \,,\, d_0 \,,\, d_{\frac{1}{2}} \,,\, d_1 \,,\, d_{\frac{3}{2}} \,,\, \ldots$$

contenant les éléments de la série σ, et telle qu'on a pour chaque $d_{\frac{n}{2}}$:

$$F(d_{\frac{n}{2}} \,,\, d_{\frac{n+1}{2}}) = F(d_0 \,,\, d_{\frac{1}{2}}) = v' \,.$$

Si σ ne possède pas de premier élément, σ' n'en possède pas non plus. Si, au contraire, σ possède un premier élément, c'est ou le premier, ou le second élément de σ'.

Si σ ne possède pas de dernier élément, σ' n'en possède pas non plus. Si, au contraire, σ possède un dernier élément, c'est ou le dernier, ou l'avant-dernier élément de σ'.

En opérant sur σ' comme sur σ, on obtient une série σ'' :

$$\ldots,\, d_{-\frac{3}{2}} \,,\, d_{-\frac{5}{4}} \,,\, d_{-1} \,,\, d_{-\frac{3}{4}} \,,\, d_{-\frac{1}{2}} \,,\, d_{-\frac{1}{4}} \,,\, d_0 \,,\, d_{\frac{1}{4}} \,,\, d_{\frac{1}{2}} \,,\, \ldots$$

contenant les éléments de σ', et telle qu'on a pour chaque $d_{\frac{n}{4}}$:

$$F(d_{\frac{n}{4}} \,,\, d_{\frac{n+1}{4}}) = F(d_0 \,,\, d_{\frac{1}{4}}) = v'' \,.$$

En répétant la même opération un nombre infini de fois, on obtient *un ensemble e, composé des nombres $d_{\frac{n}{2^m}}$ appartenant à l'ensemble des séries $\sigma^{(m)}$*.

3. — L'ensemble e possédant au moins une valeur limite finie, on peut faire tendre une suite d'intervalles $(d_{\frac{n}{2^m}} \,,\, d_{\frac{n+1}{2^m}})$ vers une seule valeur limite finie. Par conséquent $\lim v^{(m)} = j$, et toute suite d'intervalles $(d_{\frac{n}{2^m}} \,,\, d_{\frac{n+1}{2^m}})$, dont chaque terme fait partie du terme précédent, tend vers une seule valeur limite finie.

De plus, l'ensemble e ne peut pas posséder de limite supérieure l_s, puisque celle-ci entraînerait l'existence d'un nombre l'_s supé-

rieur à l_s et d'un entier positif p tels que $F(l_s, l'_s) = v^{(p)}$, de sorte que l'_s serait, comme l_s, point limite de l'ensemble e.

Donc *l'ensemble e est partout dense dans le continu numérique.*

4. — Nous définissons une fonction $f(x)$ de la manière suivante :

Si x est un nombre $d_{\frac{n}{2^m}}$ de l'ensemble e, $f(x)$ sera égal à l'indice $\frac{n}{2^m}$. Si, au contraire, x n'appartient pas à e, toute suite de nombres appartenant à e et tendant vers x, aura la même valeur pour limite des indices, et c'est cette valeur limite que nous assignerons à $f(x)$.

Alors *$f(x)$ est une fonction continue et croissante de x.*

Par conséquent $F(x, y)$ *est une fonction continue de $f(y)$ et de $f(x)$, croissante comme fonction de $f(y)$, décroissante comme fonction de $f(x)$.*

5. — Soient x_1, y_1, x_2, y_2 quatre nombres arbitraires satisfaisant la relation

$$f(y_2) - f(x_2) = f(y_1) - f(x_1) . \qquad (3)$$

Soient $x'_1, x''_1, x'''_1, \ldots$; $x'_2, x''_2, x'''_2, \ldots$; $y'_1, y''_1, y'''_1, \ldots$ des suites de nombres appartenant à e, et tendant la première vers x_1, la seconde vers x_2, la troisième vers y_1.

Déterminons $y_2^{(r)}$ de manière que

$$f(y_2^{(r)}) - f(x_2^{(r)}) = f(y_1^{(r)}) - f(x_1^{(r)}) . \qquad (4)$$

Alors $y_2^{(r)}$ appartient à e, et la relation (4) entraîne celle-ci :

$$F(x_2^{(r)}, y_2^{(r)}) = F(x_1^{(r)}, y_1^{(r)}) .$$

Comme d'autre part la série $y'_2, y''_2, y'''_2, \ldots$ tend vers y_2, on a, en passant à la limite :

$$F(x_2, y_2) = F(x_1, y_1) . \qquad (5)$$

Par conséquent l'égalité (3) entraîne l'égalité (5) ; c'est dire que $F(x, y)$ est une fonction de $f(y) - f(x)$ seulement.

En combinant ce résultat avec la propriété déduite dans le § précédent, nous concluons :

$F(x, y)$ *est une fonction continue et croissante de $f(y) - f(x)$.*

C. Q. F. D. L.-E.-J. Brouwer (Amsterdam).

NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LES FONCTIONS DE MESURE

La lecture de la Note précédente, que son auteur a eu l'amabilité de me communiquer, a ramené mon attention sur des notes succinctes que j'avais écrites, après la publication de mon article sur la mesure, en vue d'une ébauche d'une théorie des grandeurs. J'ai pensé qu'il ne serait peut-être pas sans intérêt de faire suivre la très intéressante étude de M. Brouwer de ces notes, revues et mises au net, qui, bien que traitant la même question, me paraissent s'écarter suffisamment des procédés de démonstration adoptés par ce savant pour ne pas faire double emploi.

Posons les conditions ou axiomes suivants.

I. $u = F(x, y)$ *est une fonction uniforme, nulle part constante et satisfaisant dans tout le champ des variables à l'équation fonctionnelle*

$$F(x, z) = \Phi[F(x, y), F(y, z)],$$

où Φ *désigne une fonction de deux variables.*

II. *En vertu de l'équation* $u = F(x, y)$, *chacune des variables* x *et* y *est une fonction uniforme de l'autre et de* u.

III. *Le champ* Y *de la variable* y *est contenu dans le champ* X *de la variable* x.

IV. $F(x, y)$ *est croissante comme fonction de* y *et décroissante comme fonction de* x.

V. $F(x, y)$ *est continue comme fonction de chacune de ses variables.*

1. $\Phi(u, v)$ *est croissante et continue comme fonction de chacune de ses variables.*

En effet, si u et v désignent des valeurs quelconques des deux variables et y_0 une valeur déterminée du champ Y, il existe toujours (II et III) des nombres x et z tels que l'on a

$$u = F(x, y_0), \qquad v = F(y_0, z),$$

où u est une fonction décroissante de x, et v une fonction croissante de z (IV), de sorte que x est une fonction de u décroissante

et continue[1] et que, de même, z est une fonction de v croissante et continue; comme, d'autre part, on a (I)

$$\Phi(u, v) = F(x, z)$$

et que $F(x, z)$ est continue comme fonction de chacune des variables (V), il en résulte bien que $\Phi(u, v)$ possède les propriétés spécifiées dans l'énoncé.

Corollaire. *$\Phi(u, u)$ est une fonction croissante de* u.

On a bien, en effet, pour ε positif,

$$\Phi(u+\varepsilon, u+\varepsilon) < \Phi(u+\varepsilon, u) < \Phi(u, u) .$$

2. $F(x, x)$ *a une valeur constante.*

On a toujours, en effet (I)

$$F(x, y) = \Phi[F(x, x), F(x, y)] .$$

Pour une valeur déterminée v_0 de $F(x, y)$, à toute valeur de x correspond toujours (II) une valeur de y satisfaisant à la relation

$$v_0 = F(x, y) .$$

On aura donc pour toute valeur de x

$$v_0 = \Phi[F(x, x), v_0)] ;$$

mais, $\Phi(u, v_0)$ étant une fonction croissante de u (1), une de ses valeurs, soit v_0, ne peut correspondre à plus d'une seule valeur de u, de sorte que la relation précédente ne peut être satisfaite que pour une seule valeur de $F(x, x)$, qui est donc bien indépendante de x.

3. $\Phi(u, v)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle des groupes paramétraux :*

$$\Phi[u_1, \Phi(u_2, u_3)] = \Phi[\Phi(u_1, u_2), u_3] .$$

En effet, x_0 désignant un nombre arbitrairement choisi dans le champ X, il existe toujours dans le champ Y (II et III) trois nombres x_1, x_2 et x_3 qui appartiennent aussi au champ X (IV) et qui sont tels que l'on aura

$$u_1 = F(x_0, x_1) , \qquad u_2 = F(x_1, x_2) , \qquad u_3 = F(x_2, x_3) ;$$

par conséquent, en appliquant de deux manières la relation fon-

[1] L'inverse d'une fonction monotone (à fortiori, d'une fonction croissante ou décroissante) est évidemment une fonction croissante ou décroissante et continue partout où la continuité conserve une signification, c'est-à-dire où le champ est dense en lui-même.

damentale (I), on aura

$$F(x_0, x_3) = \begin{cases} \Phi[F(x_0, x_1), F(x_1, x_3)] = \Phi[u_1, \Phi(u_2, u_3)] \\ \Phi[F(x_0, x_2), F(x_2, x_3)] = \Phi[\Phi(u_1, u_2), u_3] . \end{cases}$$

Il en résulte bien la relation à établir.

4. F(x, y) *est une fonction croissante et continue d'une expression de la forme* f(y) — f(x), *où* f(x) *est une fonction croissante et continue.*

x_0 et x_1 désignant deux nombres du champ X tels que $x_0 < x_1$, il existe toujours (II et III) une suite de nombres $x_2, x_3, \dots x_\nu, \dots$ tels que l'on a

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\nu < x_{\nu+1} < \dots$$

$$F(x_0, x_1) = F(x_1, x_2) = \dots = F(x_\nu, x_{\nu+1}) = \dots$$

Si l'on pose

$$x_0 = \varphi(0) , \quad x_1 = \varphi(1) , \dots \quad x_\nu = \varphi(\nu) , \dots$$

les égalités précédentes pourront s'écrire

$$F[\varphi(0), \varphi(1)] = F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] ,$$

avec $\varphi(\nu) < \varphi(\nu+1)$.

On a d'ailleurs (2)

$$F[\varphi(0), \varphi(0)] = F[\varphi(p), \varphi(p)] ,$$

égalité qui est évidemment un cas particulier (pour $\nu = 0$) de la suivante

$$(1) \qquad F[\varphi(0), \varphi(\nu)] = F[\varphi(p), \varphi(p+\nu)] .$$

Cette dernière sera donc établie si l'on démontre que, vraie pour un nombre entier quelconque ν, elle doit l'être aussi pour $\nu + 1$; c'est bien en effet ce qui résulte des égalités suivantes, qui sont des conséquences de l'égalité (1) et de la propriété (I),

$$\begin{aligned} F[\varphi(0), \varphi(\nu+1)] &= \Phi\{F[\varphi(0), \varphi(\nu)], F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)]\} \\ &= \Phi\{F[\varphi(0), \varphi(\nu)], F[\varphi(0), \varphi(1)]\} \\ &= \Phi\{F[\varphi(p), \varphi(p+\nu)], F[\varphi(p+\nu), \varphi(p+\nu+1)]\} \\ &= F[\varphi(p), \varphi(p+\nu+1)] . \end{aligned}$$

La fonction de x $F(x, x_1) - F(x_0, x)$ est continue (V) et prend, pour $x = x_0$ et $x = x_1$, des valeurs égales et de signes con-

traires (2) : elle s'annule donc dans l'intervalle (x_0, x_1) en un point, qui pourra être désigné par $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, de sorte que l'on pourra écrire

$$F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{avec} \quad \varphi(0) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(1).$$

En opérant de même pour les autres intervalles, on pourra aussi écrire

$$F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right),\ \varphi(\nu + 1)\right]$$

avec

$$\varphi(\nu) < \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) < \varphi(\nu + 1).$$

On a d'ailleurs, d'après I et la formule (1), évidemment applicable aux nouveaux intervalles,

$$\Phi\left\{F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi(1)\right]\right\} = F[\varphi(0),\ \varphi(1)]$$
$$= F[\varphi(\nu),\ \varphi(\nu + 1)] = \Phi\left\{F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

et, par suite,

$$\Phi\left\{F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} = \Phi\left\{F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right],\ F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}.$$

La fonction $\Phi(u, u)$ de u, étant croissante (corol. de I), admet toujours une inverse uniforme; de l'égalité précédente, eu égard à la définition de $\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ (pour $\nu = 0, 1, \ldots$), on déduit donc les égalités suivantes

$$F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi(1)\right] = F\left[\varphi(\nu),\ \varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= F\left[\varphi\left(\nu + \frac{1}{2}\right),\ \varphi(\nu + 1)\right].$$

En opérant de même sur chacun des intervalles déterminés par les nombres de la suite $0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \nu, \nu + \frac{1}{2}, \nu + 1$, on établira

aussi l'égalité des expressions définies par les extrémités des nouveaux intervalles, et en continuant ainsi, on déterminera, pour deux nombres entiers a et n quelconques, un nombre, qui pourra être désigné par $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$, de sorte que l'on aura les relations suivantes

$$(2) \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]$$
$$= F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right)\right]$$

avec

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Les intervalles de chacune des divisions ainsi définies possèdent évidemment toutes les propriétés établies pour ceux de la division qui est définie par les nombres entiers ; on doit donc avoir, a, b et n étant des nombres entiers quelconques, une relation toute semblable à (1), savoir :

$$(1)' \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^n}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a+b}{2^n}\right)\right]$$

avec

$$\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) < \varphi\left(\frac{a+b}{2^n}\right);$$

comme il est d'ailleurs toujours possible de réduire à la même puissance les dénominateurs de deux fractions dyadiques quelconques, la relation précédente peut aussi s'écrire

$$(1)'' \qquad F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^m}\right)\right] = F\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right),\ \varphi\left(\frac{a}{2^n}+\frac{b}{2^m}\right)\right].$$

On a ainsi défini une fonction pour un ensemble dense partout de nombres positifs, savoir ceux qui sont de la forme $\frac{a}{2^n}$ (nombres dyadiques), et cette fonction est croissante, d'après l'inégalité précédente. Si σ et σ' désignent deux de ces nombres, soit

$$\sigma = \frac{a}{2^n}, \qquad \sigma' = \frac{a}{2^n} + \frac{b}{2^m},$$

on aura

$$F[\varphi(\sigma),\ \varphi(\sigma')] = F\left[\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{b}{2^m}\right)\right]$$

ou enfin

$$(3) \qquad F[\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')] = F[\varphi(0), \varphi(\sigma' - \sigma)],$$

de sorte que $F[\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')]$ est une fonction croissante de $\sigma' - \sigma$.

Un nombre positif quelconque σ peut toujours, comme on sait, être défini comme somme d'un nombre entier et d'une fraction dyadique, c'est-à-dire comme limite d'une suite croissante de nombres de la forme $a_0, \frac{a_1}{2}, \ldots, \frac{a_n}{2^n}, \ldots$, soit

$$\sigma = \nu + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \ldots = \lim_{n=\infty} \left(\frac{a_n}{2^n}\right),$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ désignent les nombres 0 ou 1.

La fonction $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ étant croissante et bornée, toute suite de valeurs telles que $\varphi(a_0), \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \ldots$ a une limite, et l'on pourra toujours, par conséquent, définir, pour tout le champ numérique positif, une fonction liée à $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ par la condition suivante

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n=\infty} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right).$$

On établira d'ailleurs facilement, eu égard aux propriétés connues des limites et des fonctions continues d'une variable, que la formule (3) est applicable à la fonction $\varphi(\sigma)$ ainsi *étendue*. Enfin, les moyens qui ont été employés pour obtenir ces résultats sont évidemment applicables au champ numérique négatif à partir de $x_0 = \varphi(0)$; on pourra donc toujours supposer que la fonction $\varphi(\sigma)$ est définie pour le champ numérique complet. Elle admet une inverse croissante $\sigma = f(x)$, qui est définie pour l'ensemble X_1 (portion de X) des valeurs de $\varphi(\sigma)$ et l'on pourra, par conséquent, pour deux nombres x et x' quelconques de X_1, poser

$$(3') \qquad F(x, x') = F\{\varphi(0), \varphi[f(x') - f(x)]\}.$$

Chacune des propriétés suivantes peut ou non être satisfaite.

1° La suite $\{\varphi(\nu)\}$ s'étend sur le champ X ;

2° L'ensemble X_1 des nombres $\{\varphi(\sigma)\}$ est dense sur la portion du continu numérique sur laquelle il s'étend (il se confondra alors évidemment avec cette portion, car il est lui-même continu).

En ce qui concerne la première propriété, la suite $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., étant croissante, admet toujours une limite x_ω finie ou infinie, soit

$$x_\omega = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu+1).$$

De la formule (1) et de la proposition (2) il résulte que l'on ne peut avoir

$$\lim_{\nu=\infty} F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] = F(x_\omega, x_\omega) = u_0,$$

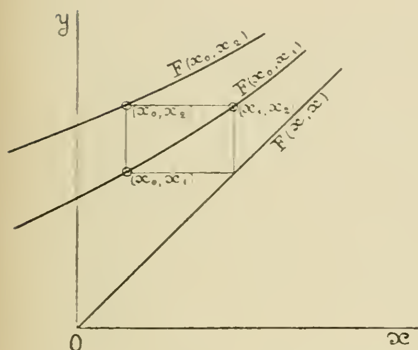


Fig. 1.

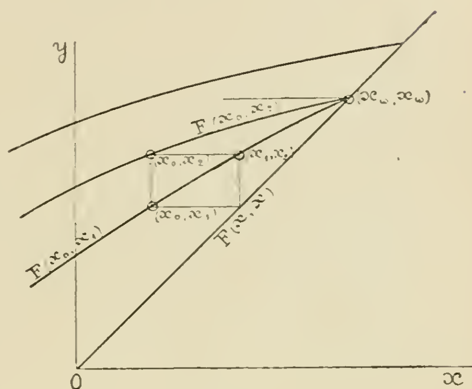


Fig. 2.

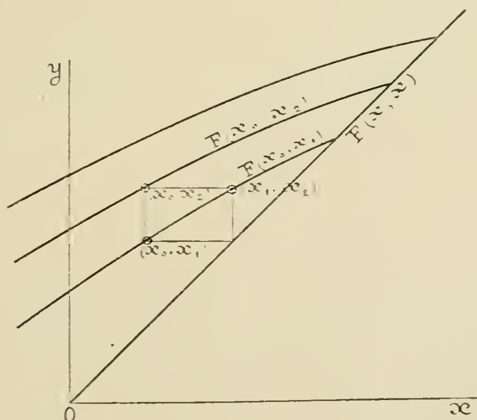


Fig. 3.

de sorte que, si x_ω est finie, la fonction $F(x, y)$ ne sera pas continue au point (x_ω, x_ω), ce qui n'est d'ailleurs pas incompatible avec sa continuité comme fonction de chacune de ses variables.

Deux cas peuvent alors se présenter, selon que $x_\omega = \lim \varphi(\nu)$ possède ou non la même valeur lorsque $\varphi(1)$ parcourt le champ X : dans le premier cas, x_ω est à la base supérieure de ce champ, et la propriété archimédienne sera satisfaite ; dans le second cas, elle ne le sera pas, et il pourra se faire ou que le champ soit décomposable en champs partiels dans chacun desquels cette propriété sera satisfaite, ou qu'à toute valeur u de la valeur corresponde une valeur x_ω définie par les relations suivantes :

$$u = F[\varphi(0), \varphi(1)] = \ldots = F[\varphi(\nu), \varphi(\nu+1)] = \ldots, \quad x_\omega = \lim_{\nu=\infty} \varphi(\nu) ;$$

dans les deux cas, la propriété archimédienne ne sera pas satisfaite dans toute sa généralité. Les trois figures ci-contre représentent les trois cas.

On va établir une propriété importante de l'ensemble $\{\varphi(\sigma)\}$; mais, pour simplifier la démonstration, on la fera sur une nouvelle fonction, qui sera également désignée par $\varphi(\sigma)$ et qui sera définie par la relation $\varphi(\sigma) = u = F(x_0, x)$; cette nouvelle fonction a évidemment les mêmes propriétés par rapport au champ U de la variable u que la fonction primitive par rapport au champ X, et l'on pourra, par conséquent, rapporter toujours à l'une les propriétés établies pour l'autre.

La nouvelle fonction est évidemment, comme la première, croissante, et l'on établira facilement les relations

$$\Phi[\varphi(0), u] = u, \qquad \Phi[\varphi(\sigma), \varphi(\sigma')] = \varphi(\sigma + \sigma').$$

5. *Étant donnés un nombre* u *de* U *et un nombre entier positif quelconque* n, *il existe toujours dans* U, *entre* u_0 *et* u, *un nombre* ε *tel que, si l'on définit une fonction* $\varphi_\varepsilon(\nu)$ *par les relations*

$$\varphi_\varepsilon(0) = u_0, \quad \varphi_\varepsilon(1) = \varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(\nu+1) = \Phi[\varphi_\varepsilon(\nu), \varphi_\varepsilon(1)] = \Phi[\varphi_\varepsilon(1), \varphi_\varepsilon(\nu)],$$

on aura

$$\varphi_\varepsilon(n) \leq u.$$

En effet, si U contient un nombre ε tel qu'on ait, pour toute valeur de ν, $\varphi_\varepsilon(\nu) < u$, ε possèdera bien la propriété requise.

Dans le cas contraire, pour un nombre quelconque α de U, il existera un nombre entier positif ν tel qu'on aura $\varphi_\alpha(\nu) \leq u < \varphi_\alpha(\nu+1)$. Si, en outre, on prend α dans l'intervalle (u_0, u), il existera toujours un nombre α_1 de U tel qu'on aura (II)

$$u = \Phi(\alpha, \alpha_1)$$

et, par suite,

$$\Phi(\alpha, \alpha_1) < \varphi_\alpha(\nu+1) = \Phi[\alpha, \varphi_\alpha(\nu)] ;$$

d'où il résulte (I) : $u_0 < \alpha_1 < \varphi_\alpha(\nu) \leq u$.

Si U contient un nombre ε tel qu'on ait, pour toute valeur entière de ν, $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq \alpha$, on aura *à fortiori* $\varphi_\varepsilon(\nu) \leqq u$, et la proposition sera bien ainsi satisfaite. Dans le cas contraire, on pourra toujours obtenir deux nombres α' et α_2 de D compris entre u_0 et α et tels qu'on aura $\alpha_1 = \Phi(\alpha', \alpha_2)$. En répétant ce procédé, on parviendra soit à un nombre ε qui satisfera à la proposition pour toute valeur de ν, soit à des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n-1)}$ tous compris entre u_0 et u et tels qu'on aura

$$\alpha^{(p)} = \Phi[\alpha^{(p+1)}, \alpha_{p+2}] .$$

Le plus petit ε des nombres $\{\alpha_p\}$ ou, si ces nombres sont égaux, leur valeur commune satisfera évidemment à la relation $\varphi_\varepsilon(n) \leqq u$ et, par conséquent, la proposition est bien établie.

Cette propriété correspond à la propriété classique des grandeurs mesurables qui, combinée à la propriété archimédienne, permet de définir la mesure d'une grandeur quelconque ou plus généralement le rapport de deux grandeurs quelconques de la même espèce. En appliquant ici l'un des procédés classiques employés à cet effet, on parviendrait facilement à faire correspondre à un nombre quelconque u de U et, par conséquent, à un nombre quelconque x de X un nombre de l'ensemble $\varphi(\sigma)$. Il résulte de là que l'axiome d'Archimède convenablement approprié est le seul qui doive être ajouté à ceux déjà posés pour que la fonction $F(x, y)$ définisse bien un système de mesure pour le champ X. Cette conclusion n'est d'ailleurs pas particulière aux continus linéaires. Elle est en effet établie par une méthode générale dans une *Ebauche d'une théorie des grandeurs*, que je me propose de publier incessamment.

Nouvelle note complémentaire.

Entre les résultats de M. Brouwer et les miens il existe une divergence qui peut s'exprimer, avec ma notation, de la manière suivante : M. Brouwer établit, en contradiction avec certaines des propriétés dont j'ai admis la possibilité, que l'ensemble des valeurs $\left\{ \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \right\}$ est toujours dense sur tout le champ U de la variable u, autrement dit que *la fonction* $\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)$ (*et, par suite,* $\varphi(\sigma)$) *est continue et prend toutes les valeurs de ce champ.* Je dois reconnaître que c'est M. Brouwer qui a raison, et en voici même une autre démonstration notablement plus longue que celle qu'a

donnée ce savant, mais qui satisfera peut-être mieux ceux qui, comme moi, sont insuffisamment familiarisés avec les procédés récents de la théorie des variétés numériques selon MM. Cantor et Schœnflies.

La suite décroissante $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$ a toujours une limite u'_0, qui est aussi sa borne inférieure et qui ne peut être inférieure à $u_0 = \varphi(0)$; si elle ne lui est pas identique, on a donc (corol. de 1 et prem. des relations 4) $u'_0 = \Phi(u_0, u'_0) < \Phi(u'_0, u'_0)$ et l'on devra toujours avoir à partir d'une certaine valeur de n

$$u'_0 < \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) < \varphi(u'_0, u_0),$$

par suite

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \Phi\left[\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right] < \Phi(u'_0, u'_0)$$

et enfin (corol. de 1),

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) < u'_0,$$

de sorte que u'_0 ne serait pas la borne inférieure de $\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) \right\}$. On doit donc bien avoir

$$\lim_{n=\infty} = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) = \varphi(0),$$

c'est-à-dire que la fonction est bien continue pour $\sigma = 0$; cette propriété s'étend facilement à tous les nombres en vertu de la relation (1'), de sorte que la fonction $\varphi\left(\frac{u}{2^n}\right)$ et, par suite, la fonction $\varphi(\sigma)$ sont bien continues.

D'autre part, la suite infinie et croissante $\{\varphi(\nu)\}$ a toujours une limite (finie ou infinie) u_ω, qui est aussi sa borne supérieure; si ce nombre appartenait au champ U, celui-ci devrait aussi contenir un nombre u'_ω inférieur à u_ω et tel qu'on aurait

$$\Phi(u'_\omega, u'_\omega) = u_\omega;$$

et l'on aurait toujours, à partir d'une certaine valeur de ν

$$u'_\omega < \varphi(\nu) < u_\omega$$

et, par conséquent (corol. de 1)

$$\varphi(2\nu) = \Phi[\varphi(\nu), \varphi(\nu)] > \Phi(u'_\omega, u'_\omega) = u_\omega;$$

u_ω ne serait donc pas la borne supérieure de $|\varphi(v)|$, ce qui est contradictoire avec ce qui a été déjà établi.

Il résulte de là que $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue, croissante et prenant toutes les valeurs du champ U; ce champ ne peut d'ailleurs être *limité* (clos) à droite et, si $\varphi(\sigma)$ est bornée supérieurement, il en sera de même de ce champ, mais celui-ci ne contiendra jamais sa borne, de sorte qu'il ne se distinguera pas des champs s'étendant à l'infini.

La proposition 5 ne perd d'ailleurs rien de son intérêt; sa démonstration n'implique en effet nullement que $\Phi(u, v)$ soit une fonction croissante de sa première variable, ni que l'équation $w = \Phi(u, v)$ définisse la variable u comme fonction de v et de w, propriétés qui correspondent évidemment à celles-ci : $F(x, y)$ est décroissante comme fonction de x et l'équation $u = F(x, y)$ définit x comme fonction de y et de u. Il resterait donc à déterminer les métriques dont sont encore susceptibles, ces conditions écartées, les continus linéaires, métriques auxquelles est aussi applicable la proposition 5.

G. COMBEBIAC (Limoges).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations rationnelles pour le système vectoriel [1].

13. — *Extrait d'une lettre de* M. E.-B. WILSON.

A propos d'une Note de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO.

Je viens de lire dans l'*Enseignement mathématique* (XIIIe année, pp. 138-148) la réponse que MM. Burali-Forti et Marcolongo font à mon compte rendu des ouvrages *Elementi di Calcolo vettoriale* et *Omografie vettoriali* dans le *Bull. of the American Mathem. Society* (vol. XVI, pp. 410-436). Elle m'intéresse comme tout ce que l'on écrit sur l'analyse vectorielle, et, par la façon dont ils répondent à mon simple compte rendu qui ne demandait ni méri-

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, XIe année, 1909, no du 15 janvier, p. 41-45; no du 15 mars, p. 124-134; no du 15 mai, p. 211-227; no du 15 juillet, p. 281; no du 15 novembre, p. 459-466. — XIIe année, no du 15 janvier 1910, p. 39-54. — XIIIe année, no du 15 mars 1911, p. 131-148.

tait aucune réponse, elle me montre combien je les ai touchés de près.

Mon cher Rédacteur, je ne veux pas me plonger ni entraîner votre *Revue* dans une longue et acrimonieuse polémique. Si MM. Burali-Forti et Marcolongo tiennent à discuter avec chaque auteur et si chacun tient à leur répondre, nous n'en finirons jamais. Du reste, les polémiques n'aboutissent à rien. Cependant, puisque les savants géomètres italiens m'ont attaqué personnellement, il n'est que simple justice que je signale quelques faits.

D'abord, j'ai grand peur que l'empressement de l'attaque de vos correspondants et les petits extraits qu'ils citent de mon compte rendu ne donnent à vos lecteurs une idée très exacte de ce que je pense à propos des travaux de MM. les auteurs. J'ai encore une trentaine d'exemplaires de ce compte rendu que je distribuerai volontiers; si quelques-uns de vos lecteurs s'y intéressent, qu'ils m'écrivent[1]. Ils y liront que j'ai beaucoup de sympathie pour les auteurs et que j'estime à un très haut degré leurs recherches, bien que je me trouve forcé, pour des raisons données, de différer d'eux sur quelques points.

Ils disent de moi : « Elève de Gibbs, il trouve illogique, inexact et condamnable tout ce qui s'éloigne de la méthode de Gibbs », et puis, « pour M. Wilson, il n'y a salut que dans le système de Gibbs ». C'est vrai que j'ai été élève de Gibbs et cela ne me fait pas trop de honte. Mais avant d'être élève de Gibbs, j'ai été élève de G.-N. Peirce, maître enthousiasmé des méthodes de Hamilton. et avant de publier les leçons de Gibbs sur l'analyse vectorielle, j'ai étudié sous ce même Gibbs les méthodes de Grassmann. Je reconnais pleinement toute la beauté des quaternions et de l'*Ausdehnungslehre*. Pourquoi m'accuser de ne pouvoir voir du bon que dans le système de Gibbs? Ni moi, ni Gibbs n'en dirions autant. Il est bien possible que les méthodes d'Hamilton soient plus nettes que celles de Gibbs; mais les physiciens s'en moquent. Peut-être les méthodes de Grassmann sont-elles supérieures à celles de Gibbs; mais les physiciens les négligent. (Ainsi l'illustre Minkowski en aurait pu faire un grand usage dans son mémoire sur le principe de relativité.) Et le nouveau système de Burali-Forti et Marcolongo, serait-il le meilleur du monde, le seul exact et logique, il ne fleurirait chez les physiciens qu'après de longues années. Et pour hâter cet âge de floraison et de fruits, les auteurs feraient mieux, à mon avis, d'être patients, doux et calmes, au lieu d'attaquer avec tant d'ardeur, de dire que personne ne comprend rien, etc. Nous sommes tous attentifs, nous ne demandons qu'à être persuadés, mais nous ne voulons pas et ne pouvons point être forcés. Tout ce que je dis à propos du système de Gibbs est ceci :

---

[1] Lee Street, 16, Cambridge, Mass. *(Réd.)*

Pour le physicien ce système est peut-être, à l'heure actuelle, le plus commode. Mais, sauf en Amérique, les physiciens ne font pas grand emploi de ce système. Peut-être sera-t-il tout à fait abandonné un jours, même en Amérique. Nous verrons cela, comme disait le père Goriot.

C'est fort naturel que MM. Burali-Forti et Marcolongo, et bien d'autres, me croient et me disent l'adhérent aveugle de la méthode de Gibbs, parce que j'ai été chargé par l'Université de Yale et autorisé par ce maître de publier ses leçons, et parce que, depuis qu'il est mort, j'ai cru que ce fut mon humble devoir que de défendre ses théories et son système, autant que je les ai compris, contre toute attaque qui me semblait peu fondée. Je continuerai à remplir ce devoir ; si j'y manquais, je serais lâche.

Et enfin, mes collègues italiens se plaignent de ce que je n'ai pas critiqué assez les parties les plus importantes de leurs ouvrages, les applications. Ils disent que c'est parce que je ne voulais pas me donner la peine d'examiner ce qui constitue la vraie pierre de touche de toutes les méthodes vectorielles. Peut-être ont-ils raison, mais je pensais autrement. Depuis huit ans j'ai l'habitude, d'abord à l'Université de Yale, et puis au *Massachusetts Institut of Technology*, de donner des leçons sur diverses branches de la physique mathématique, mécanique, hydromécanique, élasticité, électricité et magnétisme, optique, — toujours avec les méthodes vectorielles, méthodes tachygraphiques et fausses sans doute, méthodes quasi vectorielles, dirai-je, pour éviter des calomnies. Et pourquoi m'étonnerai-je de trouver dans leurs livres un peu de tout ce qui était familier à mes élèves ? J'ai bien dit que leurs applications sont admirablement bien choisies et très bien faites. Sans doute un auteur n'est jamais content des comptes rendus de son livre. Lorsqu'il y a deux auteurs cela ne fait qu'augmenter la probabilité de leur mécontentement en raison du carré.

Sur quelques généralisations de la « Courbe de Mannheim ».

A *propos d'un article de* M. Turrière.

La généralisation de la « Courbe de Mannheim », sur laquelle M. E. Turrière a dernièrement appelé l'attention dans l'*Enseignement mathématique* XIII, N° du 15 janvier 1911, p. 24-26, n'est pas nouvelle. Déjà en 1907, deux auteurs ont fait rouler, indépendamment l'un de l'autre, une courbe C sur une circonférence, et ont déterminé la courbe Γ décrite par le centre de courbure de C correspondant au point de contact :

1° L'auteur de cette Note, dans un article : *Ueber eine Verallge-*

meinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve (*Math. nat. Mitt. Württemberg*, 2, IX, 1-9)[1].

2° M. P. Ernst (Vienne), *Ein Analogon zur Mannheimschen Kurve* (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, XVIII, 315-316).

Aucun de nous, il est vrai, n'a donné le bel exemple fourni par M. Turrière.

Je puis ajouter que sous peu, dans la thèse qu'il présentera à l'Université de Heidelberg, M. L. Braude donnera une étude d'une généralisation de la « Courbe de Mannheim », qui va encore plus loin. Il m'a autorisé à faire savoir qu'il s'agira avant tout du roulement de deux « Courbes de courbure proportionnelle », c'est-à-dire de deux courbes dont les équations intrinsèques sont

$$\rho = f(s) \qquad \text{et} \qquad \rho = \mu f(s) \ .$$

Le lieu décrit par le centre de courbure de la courbe roulante, sera pour la courbe fixe une « Zwischenevolute ». M. Braude appelle ainsi les courbes qui sont lieu d'un point qui divise tous les rayons de courbure de la courbe fixe dans le même rapport[2].

Comme type des théorèmes qui en résultent, nous mentionnerons un des résultats obtenus par M. Braude : « Lorsqu'une épicycloïde ou hypocycloïde roule sur une autre quelconque, mais dont les arcs entre deux points de rebroussement ont la même longueur que ceux de la courbe roulante, le lieu du centre de courbure est une épicycloïde ou hypocycloïde raccourcie ou allongée du même module de la courbe fixe. »

H. Wieleitner (Pirmasens).

---

[1] Voir le livre *Spezielle ebene Kurven* du même auteur (Leipzig, G. J. Göschen, 1908, p. 320). L'article mentionné est aussi cité dans G. Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven* (2 vol., 2e éd., Leipzig, B. G. Teubner, 1910-11 ; vol. II, p. 240), ouvrage dont on ne pourra pas se passer en étudiant quoi que ce soit en courbes spéciales.

[2] Ces « Zwischenevoluten » ont été déjà envisagées comme « développantes imparfaites » par T. Olivier (*Développements de Géométrie descriptive*, Paris, 1843) ; voir G. Loria, vol. II, p. 271-273.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

Allemagne. — Un 4[me] fascicule du tome premier des *Abhandlungen* vient de paraître. Il traite des Gymnases et des Ecoles réales des villes de la Hanse, du Mecklenbourg et de l'Oldenbourg.

I. Band. Heft 4. — Der mathematische Unterricht in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs, von A. Thaer (Hambourg), N. Geuther (Güstrow), A. Böttger (Oldenburg). — 93 p. in 8°.

Espagne. — M. Z. G. de Galdeano consacre un 2[me] *rapport* à l'enseignement mathématique en Espagne (18 p.). Après avoir indiqué les grandes divisions prévues par la loi du 9 septembre 1857, qui régit encore l'instruction publique en Espagne, l'auteur donne un aperçu de l'organisation de l'*enseignement supérieur*, technique et universitaire.

France. — Nous venons de recevoir un 2[me] volume des travaux de la Sous-Commission française, c'est le tome II (157 p.), consacré à *l'enseignement secondaire* et publié sous la direction de M. Ch. Bioche. En voici le sommaire :

Avant-propos.

a) Rapport sur la place et l'importance des mathématiques dans l'Enseignement secondaire en France, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur les classes de mathématiques spéciales et de Centrale, par M. E Blutel. — Pièces annexes.

c) Rapport sur l'Arithmétique, par M. A. Levy.

d) Rapport sur l'Algèbre, par M. Guitton.

e) Rapport sur la Géométrie, par M. Th. Rousseau.

f) Rapport sur l'Enseignement de la Mécanique, par M. H. Beghin.

g) Rapport sur l'Enseignement de la Cosmographie, par M. A. Muxart.

h) Rapport sur l'Enseignement des Mathématiques dans les Ecoles nouvelles, par M. Frank Lombard.

Appendice.

Au moment de mettre sous presse, nous recevons les tomes I *(l'enseignement primaire)*, IV *(l'enseignement technique)* et V *(l'enseignement des jeunes filles)*. La sous-commission française a ainsi terminé les cinq volumes annoncés l'an dernier à la Réunion de Bruxelles.

Iles Britanniques. — On sait que la Sous-commission anglaise publie ses rapports, dont nous avons donné la liste en son temps (*circ.* n° 4, n° de mars 1911, p. 131-133), avec le concours du Board of Education. Ils sont publiés sous le titre général de : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom, being a series of Papers prepared for the International Commission on the Teaching of Mathematics.* Les huit premiers fascicules viennent de paraître ; ils sont mis en vente séparément chez : Wyman and Sons, Londres ; Oliver and Boyd, Edinbourg ; E. Ponsonby, Dublin. En voici la liste :

No 1. Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. By Mr W. Newbold. — 14 p. in-8°, prix : 1 d.

No 2. The Relations of Mathematics and Physics. By Dr L.-N.-G. Filon. — 9 p. ; 1 d.

No 3. The Teaching of Mathematics in London Public Elementary Schools. By Mr P.-B. Ballard. — 28 p. ; 2 d.

No 4. The Teaching of Elementary Mathematics in English Public Elementary Schools. By Mr H.-J. Spencer. — 32 p. ; 2 1/2 d.

No 5. The Algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr C. Godfrey. 34 p. ; 2 1/2 d.

No 6. The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography. By Miss Helen Bartram. — 8 p. ; 1 d.

No 7. The Teaching of Elementary Mechanics. By Mr W.-D. Eggar. — 13 p. ; 1 d.

No 8. Geometry of Engineers. By D.-A. Low. — 15 p. ; 1 1/2 d.

Suisse. — La Sous-Commission suisse publie ses travaux sous le titre : L'Enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la Sous-Commission suisse, publiés sous la direction de M. H. Fehr. Ils comprendront 8 fascicules en vente séparément. Le premier consacré aux travaux préparatoires a paru l'an dernier. Les fascicules 4 et 7 viennent de paraître ; les autres sont sous presse ou en composition. Le fascicule est consacré à l'Enseignement mathématique dans *les Gymnases et les Ecoles réales*. Le fascicule 7 donne un aperçu très complet des mathématiques à l'*Ecole polytechnique fédérale*.

No 4. — Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen, von prof. Dr Brandenberger. (Zurich). — 167 p.

No 7. — Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, von prof. Dr Grossmann. (Zurich). — 52 p.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences[1].

Congrès de Dijon, 31 juillet-5 août 1911.

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie du Congrès de Dijon ont été organisés par le président, M. Emile BELOT, ingénieur-directeur des manufactures de l'Etat, à Paris, et A. GÉRARDIN, de Nancy, secrétaire. Les nombreuses et intéressantes communications furent réparties sur neuf séances.

1. — Sur l'*Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, par M. E. BELOT.

Le président de Section, M. Belot, présente son ouvrage de cosmogonie tourbillonnaire[2], où il a développé les théories et idées précédemment résumées dans les comptes rendus des congrès de Clermont-Ferrand (1908), de Lille (1909) et de Toulouse (1910). Il rappelle qu'en admettant un dualisme originel composé d'une nébuleuse amorphe qui aurait rencontré un tourbillon gazeux dans un choc analogue à celui d'une Nova, il a pu déduire la démonstration de plusieurs lois nouvelles du système solaire, dont la loi exponentielle des distances des planètes (analogue à la loi de BODE).

M. H. POINCARÉ a consacré près d'une leçon de son cours à la Sorbonne (1910-1911) à la discussion de cette hypothèse qui peut orienter les recherches astronomiques dans une voie nouvelle.

2. — M. Em. BELOT fait ensuite une *critique des méthodes employées en cosmogonie*,

et où l'hypothèse implicite est toujours cachée, à savoir que l'attraction newtonienne est la seule force permettant de rendre compte des formes observées dans le système solaire. La physique moderne, avec ses corpuscules cathodiques, nous donne un exemple de masses animées de vitesses de l'ordre de la lumière et sur lesquelles la pesanteur agit sans pouvoir, d'ailleurs, modifier leur trajectoire. Il a pu en être ainsi à l'origine du monde. Puis M. BELOT répond aux objections que M. H. POINCARÉ a faites dans son cours à la Sorbonne 1910-1911, ayant pour objet l'étude des hypothèses cosmogoniques à partir de LAPLACE; il fait voir que, dans la cosmogonie tourbillonnaire, les forces d'attraction n'ont pas à intervenir, sauf au voisinage de l'écliptique et que l'hypothèse dualiste, qui est la base de sa nouvelle cosmogonie, ne permet pas de prévoir, par un calcul d'attraction, que les masses du système planétaire se meuvent dans un même plan; au contraire, il est très facile d'aboutir à ce résultat en partant des formules nouvelles qu'il a établies.

3. — Enfin, M. BELOT présente une communication très intéressante intitulée :

La genèse de l'atome et la distribution des raies spectrales déduites des lois du système solaire. — Des savants éminents comme MM. LORENTZ et

[1] Nous devons ces notes à l'obligeance de M. A. GÉRARDIN (Nancy). *Réd.*
[2] GAUTHIER-VILLARS, 1911.

J.-J. Thomson ont cherché des schémas représentatifs de l'atome en l'assimilant plus ou moins à un système solaire. Le regretté physicien Ritz, en partant d'autres hypothèses, a obtenu une loi très générale caractérisant la distribution des raies dans les spectres de lignes. M. E. Belot montre comment peuvent se concilier ces hypothèses en partie contradictoires et comment la genèse de l'atome est analogue à la genèse tourbillonnaire du système solaire et permet de trouver les lois de Balmer et de Deslandres qui sont, pour l'atome, les lois analogues aux lois de distribution des planètes directes et rétrogrades.

La section de météorologie était, pour cet objet, réunie à la première section.

4. — Sur les Notices de la Collection des *Savants du Jour*, relatives à M. Paul Appell et à M. Gabriel Lippmann, publiées par M. Ernest Lebon (Paris).

M. E. Lebon résume les *Notices sur la vie et les travaux* de ces deux savants, l'un mathématicien, l'autre physicien. Il parle des beaux Mémoires du premier sur l'Analyse et de son *Traité de Mécanique rationnelle;* il cite les deux géniales découvertes du second, l'électrocapillarité et la photographie des couleurs par la méthode interférentielle. Il cite les appréciations que M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel, a portées sur ces ouvrages en les présentant à l'Académie des Sciences. M. G. Darboux rappelle que Helmholtz, lors d'un de ses passages à Paris, prit plaisir à signaler à l'Académie des Sciences M. G. Lippmann, qu'il avait vu à l'œuvre dans son laboratoire, comme un de ceux qui devraient sans retard être pourvus d'un enseignement magistral à la Sorbonne.

5. — M. Ern. Lebon présente ensuite un mémoire *sur une méthode élémentaire de décomposition d'un nombre en un produit de deux facteurs.*

Pour décomposer 12 761 717, M. P.-F. Teilhet a indiqué la méthode suivante (*Intermédiaire des Mathématiciens*, quest. 2897, *1905*, p. 74 et 201). Il écrit le nombre N sous la forme

$$N = a^2 - b$$

$$N = (a + k)^2 - (k^2 + 2ak + b)$$

Il reste à trouver une valeur de k telle que le trinôme $k^2 + 2ak + b$ soit un carré.

Modifiant un peu le procédé de M. Teilhet, je suis arrivé à quelques résultats intéressants. Soit N un nombre entier non carré, ρ sa racine carrée à une unité près par défaut, r le reste. Appelant u un entier positif, on peut écrire

$$N = (\rho + u)^2 - (u^2 + 2\rho u - r)$$

Si le trinôme $u^2 + 2\rho u - r$ est un carré v^2, le nombre N est la différence des carrés de deux nombres et, par suite, N peut être décomposé en un produit de deux facteurs qui sont

$$\rho + u - v \quad \text{et} \quad \rho + u + v\,.$$

Le nombre N doit être impair.

Appliquant cette méthode au nombre 13 717 421, décomposé par M. Kraïtchik (*Sphinx-Oedipe*, mai 1911), on trouve au second essai

$$\rho = 3\ 703\ , \quad r = 5\ 212\ , \quad u = 2\ , \quad v = 98\ ;$$

$$13\ 717\ 421 = 3\ 607 \times 3\ 803$$

On sait aussi (voir *Sphinx-Oedipe*, 1906, p. 55) que l'on aura $u = 2$ pour les valeurs générales suivantes de N, par exemple

$$N = h^4 + 10h^3 + 33h^2 + 40h + 11$$

$$N = 16h^4 + 128h^3 + 360h^2 + 416h + 161\ .$$

On obtient facilement l'égalité

$$u.f = \frac{1}{2}\left[(\rho - f)^2 + r\right]$$

qui permet de trouver plus rapidement que la méthode classique si un nombre N est composé ou premier, en y faisant f égal aux nombres premiers successifs inférieurs à ρ.

6. — M. G. Tarry, du Havre, présente une intéressante communication, à suivre, sur *les imaginaires de Galois*.

Le nouveau symbole j, représente la racine carrée d'un non-résidu quadratique quelconque.

Je ne considère que les imaginaires du deuxième ordre, racines des équations irréductibles du deuxième degré. Ces imaginaires de Galois sont nécessairement de la forme $a + bj$, j ne pouvant être égal à $\sqrt{-1}$ que dans les modules de forme $4p - 1$.

Généralisation du théorème de Fermat : m étant un nombre premier, a et b n'étant pas tous deux à la fois divisibles par m, on a

$$(a + bj)^{m^2-1} - 1 = 0 \qquad (\text{mod } m)$$

Racines primitives du corps quadratique. Elles sont toutes de la forme $a + bj$, a et b étant différents de zéro.

Recherche de ces racines primitives au nombre de $\varphi\,(m^2 - 1)$.

7. — M. Auguste Aubry, de Dijon, présente d'abord à la section un mémoire *sur les nombres de Mersenne*.

M. A. Gérardin s'est voué à terminer l'examen de la célèbre énigme des *Nombres de Mersenne*, dont se sont tant occupés nombre de mathématiciens du plus haut mérite. Aidé des travaux de ses prédécesseurs, il a attaqué la question par plusieurs côtés, dont l'un m'a paru devoir être revu dans tous ses détails, d'autant plus qu'il s'agissait là d'un théorème empirique que j'ai reconnu être — cas particulier d'un théorème donné par Fermat dans une lettre à Frénicle — et, en même temps, une généralisation d'un autre théorème d'Euler.

J'expose complètement la méthode de M. A. Gérardin en démontrant ce qui était resté non prouvé et je termine par quelques réflexions sur la méthode de Fermat que j'estime tout à fait analogue à celle de M. A. Gérardin.

8. — M. A. Aubry, de Dijon, présente ensuite une note intitulée *Problèmes concrets et Problèmes abstraits.*

Catalan a dit quelque part, des problèmes concrets, que c'est l'art d'ensevelir, sous de bien inutiles complications, des choses souvent très simples. On pourrait, sans pousser l'examen bien loin, rétorquer facilement cette boutade et dire, avec d'autres éminents savants, que les problèmes sont les compléments de la science. En effet, ils l'impriment dans la mémoire, en rappellent les principes, habituent au classement des idées et en préparent les applications ultérieures théoriques ou pratiques.

Je reconnais qu'il y a déjà trop de recueils de problèmes ; mais combien y en a-t-il qui ne sont que la répétition de questions déjà connues ? On intéresserait davantage les élèves en multipliant les problèmes concrets.

Je donne quelques problèmes de ce genre relatifs aux combinaisons et à la théorie des nombres.

9. — M. H. Chrétien, chef du service astrophysique de l'Observatoire de Nice parle *sur la photographie astronomique à l'Observatoire du Mont Wilson (Californie).*

Description du télescope de 1^m50 de diamètre et de 7^m50 de foyer, construit par le prof. G.-W. Ritchey pour l'Observatoire solaire de l'Institut Carnegie. Mode opératoire et précautions prises pour assurer un guidage précis à moins de $0^{mm},01$. Présentation de 18 photographies inédites de nébuleuses et d'amas stellaires. Considérations sur l'évolution des nébuleuses déduites de la statistique. [Extrait d'un Rapport de Mission adressé à l'Université de Paris (Observatoire de Nice)].

10. — *Courbure des raies spectrales produites par un train de prismes et de réseaux orientés d'une façon quelconque*, note présentée par M. H. Chrétien, de Nice.

Lorsque l'on veut exprimer rigoureusement la trajectoire d'un rayon lumineux dans un spectroscope, on arrive à des expressions très compliquées. Soient O une origine prise au foyer du collimateur et Ox et Oy deux axes rectangulaires situés dans le plan focal ; désignons par Ω l'image de O et par ΩX ΩY, les images de Ox et Oy, en lumière monochromatique ; X et Y sont des fonctions de x et y ; si Oy est parallèle aux arêtes des prismes, on a d'ailleurs $Y = -y$. L'auteur fait connaître l'expression de X en fonction de x et y, pour un développement en série, dont les coefficients dépendent des pouvoirs amplifiant et dispersif du spectroscope et de leurs dérivées.

11. — M. H. Chrétien expose la *meilleure position à donner aux prismes des spectroscopes pour obtenir le maximum de luminosité ou de définition.*

Si l'on tient compte de l'absorption de la lumière dans la matière même des prismes, on trouve que la luminosité de l'instrument augmente un peu

lorsqu'on déplace légèrement le prisme de manière à découvrir le collimateur ; cette remarque a été faite par le Prof. J. Hartmann, de Potsdam. Il en est de même du pouvoir de résolution. Mais les calculs des positions optima sont très pénibles ; comme cette position ne dépend que d'un paramètre, on peut dresser une petite table qui la fasse connaître immédiatement ; c'est ce qui a été fait dans le présent mémoire.

12 et 13. — M. Henri Chrétien présente enfin les deux intéressantes communications suivantes :

Tables à cinq décimales des polynômes X_n de Legendre. — Propriétés principales, formules, application.

Table des racines des dix premiers polynômes.

Table complète des dix premiers polynômes de 0,01 en 0,01.

Table à cinq décimales des dix premiers polynômes de 0,001 en 0,001.

Champ magnétique d'une sphère conductrice animée d'un mouvement de rotation. — Cas où la vitesse angulaire est indépendante de la latitude : distribution de la charge. Cas où la vitesse angulaire dépend de la latitude : champ magnétique moyen du soleil.

Rotation d'une sphère fluide sans viscosité.

14 et 15. — M. Léon Aubry, de Jouy-les-Reims, adresse deux mémoires intitulés *Sur les diviseurs des formes quadratiques* et *Démonstration du théorème de Bachet*

Notre jeune collègue n'ayant malheureusement pu assister au Congrès, M. Aubry, de Dijon, a bien voulu se charger de la présentation de ces deux intéressantes notes. Il semble qu'en poursuivant dans cette voie, de curieux résultats doivent être rencontrés. Je citerai par exemple la méthode de M. Léon Aubry qui permet de décomposer en quelques lignes de calcul des nombres relativement grands en une somme de deux carrés. Ainsi

$$858\,001 = 924^2 + 65^2 .$$

Le nombre 858 001 est facteur de $2^{52} + 1$. Ceci me permet, à mon tour, de trouver en quelques minutes la décomposition en une somme de deux carrés de 308 761 441 autre facteur de $2^{52} + 1$, et enfin du nombre $2^{52} + 1$ lui-même, de plusieurs façons. Ainsi,

$$308\,761\,441 = 3\,055^2 + 17\,304^2 .$$

J'insiste sur ce point, car cette méthode permettra d'achever rapidement le tableau que j'ai presque achevé des nombres $2^{2x} + 1$ et de leurs diviseurs sous la forme $x^2 + y^2$. Je citerai, par exemple, parmi les nombres $< 2^{100} + 1$, le nombre

$$2^{64} + 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617 = 4\,046\,803\,256^2 + 1\,438\,793\,759^2$$

nombre décomposé en 1880 par Landry en deux facteurs *premiers*

$$2^{64} + 1 = 274\,177 \times 67\,280\,421\,310\,721 .$$

Il faudra donc étudier ce travail de près.

16. — M. Gilbert présente à la Section de mathématiques et à celle de météorologie réunies dans la salle des projections, une note intitulée *Les tourbillons aériens et leur application à la prévision du temps.*

17. — M. L. Montangerand, astronome à l'Observatoire de Toulouse, présente des *Suggestions sur la carte photographique internationale du ciel,* et *Idées nouvelles pour la découverte des étoiles variables.*

Emploi de la *chambre claire* pour la correction des reproductions des clichés de la carte et l'examen comparatif ultérieur des originaux.

Mesure systématique des étoiles doubles des clichés de la carte.

Découverte d'étoiles variables par examen des traînées obtenues par déréglage du mouvement d'horlogerie de l'instrument photographique des cercles stellaires extra-focaux. Conditions à remplir pour la reconnaissance rapide des étoiles variables des amas globulaires sur des clichés : rapidité de pose, avec grande sensibilité des plaques, et comparaison d'images séparées par des intervalles de quelques heures et juxtaposées sur le même cliché.

18. — M. Broca, de la Section physique, remercie la Section mathématique au sujet de la subvention que celle-ci lui a accordé pour un perfectionnement apporté aux axes des théodolites, et fait connaître le résultat de ses travaux.

19. — Miss Craig présente un mémoire de mécanique céleste et étudie la cause du mouvement spiral dans les nébuleuses, les lois d'impulsion dans les espaces dits *stellaires,* et l'origine des nébuleuses.

20, 21 et 22. — M. A. Gérardin, de Nancy, présente à la Section trois communications ; voici le résumé de la première :

Ayant *une* solution de l'une des équations indéterminées

$$ax^2 + bxy + cy^2 = kz^n$$

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = kz^n$$

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = kz^n$$

avec $n = 2$, 3 ou 4, il est très facile d'obtenir des solutions générales du troisième degré.

Supposons connue, par exemple, une solution

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 = h\gamma^2$$

de

$$aX^2 + bXY + cY^2 = hZ^2 .$$

Il suffit de poser

$$X = \alpha + mx , \qquad Y = \beta + my , \qquad Z = \gamma + mf$$

pour avoir m, après division par m

$$m = \frac{2h\gamma f - 2(a\alpha x + c\beta y) - b(\alpha y + \beta x)}{ax^2 + bxy + cy^2 - hf^2}$$

et l'on en tire immédiatement

$$X = c\alpha y^2 - (a\alpha + b\beta)x^2 - h\alpha f^2 - 2c\beta xy + 2h\gamma fx$$

$$Y = a\beta x^2 - (c\beta + b\alpha)y^2 - 2a\alpha xy - h\beta f^2 + 2h\gamma fy$$

$$Z = a\gamma x^2 + c\gamma y^2 + b\gamma xy + h\gamma f^2 - fx(2a\alpha + \beta b) - fy(2c\beta + b\alpha) .$$

De nombreuses et intéressantes applications peuvent en être déduites; je n'en citerai qu'une. En faisant $\beta = 1$, $h = 1$, nous retrouvons notre condition fondamentale de la décomposition des nombres

$$aX^2 + bX + c = Z .$$

La solution connue est

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = \gamma^2$$

α est alors la *solution maxima,* et il suffira d'avoir $Y = \pm 1$ pour trouver immédiatement les facteurs cherchés. Cette condition peut s'écrire

$$(\gamma y - f)^2 - a(x - \alpha y)^2 = \mp 1 .$$

J'ai résolu d'aussi simple façon les huit autres équations types considérées.

La deuxième communication traite de la *Geometria dei Tessuti*, écrit par Ed. Lucas en 1880. J'ai été assez heureux pour trouver cet article rare dans la bibliothèque de M. Laisant, qui a bien voulu me le confier avec plusieurs autres, ce dont nous le remercions ici sincèrement.

Le mémoire d'Ed. Lucas dont, grâce à l'active et dévouée collaboration de M. A. Aubry, de Dijon, nous avons actuellement la traduction complète, verra prochainement le jour.

J'ai profité de cette communication pour rappeler à nos collègues que je cherche à réunir tous les articles, mémoires, tirés à part de tous les arithmologues connus et inconnus, et que je compte sur leur complaisance pour me faire parvenir, même en communication, tout ce qu'ils connaîtront sur ce sujet. Je rappelle ainsi que M. C.-A. Laisant a bien voulu me promettre les archives d'Ed. Lucas, et que M. Perrin me communiquera d'intéressants renseignements sur le même sujet; que M. le Dr Peix m'a fait parvenir plusieurs lettres de Proth, arithmologue autodidacte qui a correspondu avec Ed. Lucas. En présence de ces résultats palpables, et des renseignements que la théorie des nombres est heureuse de ne pas voir tomber dans l'oubli, je constate à regret que certaines portes restent obstinément fermées. Je signalerai ainsi les archives de M. Le Lasseur, de Nantes (mort en 1894); nous serions *très reconnaissants* aux personnes qui pourraient nous faire une communication sur ce sujet, ainsi que sur d'autres professionnels ou amateurs de la théorie des nombres (ils sont malheureusement assez rares).

Je rappelle en terminant que j'ai déjà publié diverses traductions, dues à M. Fitz-Patrick, d'articles anglais ou américains modernes sur la décom-

position des nombres : LAWRENCE, Décomposition des nombres en facteurs ; COLE, Sur la décomposition des grands nombres ($2^{67}-1$) ; LAWRENCE, Détermination de certains nombres premiers (de 7 à 12 chiffres) ; CARMICHAËL, Une table des nombres *multiples parfaits ;* Dr MOREHEAD, Note sur des facteurs des nombres de Fermat (nombre *premier* $5 . 2^{75}+1$) ; Dr MOREHEAD et A.-E. WESTERN, Note sur les nombres de Fermat. — J'en ai d'autres en manuscrit, ainsi que des articles rares de savants français et étrangers, et j'insérerai avec plaisir dans *Sphinx OEdipe* les communications qui me seront faites.

Ma dernière présentation concernait la question à l'ordre du jour.

23. — *Erreurs de raisonnement de mathématiciens connus* (question à l'ordre du jour). M. BELOT indique la querelle des quadrateurs et des simplistes ; M. A. AUBRY, de Dijon, cite plusieurs erreurs historiques intéressantes ; M. A. GÉRARDIN cite, entre autres, une erreur de Viète. — Un rapport sur la question sera présenté au prochain congrès : cette question forme d'ailleurs une réponse à *I. M.*, 2855 (voir *E. M.*, 1910, p. 417).

24 et 25. — M. MAIRE présente *Deux lettres de Alexandre de Humboldt à François Arago.*

Ces deux lettres, dont l'une est datée du 28 janvier 1836 et l'autre sans date, témoignent, en plus de l'extrême amitié que le grand savant allemand portait à ARAGO, aussi de l'intérêt que prenait de HUMBOLDT aux sciences astronomiques. Il signale, dans la lettre non datée, une Notice que BESSEL, astronome à Kœnigsberg, avait préparée vers 1836, mais que cet astronome n'avait pas encore publiée. Cette étude concerne tout spécialement la comète de HALLEY et les oscillations de la queue. Un extrait assez long de ce Mémoire figure dans cette lettre.

La seconde, celle qui porte la date du 28 janvier 1836, traite à peu près du même sujet.

Ces deux lettres, après recherches faites, paraissent inédites ; néanmoins une réponse à une lettre écrite à Berlin, pourra seule confirmer cette opinion.

Puis la *Bibliographie de Blaise Pascal. Partie scientifique.* — Ce travail, pour la publication duquel l'Association pour l'Avancement des Sciences a bien voulu apporter son concours par une subvention, est à peu près terminé maintenant. Les Tables des matières, la préface et l'introduction restent seules à achever.

Mais il serait utile, dans l'intérêt de l'histoire de la science au XVIIe siècle et de la question PASCAL en particulier, de faire des recherches précises dans les nombreux papiers de CAVALIERI DEL POZZO qui se trouvent en grande partie en Italie, ainsi que dans ceux de LEIBNIZ déposés à la bibliothèque de Hanovre.

Il serait à souhaiter que l'Association française pour l'Avancement des Sciences voulût bien, par son puissant concours, favoriser ces recherches.

26. — M. PELLET présente une note *Sur la série de Newton.*

Soit $F(x)$ une fonction holomorphe à coefficients réels. Posons $\frac{F(a)}{F'(a)}=u_0$,

a étant une quantité réelle, et désignons par M le module maximum de $F''(a + 2\theta u_0)$ lorsque θ varie entre -1 et $+1$: $M \leqq |F''(a + 2\theta u_0)|$.

Si

$$(1) \qquad |F'(a)|^2 - 2M\,|f(a)| \geqq 0\,,$$

l'équation $F(a + h) = 0$ a une racine comprise entre $-2u_0$ et $+2u_0$, donnée par la série de Newton. Les termes de cette série ont des modules au plus égaux aux termes correspondants de la série de Newton qui donne la plus petite racine de l'équation du 2e degré, dont le premier membre offre deux variations :

$$|F(a)| - |F'(a)|\,u + \frac{M}{2}u^2 = 0\,.$$

Ainsi pour l'équation de Képler :

$$u - e \sin(m + u) = 0\,,$$

e étant compris entre 0 et 1, faisons $a = 0$: on a

$$F(0) = -e \sin m\,, \qquad F'(0) = 1 - e \cos m\,, \qquad F''(u) = e \sin(m + u)\,;$$

par suite $M \leqq e$. La condition (1) devient

$$(1 - e \cos m)^2 \geqq 2e^2\,|\sin m|\,.$$

Elle est satisfaite quel que soit m si

$$1 - 2e - e^2 > 0\,,$$

et même si

$$e \leqq \frac{1}{2}\,.$$

27. — M. E.-N. Barisien présente une note *Sur l'inscription dans un triangle du triangle équilatéral minimum.*

La solution géométrique de ce problème est connue.

Nous présentons une solution analytique de la question, qui a l'avantage de mettre en relief (ce que ne donne pas la construction connue), une valeur curieuse de la longueur du côté du triangle équilatéral minimum A'B'C' inscrit dans un triangle ABC, par la propriété suivante : *Si l'on construit du côté extérieur au triangle, le triangle équilatéral* BCA_1, *et si* $AA_1 = \alpha$, *le côté* x *du triangle équilatéral minimum est*

$$x = \frac{2S}{\alpha} = \frac{ah_a}{\alpha}\,,$$

S étant l'aire de ABC.

Ce qui revient à dire que : *Le côté* x *est une quatrième proportionnelle au côté* a, *à la hauteur correspondante* h_a *et à la distance* AA_1.

28. — M. Litre envoie un mémoire sur la *Trajectoire et mouvement du pendule de Foucault à chacune de ses oscillations. Dissymétrie des battements d'Est en Ouest et d'Ouest en Est.*

La Section tient à remercier les dames, particulièrement Mlle Bulan, qui ont bien voulu assister à une partie de ses travaux, et aux excursions organisées le 3 août au Val Suzon, et le 4 août

chez MM. MARCHAL, filateurs à Trouhans, et chez MM. JACOB, DELAFON & Cie à Belvoye et Pouilly. Nous remercions ici ces Messieurs pour leur cordiale réception.

La Section remercie à nouveau M. BALLAND, le sympathique bibliothécaire de l'Université, pour les facilités qu'il a bien voulu nous accorder.

M. A. GÉRARDIN a organisé deux séances de projections et présenté diverses collections de vues des congrès précédents, et une série de positifs colorés et en relief pris dans ses voyages en Italie, Suisse, Belgique et autres pays.

M. E. LEBON a vivement remercié notre président M. BELOT et M. A. AUBRY; de plus, M. LEBON a été assez heureux pour obtenir, à l'assemblée générale, le maintien de la date habituelle. Le changement aurait été, cette année, désastreux, puisque le Ve Congrès international des Mathématiciens aura lieu à Cambridge du 22 au 28 août.

Le prochain Congrès se tiendra à *Nîmes*. Le président des Sections I et II sera M. Ern. LEBON; le secrétaire M. A. GÉRARDIN.

Société mathématique suisse.

2e *Réunion; Soleure,* 1er août 1911.

La *Société mathématique suisse* a tenu sa 2e réunion ordinaire à *Soleure*, le 1er août 1911, sous la présidence de M. le Prof. R. FUETER (Bâle), comme section de la *94e Réunion de la Société helvétique des Sciences naturelles.*

Dans sa *séance administrative*, la Société a confirmé pour 1912 le comité actuel, composé de MM. R. FUETER (Bâle), H. FEHR (Genève) et M. GROSSMANN (Zurich). Sur la proposition de MM. les vérificateurs des comptes, MM. JACCOTTET (Lausanne) et MEISSNER (Zurich), elle a approuvé le rapport du trésorier; les recettes se montent à Fr. 900,75, les dépenses à Fr. 236,25, d'où un solde créditeur de Fr. 664,50. Le nombre des membres est actuellement de 112 dont 25 membres à vie.

L'assemblée décide ensuite de tenir une réunion extraordinaire à *Berne*, en décembre 1911; puis, sur la proposition du Comité, elle confère le titre de *membre honoraire*

1° à M. le Prof. C.-F. GEISER (Zurich) qui, par son activité à l'Ecole polytechnique fédérale, par ses remarquables travaux dans le domaine des surfaces algébriques, et par ses relations très étendues avec les mathématiciens du pays et de l'étranger, a largement contribué au développement des mathématiques en Suisse;

2° à M. le Prof. H. KINKELIN (Bâle), un élève du grand mathématicien suisse Steiner, qui s'est particulièrement distingué dans les mathématiques des assurances.

La Société fait en outre une troisième nomination de membre honoraire qui sera proclamée à l'occasion d'un prochain anniversaire.

La *partie scientifique* a fourni d'intéressantes communications. On en trouvera le résumé ci-après.

1. — M. le Prof. Dr KOLLROS (Zurich) démontre, par les méthodes élémentaires de la géométrie synthétique, les principales propriétés de l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, *h*, que Steiner a énoncées sans démonstration (Crelle 53) et que Cremona a déduites de la théorie générale des courbes planes (Crelle 64)[1].

Il communique en outre quelques résultats de ses recherches relatives à une *surface de 6me ordre et de 4me classe* σ qui peut être considérée comme une généralisation de l'hypocycloïde *h*. Cette surface a *quatre points aiguilles* aux sommets d'un tétraèdre régulier *t*; le cône tangent en un de ces points se réduit à deux plans imaginaires dont l'intersection est une hauteur du tétraèdre; les quatre hauteurs se coupent au centre d'une sphère quadruplement tangente à σ.

L'hypocycloïde *h* touche la droite à l'infini aux deux points cycliques; elle est l'homologue du cercle inscrit au triangle des rebroussements dans la transformation quadratique dont les points correspondants sont les deux foyers réels des coniques tangentes aux trois côtés du triangle.

La surface σ touche la sphère circonscrite au tétraèdre *t* le long du cercle imaginaire de l'infini; elle est l'homologue de la sphère inscrite à *t* dans la transformation cubique dont les points correspondants sont les deux foyers des quadriques *de révolution* tangentes aux quatre faces du tétraèdre.

Les équations homogènes des deux figures *h* et σ présentent des analogies frappantes. L'équation de *h*, rapportée au triangle des rebroussements est, en coordonnées ponctuelles :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 0 \;;$$

elle peut s'écrire sous la forme rationnelle :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

[1] M. C. WIRTZ a fait une étude analogue dans sa thèse : *Die Steiner'sche Hypozycloïde.*

ou en développant :

$$(xy + yz + zx)^2 = 4xyz(x + y + z) .$$

$xy + yz + zx = 0$ représente le cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire le lieu des foyers des paraboles inscrites, ou encore le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle soient en ligne droite ; l'enveloppe de ces droites est homothétique à h.

L'équation de σ rapportée au tétraèdre des points aiguilles est, en coordonnées ponctuelles :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{z} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{t} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(xyz + yzt + ztx + txy)^2 = 3xyzt(xy + xz + xt + yz + yt + zt) .$$

$xyz + yzt + ztx + txy = 0$ représente le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre, ou encore le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les quatre faces soient dans un même plan. Il serait intéressant d'examiner si l'enveloppe de ces plans est encore homothétique à σ.

Discussion : MM. Fueter et Tœplitz.

2 et 3. — M. le Dr O. Tœplitz (Göttingue), parle d'abord des recherches récentes *de la théorie des variables en nombre infini*. Cette nouvelle discipline est déjà sortie de son premier cadre, fourni par la théorie des équations intégrales et cela grâce aux récentes recherches de M. Hilbert et de ceux qui ont attaqué dans toute leur généralité la théorie des systèmes d'équations linéaires et des transformations orthogonales de formes quadratiques à un nombre infini de variables (v. la 1re partie de la Note IV de Hilbert). Le conférencier montre, à l'aide d'exemples, quels sont les points de vue nouveaux introduits par Hilbert, et signale les récentes recherches par lesquelles M. Hellinger et lui-même ont

développé cette nouvelle théorie du savant mathématicien de Gœttingue.

Dans une seconde communication, intitulée *Ueber einige geometrische Aufgaben*, M. Tœplitz examine deux problèmes de l'analysis situs qu'il a rencontrés et mentionne un troisième problème, qui reste à résoudre : sur toute courbe plane fermée il existe quatre points formant les sommets d'un carré. — *Discussion :* M. Fueter, Speiser, Læmmel, Stæckel et Grossmann.

4. — M. le Prof. Dr W.-H. Young (Cambridge et Genève) fait une intéressante conférence sur *les récents progrès de la théorie des séries de Fourier*.

A la question « Sous quelles conditions une série trigonométrique est-elle une série de Fourier ? » il donne les réponses suivantes :

a) Si les fonctions des limites supérieures et inférieures $U(x)$ et $L(x)$ sont bornées ; où $U(x)$ et $L(x)$ sont les

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ ;$$

b) Si $U(x)$ et $L(x)$ satisfont à la condition *a)* sauf dans le voisinage d'un ensemble dénombrable de points et si de plus $\int |U(x)|\, dx$ et $\int |L(x)|\, dx$ existent.

Le conférencier indique les conditions de Fischer-Riesz dans le cas où la fonction $f(x)$, dont on considère la série de Fourier, est une fonction de carré intégrable, il indique que dans le cas général des conditions de cette espèce ne peuvent pas être établies. A cela il joint des exemples de séries trigonométriques qui sont étroitement liées à une série de Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sans toutefois être des séries de Fourier, en particulier la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

et la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} \cos nx + b_{n+1} \sin nx) \ .$$

Par contre, il est de toute nécessité de mentionner que la série

$$\sum_{n=1} n^{-q} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \ ,$$

où $0 < q$, est toujours une série de Fourier, comme, du reste, les séries

$$\sum_{n=1} n^q (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1} n^q (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

si $0 < q < d$ et $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \mathrm{B}$, où B est une constante finie. Un autre théorème du même genre dit que si A_n et B_n, comme a_n et b_n, sont des constantes de Fourier, la série

$$\sum_{n=1} [(a_n \mathrm{A}_n + b_n \mathrm{B}_n) \cos nx + (a_n \mathrm{B}_n - b_n \mathrm{A}_n) \sin nx)$$

est une série de Fourier.

Comme contribution à la théorie de la convergence, le conférencier donne une condition pour la convergence ou la divergence des séries alliées qui correspond à celle de de la Vallée-Poussin pour la convergence des séries de Fourier.

Soit par exemple $\frac{1}{u} \int_0^u [f(x+u) - f(x-u)] du$ une fonction à variation bornée, la série alliée converge ou diverge vers $\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\infty} f(x+u) - f(x-u) du$, au cas où cette limite est déterminée, sans cela la série oscille. D'ailleurs la recherche conduit à des conditions suffisantes et d'une assez grande portée pour sa convergence, au sens de Cesàro, aussi bien des séries de Fourier que des séries alliées.

Dans les théorèmes de la théorie de l'intégration on insiste sur le fait que la convergence, et encore plus la convergence uniforme, joue un rôle secondaire.

L'équation

$$\int_c^z f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_c^z g(x) dx + \sum \int_c^z (a_n \cos nx + b_n \sin nx) g(x) dx$$

subsiste dans les cas suivants :

1. g est à variation bornée dans l'intervalle fini ou infini (c, z) et dans le dernier cas $\lim_{z=\infty} g(z) = 0$.

2. f est à variation bornée et g possède une intégrale absolument convergente dans l'intervalle fini ou infini (c, z).

3. f^{1+p} et $f^{1+\frac{1}{p}}$ ont, pour $0 < p < 1$, des intégrales absolument convergentes et si $p < 1$ la convergence est prise au sens de Cesàro.

Finalement le conférencier donne une esquisse d'un procédé général de sommation pour les séries de Fourier, procédé qui comprend ceux de Cesàro-Fejier, de de la Vallée-Poussin, de Poisson, etc. Ce procédé se divise en deux parties :

I. Suites de séries finies.

II. Suites de séries convergentes infinies.

La méthode s'appuie sur l'intégration déjà citée dans le cas I. où $z = \infty$. Dans l'équation

$$\int_0^\infty \{f(x+kt) + f(x-kt)\} U_k(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} a_0 \int_0^\infty U_k(t)\,dt + \sum_{n=1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \int_0^\infty U_k(t) \cos nkt dt$$

laissons tendre k vers zéro. Si U est indépendant de k, le premier membre prend, sous des conditions faciles à énoncer, la forme d'un multiple constant du premier membre des expressions

$$\frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0)\ , \qquad \lim_{h=0} \left\{ \frac{F_1(x+h) - F_1(x-h)}{2h} \right\}\ ,$$

$$\lim_{h=0} \left\{ \frac{G_2(x+h) + G_2(x-h)}{h^2} \right\}\ , \ldots$$

qui est fini et déterminé, où

$$F_1(x) = \int_0^x f(x)\,dx\ , \qquad F_2(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x)\,dx\ ,$$

$$G_2(x+h) = F_2(x+h) - F_2(x) - hF_1(x)\ , \qquad \text{etc.}$$

La méthode appliquée aux séries de Fourier dérivées donne, sous des conditions appropriées, les dérivées correspondantes f', f'' ...

Discussion : MM. Tœplitz, Plancherel, Stäeckel et Madame Young.

5. — M. le Dr R. Læmmel (Zurich) parle *des paradoxes du calcul des probabilités*. Il montre que des solutions exactes, qui cependant semblent en contradiction, peuvent toujours être rencontrées et que pour obtenir la probabilité il faut suivre un certain processus des hypothèses. A l'aide du paradoxe Bertrand il montre que la valeur de la probabilité dépend non seulement des conditions initiales, mais aussi des conditions de réalisation. Si l'on en tient compte tout paradoxe disparaît. — *Discussion :* M. v. Mises.

6. — M. le Prof. Dr R. v. Mises (Strasbourg), *Ueber neuere Probleme der Mechanik*. — Dans sa conférence sur les récents problèmes de la Mécanique, M. v. Mises rappelle d'abord les travaux importants que des mathématiciens suisses ont fourni, aussi bien

en Mécanique rationnelle qu'en Mécanique technique. Il montre qu'en particulier dans les *milieux continus* les recherches doivent se développer parallèlement dans ces deux directions. Si l'on sort de la théorie ordinaire de l'élasticité, la Mécanique rationnelle dispose de deux théories qui doivent expliquer les phénomènes observés sur les *corps solides:* la théorie de la plasticité de Saint-Venant, qui est un peu tombée dans l'oubli chez les mathématiciens et qui vient d'être reprise sous une forme rudimentaire par les techniciens; puis la théorie élastique de Boltzmann et de M. Volterra. Depuis quelques années M. Duhem a encore élargi les théories mécaniques en adjoignant aux hypothèses des notions thermodynamiques. Le conférencier termine en signalant encore des problèmes récents d'hydrodynamique notamment celui de la turbulence et montre le lien de ce problème avec les éléments de la Mécanique statistique.

7. — M. le Prof. Dr M. Plancherel (Fribourg) parle de *la sommation des séries de Legendre.* — Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, définie dans l'intervalle $(-1, +1)$ et assujettie à la seule condition d'être intégrable en valeur absolue dans l'intervalle $(-1, +1)$. $P_k(x)$ désignant le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre et

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x)\, dx \ ,$$

la série

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(x)$$

est la série de Legendre de $f(x)$. Posons

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+2)(n+3)\dots(n+k+1)} a_k P_k(x)$$

$$\Sigma_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} a_k P_k(x)$$

on démontre que

$$\lim_{n=\infty} \inf. S_n = \lim_{n=\infty} \inf. \Sigma_n \ , \qquad \lim_{n=\infty} \sup. S_n = \lim_{n=\infty} \sup. \Sigma_n \ .$$

Il suffit donc d'étudier l'une de ces deux expressions. Or, ici, c'est S_n qui se prête le mieux au calcul.

Théorème. $S_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ *en tout point de continuité de la fonction. La convergence est uniforme dans tout intervalle*

entièrement intérieur à un intervalle de continuité de f. *En tout point de discontinuité de première espèce,* $S_n(x)$ *converge vers* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. *Plus généralement,* $S_n(x)$ *converge vers la dérivée de l'intégrale définie de* f(x) *en tout point où cette dérivée existe.*

Dans ce théorème comme dans les suivants, nous supposons pour abréger, que le point x est un point *intérieur* de l'intervalle $(-1, +1)$. M. Plancherel note encore le théorème suivant.

Théorème. *Si* f(x) *est bornée dans un intervalle* (α, β), $S_n(x)$ *reste comprise dans* (α, β) *entre les limites inférieure et supérieure de* f(x) *dans ce même intervalle.*

Ce qui constitue le principal avantage du procédé de sommation que nous étudions et ce qui le distingue du procédé de Cesàro employé par M. Féjer, c'est qu'il permet d'approcher les dérivées de $f(x)$, là où elles existent. Supposant encore $x \neq \pm 1$, nous avons en effet le

Théorème. $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ *converge, pour* $n = \infty$, *vers* $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ *en tout point où cette dérivée existe. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de* $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$. *Plus généralement,* $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ *converge vers la dérivée généralisée d'ordre* p, *là où cette dérivée généralisée existe.*

Tous ces théorèmes sont des conséquences immédiates de théorèmes relatifs à l'application du procédé de sommation (S_n) à la série de Laplace. Le même procédé conduit à des résultats intéressants dans le cas des séries de Bessel. Le conférencier n'insiste pas là-dessus. La démonstration de ces théorèmes paraîtra prochainement dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. — *Discussion :* MM. Young et Tœplitz.

8. — M. G. Dumas expose ses *recherches relatives à la résolution des singularités des surfaces.* — Prenant un exemple, il considère l'équation

$$(1)\quad Az^{30} + Bx^{28}z^{15} + Cx^{15}y^{10} + Dx^{12}y^{12} + Ey^{16}z^{6} + Fx^{14}y^{18}z^{3} = 0 .$$
$$(A, B, C, D, E \neq 0)$$

à laquelle il fait correspondre une certaine surface polyédrale *Π*[1].

Prenant ensuite, sur *Π*, le sommet A correspondant au terme de coefficient A, il établit, relativement à ce dernier point et par

[1] Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* Paris, 13 mars 1911, p. 682.

le moyen d'un trièdre en rapport avec Π, la substitution

$$(2) \qquad x = \xi^6 \eta^2 \zeta^3 , \qquad y = \xi^{12} \eta^3 \zeta^5 , \qquad z = \xi^7 \eta^2 \zeta^3$$

qui, appliquée à (1), transforme cette équation en une autre

$$(3) \qquad A + C\zeta^5 + D\xi^6\zeta^6 + E\xi^{24}\zeta^8 + B\xi^{14}\eta^{60}\zeta^{49} + F\xi^{111}\eta^{28}\zeta^{51} = 0 ,$$

qu'on peut écrire

$$(4) \qquad \varphi(\xi, \zeta) + \eta\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 ,$$

où φ et ψ sont respectivement en ξ, ζ et en ξ, η, ζ des polynômes entiers.

Mais de (2), on déduit :

$$\xi = \frac{z}{x} , \qquad \eta = \frac{z^6}{xy^3} , \qquad \zeta = \frac{x^3 y^2}{z^6} .$$

La substitution (2) est ainsi *réversible* et les surfaces (1) et (3) se correspondent point par point.

Si dans (3), respectivement (4), on fait $\eta = 0$, on obtient

$$(5) \qquad \varphi(\xi, \zeta) = 0 .$$

Les points de (4) situés dans le voisinage de la courbe (5) ont donc comme correspondants sur (1) des points constituant dans le voisinage de l'origine une partie de la surface.

L'exemple précédent montre ainsi le rôle des surfaces polyédrales Π dans la réduction des singularités des surfaces. — *Discussion :* MM. Fueter, Young, Geiser.

9. — M. Luc. Baatard (Genève) présente un procédé très rapide et tout à fait général pour l'*extraction d'une racine quelconque d'un nombre réel quelconque.* Sa communication sera publiée dans un prochain numéro de l'*Ens. math.*

10. — M. R. de Saussure (Genève) présente une Note intitulée *Réponse à l'article de M. Study sur ma « Géométrie des Feuillets »*.

« Dans un article intitulé « Die Kinematik der Herren de Saussure et Bricard », inséré dans le *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* (n° de juillet-août 1910), M. le prof. Study a fait un compte rendu de mon dernier ouvrage intitulé « Exposé-résumé de la Géométrie des Feuillets » (librairie Kündig, Genève, 1910).

« Dans cet article, M. Study fait une réclamation de priorité relativement à cette nouvelle géométrie, dont je me considère comme l'auteur, géométrie qui est une généralisation de la géométrie réglée, avec cette différence que l'élément primitif qui lui sert de base est non une droite, mais un « feuillet », figure équivalente à une *position* d'un corps solide de forme quelconque.

« Je crois que la seule manière impartiale d'éclaircir la question de priorité soulevée par M. Study est d'établir la liste chronologique des différents articles et travaux que l'on peut considérer comme des précurseurs de la géométrie des feuillets. On pourra laisser ainsi au public impartial le soin de rendre à chacun ce qui lui est dû et de dire après avoir relu ces articles, quel est l'auteur qui a le premier clairement conçu cette nouvelle géométrie et en a défini les formes fondamentales. »

Voici la liste des travaux à consulter :

1. Tait, *Théorie élémentaire des quaternions* (traduction française Plarr, 1884, 2e éd., T. II, p. 165).
2. Stephanos, *Mathematische Annalen* (22e vol., 1883).
3. Study, *Mathematische Annalen* (39e vol., 1891).
4. de Saussure, *Cinématique des fluides. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*. V, 497; VI, 296 (1898).
5. » *Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe. Comptes rendus*. Paris, 1901.
6. » *Théorie géométrique du mouvement des corps. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*, XIII, 425; XIV, 14, 209 (1902).
7. » *Mouvement des fluides*. Id., XIII, 618 (1902).
8. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903.
9. de Saussure, *Théorie géométrique du mouvement des corps. Arch. des Sc. Ph. et Nat. de Genève*, XVIII, 25 (1904).
10. » *Mouvements infiniment petits d'un corps solide*. Id., XVIII, 512 (1904).
11. » *Théorème de cinématique*. Id., XVIII, 602 (1904).
12. » *Mouvement des fluides*. Id., XX, 717 (1905).
13. » *Théorie géométrique du mouvement des corps*. Id., XXI, 36, 129 (1906).
14. » *La géométrie des feuillets*. Id., XXI, 134, 262 (1906).
15. » *Classification des systèmes géométriques*. Id., XXI, 342 (1906).
16. » *Théorème fondamental de la géométrie de l'espace feuilleté*. Id., XXIV, 391 (1907).
17. » *Géométrie des flèches*. Id., XXVII, 86 (1909).
18. » *Géométrie des feuillets*. Id., XXVIII, 425, 651 (1909).
19. » *Les systèmes de corps solides*. Id., XXVIII, 429, 652 (1909).
20. » *Les systèmes de corps solides cotés*. Id., XXIX, 96, 310, 484 (1910).
21. » *Les formes fondamentales de la géométrie des feuillets*. Id., XXIX, 538 (1910).
22. » *Sur les corps solides opposés*. Id., XXX, 198 (1910).
23. » *Exposé résumé de la géométrie des feuillets*. Janvier 1910, Mémoires de la Soc. de Phys. de Genève.
24. Bricard, *La géométrie des feuillets de M. René de Saussure. Nouv. Ann. de Math.*, Paris, 1910.
25. de Saussure, *Sur les corps solides opposés*. Comptes rendus, Paris, 1910.
26. Study, *Comptes rendus*, Paris, 1910.

27. Bricard, *Comptes rendus*, Paris, 1910.
28. de Saussure, *Comptes rendus*, Paris, 1910.
29. Cailler, *Sur la pentasérie linéaire de corps solides. C. R.*, Paris, 1910.

« En résumé, on peut voir, d'après ce tableau, que les huit coordonnées homogènes d'un corps solide ont apparu pour la première fois chez M. Tait, puis en 1891 chez M. Study, mais ces coordonnées n'ont été appliquées à la géométrie des feuillets qu'en 1903 par M. Study. De mon côté, sans me servir de coordonnées, j'ai fondé la géométrie des feuillets en 1898 par la méthode synthétique, laquelle a l'avantage de mettre cette géométrie à la portée des études mathématiques élémentaires, et de 1898 à 1910 j'ai trouvé l'une après l'autre les formes fondamentales de cette géométrie. »

11. — M. le Prof. Dr H. Fehr (Genève) donne un aperçu très rapide de l'*état des travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique* et plus particulièrement de la sous-commission suisse; il met en circulation les publications les plus récentes.

12. — Comme suite à la communication ci-dessus, M. le Prof. Dr M. Grossmann (Zurich) dépose son rapport sur l'*enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique fédérale*.

13. — M. le Prof. Dr F. Rudio (Zurich) présente le premier volume des *œuvres d'Euler*; c'est le traité d'Algèbre. Il saisit cette occasion pour donner quelques renseignements sur l'état des travaux. Les volumes sous presse ou partiellement composés sont le premier volume de la *Dioptrik* et la Mécanique. Des contrats ont été passés avec quinze auteurs. Deux des collaborateurs ont déjà terminé leur travail de revision et d'annotation ; ce sont M. Kowalewski pour l'*Institionum calc. different.* et M. Krazer pour les mémoires sur les fonctions elliptiques. De son côté M. Eneström revoit en ce moment les manuscrits de St-Pétersbourg.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. R. Dedekind, professeur à l'Ecole technique de Brunswick, a été élu associé étranger de l'Académie royale de Lincei (section de mathématique).

M. E. Fischer, professeur à l'Ecole technique supérieure de Brünn, est nommé professeur ordinaire à l'Université d'Erlangen.

M. R. Fuchs, privat-docent, est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. E. Salkowsky est nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin.

M. A. Schoenflies, professeur à l'Université de Koenigsberg, est nommé professeur à l'Académie des Sciences sociales de Francfort a. M.

Privat-docents. — On été admis en qualité de privat-docents : M. le prof. R. Gans, de Tubingue, à l'Université de Strasbourg. — M. W. v. Ignatowsky, pour la Physique théorique et la Mécanique à l'Ecole technique supérieure de Berlin. — M. R. König, pour les mathématiques, à l'Université de Leipzig. — M. H. v. Sanden, pour les mathématiques appliquées, à l'Université de Goettingue. — M. S. Schimmack, pour la méthodologie des mathématiques à l'Université de Goettingue. — M. L. Schleiermacher, pour les mathématiques pures et appliquées, à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

Angleterre. — Sir J. Larmor, professeur à l'Université de Cambridge, a été élu associé étranger de l'Académie royale dei Lincei (section de mécanique).

La Société mathématique de Londres a attribué la *Médaille de Morgan* au professeur H. Lamb.

M. le Dr A.-N. Whitehead, F. R. S « Fellow » du Trinity College, Cambridge, est nommé « Lecturer » pour les Mathématiques appliquées et la Mécanique à l'University College de Londres.

Autriche. — M. G. Majcen est nommé professeur à l'Université d'Agram.

M. Bydzowsky est admis en qualité de privat-docent à l'Ecole technique supérieure bohême de Prague.

Etats-Unis. — M. G. A. Bliss, de l'Université de Chicago, est nommé professeur à l'Université Harvard.

M. G. A. Hale, directeur de l'Observatoire du Mt-Wilson, est nommé docteur honoraire de l'Université de Cambridge.

M. M. Mason, de l'Université de Wisconsin, est nommé professeur à l'Université Harvard.

M. le prof. A. A. Michelson, de l'Université de Chicago, est nommé docteur honoraire à l'Université de Goettingue.

France. — M. Blutel, prof. de Mathématiques spéciales au Lycée St-Louis, est nommé inspecteur général de l'Instruction publique en remplacement de M. Combette, nommé inspecteur général honoraire.

M. Maillet est nommé professeur des cours d'analyse et de mécanique (année préparatoire) de l'Ecole des Ponts et Chaussées, en remplacement de M. Haag, décédé.

M. Zoretti, chargé de cours, est nommé professeur de mécanique rationnelle et appliquée à l'Université de Caen.

Faculté des Sciences de Paris. L'Institut aérotechnique, fondé grâce à un généreux don de M. Henri Deutsch, de la Meurthe, a été inauguré à St-Cyr, le 6 juillet, sous la présidence de M. Steeg, Ministre de l'Instruction publique. Des discours ont été prononcés par M. le Recteur Liard, par M. Appell, Doyen de la Faculté des Sciences, et par le fondateur. M. Appell a exposé la tâche qui incombera au nouvel Etablissement pour réaliser l'union de l'action technique et de l'action scientifique. On trouvera son discours dans la *Revue scientifique* du 22 juillet et dans la *Revue du Mois* du 10 août.

Hollande. — M. le Prof. H.-A. Lorentz, de l'Université de Leyde, est nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Vienne.

Italie. — M. U. Dini, professeur à l'Université de Pise, a été élu membre ordinaire (non résident) de l'Académie des Sciences de Naples.

M. G.-B. Guccia, professeur à l'Université de Palerme a été élu membre correspondant de la même Académie.

M. O. Tedone, professeur à l'Université de Gènes, a été nommé membre correspondant de l'Académie royale de Lincei.

Suède. — M. H. v. Koch, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stockholm, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm, en remplacement de M. le Prof. E. Mittag-Leffler, qui prend sa retraite.

Nécrologie.

M. J. Grünwald, professeur à l'Université allemande de Prague, est décédé le 1er juillet 1911, à l'âge de 35 ans.

M. le Prof. Dr H. Schubert est décédé à Hambourg le 20 juillet 1911, à l'âge de 63 ans.

NOTES ET DOCUMENTS[1]

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1911-1912 (suite).

ALLEMAGNE

Berlin; *Universität.* — SCHWARZ : Elementargeometrische Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, 2; Synt. Geometrie, 4; Th. der analyt. Funktionen I, 4; Kolloquium; Seminar. — FROBENIUS : Analyt. Geometrie, 4; Zahlentheorie, 4; Seminar. — SCHOTTKY : Höhere algebr. Kurven, 4; Th. der automorphen oder Polygonfunktionen, 4; Seminar. — HETTNER : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Th. der Beobachtungsfehler, 2. — KNOBLAUCH : Differentialrechnung, 4; Uebgn. 1; Th. der ellipt. Funktionen, 4. — LEHMANN-FILHÉS : Integralrechnung, 4; Determinanten, 4. — SCHUR : Th. der algebr. Gleichungen, 4; Funktionenth. II, 4. — FOERSTER : Geschichte der neueren Astronomie, 2; Astronomie und soziale Kultur, 1; Grundlehren der astron. Messkunst, 1. — STRUVE : Einleit. in die Th. der Satelliten, 4; Uebgn. auf der Sternwarte. — COHN : Bestimmung der Bahn der Himmelskörper, 3; Uebgn. dazu, 2. — SCHEINER : Photometrie der Gestirne, 2; Astrophysikalisches Kolloquium. — MARCUSE : Allgemeine Himmelskunde mit Lichtbildern, 2; Geograph. Ortsbestimmung, 2. — WITT : Ausgew. Kapitel der sphär. Astronomie, 2. — REICHENHEIM : Physik der Sonne, 1. — GRÜNEISEN : Energiehaushalt der Erde. — HELMERT : Die Figur der Erde, 1; Anwendung der kürzesten Linie auf die Geodäsie, 1. — SCHMIDT : Methode der kleinsten Quadrate, 2; Geophysik. Kolloquium. — KOHLSCHÜTTER : Grundzüge der Nautik, 1.

Bonn; *Universität.* — STUDY : Einleitung in die analyt. Geometrie, 4; Differentialgeometrie II, 2; Seminar. — LONDON : Synth. Geometrie, 2; Diff.- u. Integralrechnung II, 4; Seminar. — HAUSDORFF : Einführung in die Funktionentheorie, 4; Fouriersche Reihen und verwandte Entwicklungen, 2; Seminar. — MÜLLER : Algebr. Gleichungen (Galoissche Theorie), 3. — FURTWÄNGLER : Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik, 2. — MÖNNICHMEYER : Geograph. Ortsbestimmungen, 2; Gebrauch der astron. Jahrbücher, 1; Praktische Uebgn. — KÜSTNER : Sphär. Astronomie, 3; Fixsternkunde, 1; Praktische Uebgn. — PFLÜGER : Mechanik, 4, mit Uebgn., 1. — BUCHERER : Mathematische Einführung in die neuere Elektrizitätslehre, 2

[1] Faute de place, nous devons renvoyer à un prochain numéro la suite du *Compte rendu* des publications concernant la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Breslau; *Universität.* — Sturm : Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Geom. Verwandtschaften II, 2; Seminar. — Kneser : Ellipt. Funktionen, 4; Integralgleichungen, 2; Seminar. — Schmidt : Integralrechnung, 4; Mengenlehre, 2; Seminar. — Schnee : Differentialgeometrie, 3; Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, 2. — Franz : Th. der Bahnrechnung der Kometen und Planeten, 4; Uebgn. dazu, 1; Kosmogonie, 1; Astron. Kolloquium. — Pringsheim : Allgemeine Mechanik, 4; Einführung in die Relativitätstheorie, 1.

Erlangen; *Universität.* — Gordan : Zahlentheorie, 4. — Nœther : Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Th. der Abelschen Funktionen, 4; Darst. Geometrie, 4; Seminar. — Baldus : Elementare Versicherungsmathematik, 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Uebgn. dazu, 1.

Freiburg i. B.; *Universität.* — Stickelberger : Funktionentheorie, 4; Höhere ebene Kurven, 3; Seminar. — Heffter : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Uebgn. dazu, 1; Analyt. Mechanik der zusammenhängenden Massen, 3; Seminar. — Bolza : Einführung in die Th. der Integralgleichungen, 2; Seminar. — Lœwy : Diff.-rechnung, 4; Uebgn. dazu, 1; Th. der algebr. Gleichungen II, 3; Seminar. — Seith : Projektive Geometrie, 2.

Giessen; *Universität.* — Netto : Höhere Algebra, 3; Analyt. Geometrie des Raumes, 3; Seminar. — Schlesinger : Diff.- und Integralrechnung mit Uebgn., 5; Th. des logarithmischen Potentials, 4; Seminar. — Grassmann : Analyt. Mechanik II, 4; Festigkeitslehre, 3; Seminar. — Fromme : Geom. und phys. Optik, 3; Uebgn., 1. — Schmidt : Kinetische Gastheorie, 2.

Göttingen; *Universität.* — Klein : Einführung in die Diff.- und Integralrechnung II, 4; Seminar. — Hilbert : Logische Grundlagen der Mathematik, 1; Mechanik der Kontinua, 4; Seminar. — Landau : Analyt. Zahlentheorie, 4; Seminar. — Runge : Mechanik mit Uebungen, 6. — Weyl : Determinanten, 2; Höhere Funktionentheorie, 4; Uebungen zur Diff.- und Integralrechnung, 2. — Tœplitz : Einführung in die Funktionentheorie, 4; Uebgn. dazu, 2. — Haar : Krumme Linien und Flächen, 4. — Born : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3; Kapillarität, mit Uebungen, 2. — Prandtl : Statik der Bauwerke, 3; Kolloquium über Fragen der Luftschiffahrt und Flugtechnik, 1. — Bernstein : Versicherungsrechnung, 2; Mathem. Statistik und Versicherungsmathematik, 3. — v. Karman : Uebungen zur graph. Statik, 2; Thermodynamik, mit Anwendungen des thermodynamischen Potentials, 3. — Ambronn : Berechnung der Bahnen von Kometen und Planeten, 2; Ueber Parallaxe und Aberration, 1; Besprechung neuerer astronomischer Literatur; Astron. Uebungen. — Wiechert : Vermessungswesen, 4. — Voigt : Partielle Differentialgleichungen der Physik, 4; Geom. Optik, 2. — Riecke : Ausgewählte Probleme der Kinetischen Gastheorie, 1.

Greifswald; *Universität.* — Engel : Th. der Transformationsgruppen II, 4; Diff. und Integralrechnung I, 4; Analyt. Geometrie des Raumes, 2; Seminar. — Vahlen : Funktionentheorie, 4; Kinematik und Mechanismen, 1; Seminar. — Blaschke : Analyt. Mechanik II, 4; Uebgn. dazu, 2; Darst. Geometrie mit Uebgn. 4. — Mie : Hydrodynamik, 4; Uebungen dazu, 1; Besprechungen neuerer physik. Arbeiten.

Halle; *Universität.* — Cantor : Der Diff.- und Integralrechnung erster Teil, 5; Seminar. — Wangerin : Integralrechnung mit Uebgn., 4; Anwen-

dungen der ellipt. Funktionen, 2; Sphär. Trigonometrie und mathem. Geographie, 2; Seminar. — Getzmer : Gewöhnliche Differentialgleichungen, 4; Analyt. Mechanik, 4; Seminar. — Eberhard : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Kolloquium. — Buchholz : Th. der speziellen Störungen, 2; Wahrscheinlichkeitsrechnung und Th. der Ausgleichung der Beobachtungsfehler, 1.

Jena; *Universität*. — Thomæ : Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie, 5. — Haussner : Zahlentheorie, 4; Diff.- und Integralrechnung II, 5; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Proseminar, 2; Seminar, 1. — Frege : Riemannsche Funktionentheorie, 4; Begriffsschrift, 1. — Winkelmann : Technische Mechanik, 4, mit Uebgn., 1; Vektoranalysis, 1. — Thær : Darst. Geometrie II mit Uebgn., 6. — Knopf : Bestimmung der Bahnen der Himmelskörper, 3; Numerische Berechnung des scheinbaren Laufes der Planeten und Kometen, 1; Populäre Astronomie, 1. — Auerbach : Mechanik der festen, flüssigen und gasigen Körper, 4; Das absolute Masssystem, 1.

Kiel; *Universität*. — Pochhammer : Diff.-Geometrie, 4; Part. Differentialgleichungen, 4; Seminar. — Landsberg : Integralrechnung, 4; Höhere Algebra, 4; Seminar. — Dehn : Einführung in die höhere Analysis, 3; Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Uebgn. aus der angewandten Mathematik. — Neuendorff : Vektoranalysis, 1; Ausgewählte Kapitel der technischen Mechanik II mit Uebgn., 3; Uebgn. aus der angew. Mathematik. — Kobold : Methode der kleinsten Quadrate, 2; Uebgn. dazu. — Wilkens : Sphär. Astronomie, 1. — Harzer : Höhere Geodäsie, 3; Uebgn. im numerischen Rechnen, 1.

Königsberg; *Universität*. — Meyer : Integralrechnung, 3, mit Uebgn., 1; Einleitung in die höhere Geometrie, 3; Seminar. — Schœnfliess : Differentialgeometrie der Kurven und Oberflächen, 4; Seminar. — Kaluza : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Uebgn. dazu, 1; Determinanten, 2. — Bieberbach : Part Differentialgleichungen, 2; Kolloquium und Ergänzungen dazu, 1. — Battermann : Einleitung in die Mechanik des Himmels, 2; Allgemeine Astronomie, 1.

Leipzig; *Universität*. — Roux : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Anwendung der Differentialrechnung auf Raumkurven und Flächen, 4; Seminar. — Hölder : Höhere Algebra, insbes. Galoissche Theorie der Gleichungen, 2; Ellipt. Funktionen, 4; Seminar. — Herglotz : Mechanik, 5; Fouriersche Reihen und bestimmte Integrale, 2; Seminar. — Kœbe : Differential- und Integralrechnung, 5; Uebgn. dazu, 1; Potential und partielle Differentialgleichungen, 2. — Bruns : Instrumentenkunde, 3; Fehlertheorie und Ausgleichungsrechnung, 2; Praktische Analysis, 2; Uebgn. auf der Sternwarte. — König : Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, 2. — Fischer : Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, 3. — Marx : Vektoranalysis und ihre Anwendung in der Physik, 1.

Marburg; *Universität*. — Hensel : Integralrechnung, 4; Algebra, 4; Seminar. — Neumann : Analyt. Theorie der Differentialgleichungen, 4; Proseminar; Seminar. — v. Dalwigk : Analyt. Mechanik II, 2; Höhere Kapitel aus der Th. der analyt. Funktionen, 2; Perspektive und Photogrammetrie, 2; Uebgn, dazu, 3. — Hellinger : Analyt. Geometrie des Raumes, insbes. Theorie der Oberflächen 2. Grades, 4; Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der Funktionen reeller Veränderlicher, 1; Uebgn. für niedere Semester. — Wegener : Allgemeine Astronomie, 1.

München; *Universität.* — Lindemann : Differentialrechnung, 5; Th. der Abelschen Funktionen, 4; Mathem. Grundlagen des Versicherungswesens, 2; Seminar. — Voss : Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Mechanik I, 4; Seminar. — Pringsheim : Elemente der Zahlentheorie, 4; Ueber einige neuere Methoden und Ergebnisse der Funktionenlehre, 4. — Brum : Elemente der höheren Mathematik und Grundzüge der darstellenden Geometrie einschliesslich Uebungen, 4. — Dœhlemann : Darst. Geometrie I, 5; Uebgn dazu, 3; Synth. Geometrie, 5; Uebgn. dazu, 1. — Hartogs : Elementare Geometrie der Ebene und des Raumes, 4; Ergänzungen zur algebr. Analysis, 1. — v. Seeliger : Grundfragen der Astronomie, 4; Astron. Kolloquium. — Grossmann : Mathematische Geographie, 2. — Sommerfeld : Maxwellsche Theorie, Grundlagen und einfachere Teile derselben, 4.

Strassburg; *Universität.* — Weber : Diff.- und Integralrechnung; Die part. Differentialgleichungen der mathem. Physik; Oberseminar. — Schur : Analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes; Ausgew. Kapitel aus der Flächentheorie; Seminar. — Simon : Ebene und sphär. Trigonometrie; Nichteuklidische Geometrie. — Wellstein : Anw. der Infinitesimalrechnung; Determinanten; Seminar. — Epstein : Fouriersche Reihen und verwandte Entwicklungen; Seminar. — Braun : Physikalisches Kolloquium. — Bauschinger : Bahnbestimmung der Planeten und Kometen; Uebgn. dazu; Astron. Beobachtungen. — v. Mises : Technische Mechanik I; Graph. und numerische Methoden in der Analysis; Seminar in angewandter Mathematik. — Wirtz : Kometen und Meteore.

Stuttgart; *Techn. Hochschule.* — Haller : Ebene und sphär. Trigonometrie, 2, und Uebgn., 2. — Stübler : Niedere Analysis, 4; Elemente der Diff.- und Integralrechnung, 4. — Faber : Höhere Mathematik II, 6, mit Uebgn., 2; Seminar. — Wölffing : Funktionentheorie I, 3. — Mehmke : Darst. Geometrie, 4; Vektorenrechnung, 4; Graph. Rechnen, 3; Seminar. — Kommerell : Grundlagen der Geometrie, 2. — Roth : Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, 4. — Kriemler : Technische Mechanik, 8. — v. Hammer : Ausarbeitung geodätischer Aufnahmen, 2; Praktische Geometrie (Vermessungskunde) I, 3; Kartenprojektionen für kartographische und geodätische Zwecke, 2; Grundzüge der höheren Geodäsie, 2; Barometrisches Höhenmessen, 1. — Heer : Geodätische Uebgn., 4.

Tübingen; *Universität.* — v. Brill : Einführung in die höhere Mathematik, 4; Th. der algebr. Kurven, 3; Seminar. — Maurer : Höhere Analysis II, 4; Höhere Algebra, 3; Seminar. — Perron : Niedere Analysis, 4; Darst. Geometrie, 3; Uebgn. dazu, 3; Seminar. — Happel : Graphische Statik, 1; Uebgn. dazu; Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Anwendungen auf die mathem. Statistik, 2. — Rosenberg : Bahnbestimmung von Planeten und Kometen, 2; Ausgew. Kapitel aus der Astrophysik, 1; Uebgn. im astronomischen Beobachten, 2.

Würzburg; *Universität.* — Rost : Analyt. Geometrie des Raumes, 4; Analyt. Geometrie der Ebene, 4; Sphär. Astronomie II, 2; Politische Arithmetik, 2; Proseminar; Seminar; Astron. Praktikum; Einführung in die höhere Mathematik (für das Versicherungsfach). — v. Weber : Differentialrechnung, 4, mit Uebgn., 2; Einführung in die Vektoranalysis, 2; Seminar. — Hilb : Algebr. Kurven, 4; Bestimmte Integrale, 4; Seminar. — Cantor : Elektrizität und Magnetismus, 4.

SUISSE

Basel; *Universität.* — Von der Mühll : Analyt. Mechanik, 4, mit Ueb., 2. — R. Fueter : Diff. u. Integralrechnung, I., 4 ; Flächentheorie, 4 ; Math. Prosem. : Ueb. zur Differentialrechnung, 1 ; Math. Sem. über Flächentheorie I. — Spiess : Algebra, 3 ; Einführung in d. Iterations- u. Operationskalkül, 1 ; Math. Sem., 1. — Flatt : Projektive Geometrie, 3 ; Pädagog. Sem., math.-naturw. Abt., I., 3.

Bern; *Universität.* — Graf : Kugelfunktionen m. Repetitor., 3 ; Besselsche Funktionen m. Repetitor., 3 ; Integralrechng. m. Repetitor., 3 ; Differentialgleichgen, 2 ; Funktionentheorie, 2 ; Renten- u. Versichergsrechng., 2 ; Mathemat. Semin. in Verbindg. m. Prof. Huber, 1 ½. — Ott : Algebr. Analysis, II, 2 ; Integralrechng., 2 ; Analyt. Geomet., II, 2 ; Sphär. Trigonometrie, 2. — G. Huber : Mechanik d. Himmels, 2 ; Fouriersche Reihen u. Integrale m. Anwend. a. d. Physik, 3 ; Th. d. Raumkurven u. abwickelbaren Flächen, 2 ; Mathemat. Sem. (geometr. Richtung) m. Graf, 1. — Mauderli : Geogr. Ortsbestimmung, 2 ; Ueb. dazu ; Einführ. i. d. wissenschaftl. Rechnen m. bes. Berücksicht. d. Bedürfnisse d. prakt. Astronomie, 2. — Benteli : Darst. Geometrie : Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2 ; Ueb. u. Repetitor., 2 ; Prakt. Geometrie, 1, 1. — Crelier : Synth. Geometrie, II, 2 ; Mehrdimensionale Geometrie, 2. — Moser : Versicherungslehre : Krankenversicherung. Mathemat.-versicherungswissensch. Seminar, 1-2. — Bohren : Politische Arithmetik, 2 ; Die Invalidenversicherung, 1-2.

Fribourg ; *Université.* — Plancherel : Calcul différentiel et intégral, I, 4 ; Equations différentielles, 2. — Daniëls : Einleitung in die math. Behandlung der Naturwissenschaften, 2 ; Höhere Algebra, 3 ; Funktionentheorie, I, 3 ; Analyt. Mechanik, 2.

Genève ; *Université.* — Cailler : Calcul différentiel et intégral, 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse, 2. — Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3 ; Conférences d'algèbre et de géométrie, 1 ; Exercices pratiques sur les éléments de mathématiques supérieures, 2 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire de géométrie supérieure : Géométrie infinitésimale, 2 ; Séminaire de mathem. élém., questions d'enseignement. — R. Gautier : Astronomie générale, 2. — R. de Saussure : Thermodynamique, 2 ; Optique géométrique, 1. — Mirimanoff : Introduction à la th. des ensembles, 1.

Lausanne; *Université.* — Amstein : Calc. différ. et intégr., I, 6 ; Exerc. de calc., I, 1 ; Calcul diff. et intégr.., III, 2 ; Exerc. de calc., III, 1 ; Théor. des fonct., 3. — Lacombe : Géométrie descript., 4 ; Géométrie anal., 2 ; Epures de géom. descript., 1 ap.-m. ; Géométrie de posit., 3. — Mayor : Mécan. rat., I, 4 ; Exerc. de mécan., III, 1 ; Phys. mathémath., 2 ; Statique graph., III, 3 ; Epures de statiq., III, 1 ap.-m. ; Stat. graph., V, 2 ; Epures de stat., V, 1 ap.-m. — Maillard : Cal. infinités. avec applicat., 3 ; Exerc. de calc., 1 ; Astron. sphér. : la Terre, le Soleil, 3. — Jaccottet : Chap choisis d'algèbre, 1.

Neuchâtel; *Université.* — Du Pasquier : Calcul infinitésimal, 3 ; Th. des équat. diff., 2 ; Géom. project., 2 ; Science actuarielle, 1, Calcul des probabilités, 2. — Gaberel : Th. des fonctions analyt., 2. — Le Grand Roy :

Astronomie sphér., 2; Géodésie, 1; Exerc. d'astronomie, 1. — Krebs : Exerc. de mathém., 2.

Zurich; *Universität.* — Zermelo : Diff. u. Integralrechg., 4; Diff.-gleichungen, 2; Ueb. f. Vorger, 2; Einf. in die Mengenlehre, 2. — Wolfer : Astronomie, 3; Ueb, dazu, 2; Bahnbestimmg. v. Planeten u. Kometen, 2. — Weiler : Darstell. Geomet., I., m. Ueb., 4; Analyt. Geom. m. Ueb., 4; Mathem. Geogr., 2. — E. Gubler : Algebr. Analysis, 2; Sph. Trigonometrie, 1; Math. Theorie der Pensionsversicherungen, 1.

Zurich; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 5; Repet., 1; Uebgn., 2; III, 3; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 5; Répét., 1; Exerc., 2; III, 3; Exerc., 1. — Geiser : Analyt. Geometrie, 4; Repet., 1; Uebgn., 2. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4; Repet., 1; Uebgn., 4; Geometrie der Lage, 4; Math. Ueb, 2. — Kollros : Géométrie descr., 4; Répét., 1; Exerc., 4; Géométrie de de position, 3; Mathem.-Uebgn., 2. — Meissner : Mechanik, II, 4; Repet. 1; Uebgn., 2. — Hurwitz : Zahlenth., 4. — Hurwitz u. Meissner : Mathem. Seminar. — Meissner : Mechanik, III, 4; Repet., 1; Uebg., 2; Schwingungsprobleme, 1; Elastizitätsth., 2. — Bæschlin : Vermessungs-kunde, II, 4; Repet., 1; Erdmessung, 2. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3; Uebgn., 2; Th. der Finsternisse, 2.

Cours libres. — Beyel : Rechenschieber. 1; Darst. Geometrie, 2; Proj. Geometrie, 1; Perspektive u. Axonometrie, 2. — Dumas : Equat. intégrales, 1. — Keller : Zentralprojektion, 2. — Kienast : Attraktionstheorie, 2. — Kraft : Analyt. Mechanik, 3; Vektoranalysis, 3; Geom. Kalkül, III.

BIBLIOGRAPHIE

J. Andrade. — **Le Mouvement,** *mesures de l'étendue et mesures du temps.* — 1 vol. in-8°, 328 p. cart. à l'angl. *(Bibliothèque Scientifique Internationale)* 6 fr.; Librairie Félix Alcan, Paris.

Dans ce livre, la philosophie et la science unies à la technique des mesures de précision du Temps et de l'Etendue rencontrent sur leur route commune une méthode toute nouvelle pour assurer demain aux écoles techniques et professionnelles l'assimilation d'une culture scientifique simple et solide fondée sur une éducation géométrique inductive. Ce livre arrive à son heure; l'heure où l'éducation technique commence à pénétrer, quoiqu'émise discrètement, dans l'enseignement supérieur. Ecrit par un savant qui, familier avec la philosophie de la géométrie et de la mécanique, s'est imposé une discipline nouvelle pour fonder l'enseignement horloger à l'Université de Besançon, cet ouvrage ajoute des résultats intéressants à ceux déjà contenus dans son livre *Chronométrie,* publié antérieurement.

Il fait connaître au grand public, sous une forme maniable, un résumé des annales chronométriques de Greenwich.

Pour la métrologie il résume les travaux de M. Charles Guillaume et, pour la géodésie, les exposés du colonel Bourgeois. Enfin, sur les absolus de la mécanique, l'auteur apporte au philosophe des aperçus tout nouveaux.

H. Bouasse. — **Cours de mathématiques générales** spécialement écrit pour les physiciens et les ingénieurs, conforme au programme du certificat de mathématiques générales, servant d'introduction aux Cours de Mécanique et de Physique du même auteur. — 1 vol. gr. in-8° de 646 p. Prix : 20 fr.; Ch. Delagrave, Paris, 1911.

L'infatigable travailleur qu'est M. Bouasse, après avoir écrit un Cours de Mécanique servant d'introduction à son grand Cours de Physique, nous donne maintenant un Cours de Mathématiques qui peut servir d'introduction à l'ensemble des œuvres précédentes. C'est à coup sûr un triomphe nouveau pour les idées expérimentales et intuitives, mais la nécessité d'arriver à peu près où l'auteur arrive est si impérieuse que bien des mathématiciens ont déjà fait des efforts plus ou moins fructueux pour se mettre au courant de la Physique et de ses exigences; il leur reste seulement le chagrin (je parle, par exemple, pour moi) de constater qu'ils ne connaîtront jamais la Physique aussi bien que M. Bouasse connaît les Mathématiques. Mon éminent collègue est donc un peu sévère, en bloc, envers les géomètres parmi lesquels beaucoup pensent comme lui. Mais l'intérêt qui s'attache à ce nouveau volume va certainement porter un coup des plus rudes à ce qui peut rester d'enseignement pratique par trop rigoriste.

M. Bouasse définit la continuité en traçant des lignes, présente la notion de fonction sous une couleur analogue et étudie les paraboles et hyperboles de degré quelconque pour illustrer ses définitions. Il y a là déjà des choses des plus intéressantes au sujet de la droite et même au sujet de la droite particulière passant par l'origine; celle-ci fournit l'illustration de la règle de trois; différents systèmes de droites nous initient aux partages proportionnels ainsi qu'aux règles des mélanges et alliages. Naturellement comme la pente d'une courbe a été introduite en même temps que la notion de courbe, nous pouvons nous servir de la notion de dérivée pour ne pas abandonner les polynômes sans parler des racines réelles des équations algébriques et de méthodes d'approximation qui permettent de les obtenir.

Les fonctions circulaires sont, pour M. Bouasse, toutes celles qui résultent des constructions géométriques attachées au cercle et telles qu'elles reprennent visiblement la même valeur quand un point situé sur le cercle parcourt entièrement celui-ci. C'est confondre la fonction périodique avec la fonction circulaire, mais cette confusion voulue n'est-elle pas naturelle chez un physicien qui sait que tous les phénomènes périodiques s'expriment en combinant les fonctions circulaires. D'ailleurs l'auteur se garde bien d'oublier les fonctions classiques élémentaires, trace leurs courbes et y joint immédiatement des combinaisons telles que les courbes de Lissajous. Enfin il termine ce chapitre par les équations transcendantes trigonométriques de même qu'il a terminé le précédent par les équations algébriques.

Et pendant que M. Bouasse tient le cercle et les fonctions circulaires, il en profite pour nous présenter la cycloïde, les épi et les hypocycloïdes et la développante circulaire. Il passe ensuite très sobrement aux sections coniques, mais avec l'intention de s'en servir dans d'élégants exemples. Dans l'étude des enveloppes, par exemple, il traite de la parabole de sûreté et des phénomènes de mirage. Et nous possédons bien assez de courbes maintenant pour les faire rouler ou glisser les unes sur les autres, c'est-à-dire pour faire de la Géométrie cinématique qui permettra de compléter toute l'introduction géométrique qui précède.

Un parti merveilleux est tiré à coup sûr du calcul intégral. Après les in-

tégrations élémentaires sont étudiés les planimètres et intégraphes divers; en passant, les intégrales elliptiques sont signalées d'une manière très simple; la fonction logarithmique a toutes ses propriétés déduites de celles de l'hyperbole équilatère. De là on passe facilement aux fonctions hyperboliques.

La théorie des quantités complexes est encore présentée d'une manière intuitive des plus remarquables; les procédés d'addition notamment sont étendus à la définition des séries à termes complexes. Quant à la notion de fonction analytique, elle conduit immédiatement aux transformations isogonales appliquées à de nombreux exemples.

Les séries en général ont leurs règles de convergence exposées à l'aide de schémas géométriques; je passe sur les séries trigonométriques car il est bien évident que nul ne sait mieux qu'un physicien comment on doit les manier en pratique, mais je signale, avec un vif intérêt, les séries asymptotiques qui semblent converger dans leurs premiers termes tout en étant, au fond, divergentes. On a beaucoup exagéré les difficultés inhérentes à l'étude de ces séries lorsqu'on a reconnu que celles de la Mécanique céleste étaient de cette nature et, à coup sûr, celles de la Mécanique céleste sont d'une étude difficile, mais M. Bouasse, avec les intégrales de Fresnel et la diffraction, nous montre précisément des questions fort simples qui y conduisent.

Dans les équations différentielles une grande importance est attachée au facteur intégrant qui conduit à l'entropie en Thermodynamique. L'intégration au moyen de séries a été également envisagée dans ses traits essentiels. Viennent ensuite les intégrales définies simples, doubles ou triples, puis les fonctions eulériennes.

Et, dans tout cela, nous ne sommes point sortis de l'espace à deux dimensions. En géométrie à trois dimensions, je signalerai surtout l'usage des transformations simples, notamment de la perspective, pour simplifier l'étude de nombreuses figures; l'usage de surfaces élémentaires, telles que le tore, pour obtenir, par section plane, des courbes qui, définies dans leur plan, seraient relativement compliquées; l'applicabilité des surfaces les unes sur les autres et le problème des cartes géographiques.

Les courbes gauches sont naturellement présentées avec les surfaces développables, ces dernières donnant lieu à la considération des surfaces d'égale pente, des remblais, des cônes d'éboulis. Avec les courbes tracées sur le cône nous retrouvons la loxodromie conique dont j'avais déjà signalé la curieuse génération physique en analysant ici même (1910, p. 73) le tome VI du Cours de Physique.

Avant d'aborder les surfaces réglées, M. Bouasse définit d'une manière générale les ensembles de droites, complexes et congruences: dans la courbure des surfaces il étudie élégamment les surfaces de révolution et, cherchant celles dont la courbure moyenne est constante, il trouve pour méridiens les trajectoires de foyers de coniques roulant sur une droite. Comme surface bien peu connue des géomètres, il faut signaler le cône sphérique obtenu en supprimant un fuseau dans une sphère élastique et en rapprochant les deux méridiens formant les bords de la lacune. Le nouveau méridien dépend très élégamment d'une intégrale elliptique de seconde espèce.

L'Ouvrage se termine par l'étude des flux et de la circulation des vecteurs puis par quelques généralités sur les équations aux dérivées partielles de la Physique. Le passage de l'intégrale triple d'une divergence à un flux superficiel fermé (formule de Green) et d'un flux superficiel ouvert à une

circulation (formule de Stokes) sont présentés avec la simplicité qui caractérise des identités.

Quant aux équations de la Physique, elles sont linéaires; comme dans toute son électroptique, M. Bouasse montre surtout l'importance et la simplicité des solutions exponentielles auxquelles correspondent les ondes planes.

Enfin un dernier chapitre est consacré aux exercices pratiques et aux manipulations. C'est dans celui-là que l'auteur plaisante légèrement les mathématiciens. Il est certain que l'invention de la Physique mathématique ne semble pas avoir rapproché beaucoup géomètres et physiciens. Mais tout n'est pas dit et une sorte de Mathématique physique est en train de se créer; M. Bouasse aura fait beaucoup pour cela. Je crois très sincèrement que ce volume est appelé à un grand succès; par-ci par-là quelques petites critiques de détail sont possibles mais, en de tels endroits, les corrections seraient aisées et, par suite, l'esprit du livre, l'effort qu'il représente vers l'utilité et la compréhensibilité sont choses destinées à demeurer solidement.

A. Buhl (Toulouse).

L. Crelier. — **Systèmes cinématiques.** — 1 vol. cart. in-8°, de la *Collection Scientia*, 100 p., 13 fig. et un portrait du colonel Mannheim; 2 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Ce nouveau volume de la *Collection Scientia* contient l'étude géométrique des formes simples qui sont à la base des mécanismes cinématiques. L'auteur s'est borné aux types les plus importants et les plus intéressants au point de vue géométrique; ce sont les suivants : Système conchoïdal. — Système du cappa. — Système strophoïdal simple. — Système conchoïdal circulaire. — Système à deux ornières fixes. — Système bielle-manivelle.

Chacun de ces systèmes est étudié, par la méthode de la Géométrie analytique, dans ses principaux problèmes concernant les enveloppes, les trajectoires, les développantes, etc.

M. Crelier a été bien inspiré en plaçant en tête de cette intéressante monographie le portrait du colonel Mannheim, dont les *Principes et développements de Géométrie cinématique* contiennent les fondements des recherches sur les systèmes cinématiques. Ce petit volume engagera plus d'un lecteur à lire le bel Ouvrage du savant géomètre français.

F. Enriques. — **Fragen der Elementargeometrie.** I Teil : *Die Grundlagen der Geometrie*. Deutsche Ausgabe von H. Thieme. — 1 vol. in-8, X-366 p. ; 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Sous le titre de *Questions de géométrie élémentaire*, M. Enriques a réuni une série d'articles, dûs à divers géomètres italiens, et étudiant d'une manière élémentaire les principales questions des fondements de la géométrie et des constructions géométriques. L'ouvrage est déjà bien connu par le second volume, consacré aux constructions et publié en 1907.

Le tome I, qui vient de paraître, est consacré aux questions très délicates des fondements de la géométrie. M. Enriques examine d'abord le côté philosophique des questions qui se rattachent aux fondements de la géométrie et fait ensuite d'intéressantes remarques quant à l'enseignement de la géométrie.

Puis viennent les chapitres suivants :

Les notions de droite et de plan par M. U. Amaldi (Modène).

Congruence et mouvement, par A. Guarducci (Prato).

Sur l'application des postulats de la continuité en géométrie élémentaire, par G. Vitali (Gênes).

Sur la théorie de l'équivalence (égalité), par U. Amaldi.

Les proportions, I d'après Euclide ; II nouveaux développements, par G. Vailati.

Sur la théorie des parallèles et sur la géométrie non-euclidienne, par R. Bonola : cette étude comprend :

I. Histoire des recherches sur les parallèles. La géométrie non-euclidienne ; *a)* directions métrique et différentielle ; *b)* direction projective.

II. Théorie générale des parallèles. Géométrie hyperbolique. Géométrie elliptique.

On voit par cette rapide énumération l'esprit dans lequel est conçu cet ouvrage qui s'adresse, comme on le voit, aux professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et aux étudiants en mathématiques. Au moment où l'on tend à créer ou à développer dans l'enseignement universitaire des cours et des séminaires spécialement consacrés aux questions de mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur, l'ouvrage de M. Enriques est appelé à rendre de grands services. H. F.

G. Herting. — **Von Strecke, Quadrat und Würfel zum bestimmten Integral** zum Gebrauche in den oberen Klassen unserer Mittelschulen und beim Selbstunterrichte. — 1 vol. in-8°; 2 M. 80; B.-G. Teubner, Leipzig.

L'auteur s'est préoccupé d'introduire la notion d'intégrale définie dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire. Il part pour cela de divers problèmes de géométrie élémentaire, mesure des longueurs, des surfaces et des volumes et il les traite par la méthodes des limites. Puis vient la notion d'intégrale comme limite de sommations, le calcul de quelques intégrales définies suivi d'applications nombreuses et bien choisies.

Le livre répond bien à son but et pourra être employé utilement. Il contient cependant quelques lacunes. La notion de limite devrait être mieux précisée; il est inutile de parler de grandeurs qui tendent vers une limite sans l'atteindre. En plusieurs endroits, l'auteur aurait pu, par un mot, par une phrase, par la substitution de lim Σ à Σ, obtenir plus de rigueur sans faire de tort à l'exposition. M. Plancherel (Genève).

Adolf Kneser. — **Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik**, Vorlesungen an der Universität zu Breslau. — 1 vol. 8°, 243 p. ; 6 M.; Vieweg und Sohn. Braunschweig.

Pour caractériser le plan du livre et le but de l'auteur, citons quelques lignes de la préface : « ... Les mathématiciens se sont dernièrement occupés de développer la théorie générale des équations intégrales, en particulier les analogies algébriques de cette théorie. Si intéressantes que puissent être ces recherches, il me semble pourtant que les applications qui ont servi de point de départ à la découverte de Fredholm ont été trop peu mises en lumière. En tout cas, il n'est pas facile au mathématicien non spécialiste et au physicien de pouvoir, à l'aide des publications existantes. pénétrer jusqu'aux applications particulières. qui sont pourtant, pour toute théorie durable, la pierre de touche de sa valeur. Je crois donc être utile à la science

en publiant cet ouvrage, qui part entièrement des applications, conduction de la chaleur, oscillations libres et forcées, théorie du potentiel. Chaque problème y est traité individuellement avec le minimum de théorie générale. Je puis montrer ainsi ce que la nouvelle théorie apporte d'inédit et en quoi elle est parallèle aux anciennes méthodes. Par une telle disposition, j'espère non seulement inciter les jeunes mathématiciens à un travail fructueux sur des problèmes concrets, mais encore déterminer les physiciens à essayer et appliquer cette nouvelle théorie. » Voici, d'autre part, la table des matières du livre :

1. Equations intégrales et conduction de la chaleur. 2. Equations intégrales et oscillations des systèmes linéaires de masses. 3. Equations intégrales et théorie de Sturm-Liouville. 4. Conduction de la chaleur et oscillations dans les domaines à deux et à trois dimensions. 5. Théorèmes d'existence et problème de Dirichlet. 6. Les séries de Fredholm.

Le livre de M. Kneser ne fait donc pas double emploi avec le *tract* de M. Bôcher sur le même sujet, récemment analysé dans cette Revue. On remarquera que la théorie de Fredholm passe à l'arrière-plan et que M. Kneser s'arrête sutout aux méthodes de Schmidt et de Hilbert. Un inconvénient du livre, inévitable par le fait même du plan, c'est que la théorie proprement dite des équations intégrales est un peu noyée dans le riche contenu d'applications que le livre renferme. Ajoutons encore que l'ouvrage n'exige pas de connaissances spéciales pour sa lecture. Il forme en particulier, pour le physicien, un utile complément à l'ouvrage de M. H. Weber : *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik*.

M. Plancherel (Genève).

G. Lazzeri und A. Bassani. — **Elemente der Geometrie** (Unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). — Aus dem Italienischen übersetzt von P. Treutlein. — 1 vol. in-8°, XVI-491 p.; 14 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet Ouvrage contient les éléments de Géométrie exposés d'après la méthode de la *fusion de la planimétrie et de la stéréométrie*. Nos lecteurs connaissent le principe de cette méthode qui a été défendue dans cette *Revue* par l'un des principaux fondateurs, Ch. Méray. La première édition de son traité remonte à 1874, tandis que le premier ouvrage italien, établi sur des bases différentes, a été publié par de Paolis en 1884.

Le présent Ouvrage se rattache dans ses grandes lignes à l'ordre tracé par de Paolis. Les auteurs ont expérimenté leur méthode depuis plus de vingt ans à l'Académie Militaire de Livourne. Ils ont publié une première édition en 1891 ; cette traduction a été faite principalement d'après la deuxième édition ; elle a été rédigée avec beaucoup de soin par un géomètre allemand qui a une grande expérience de l'enseignement, M. le professeur Treutlein (Carlsruhe).

Indiquons brièvement le contenu du volume. Les matières sont réparties sur cinq livres :

I. — Les figures géométriques. Droite et plan. Segment de droite, angle, dièdre. — Notions fondamentales concernant la circonférence et la sphère. Parallélisme de droites et de plans. — Perpendicularité de droites et de plans. — Lieux géométriques.

II. — Polygones, angles polyèdres ; cas d'égalité. — Polyèdres. — Lieux géométriques.

III. — Propriétés concernant les droites, les plans et les sphères. — Polygones inscrits dans une circonférence ; polyèdres inscrits dans une sphère. — Inversion. — Corps de révolution ; cônes et cylindres.

IV. — Equivalence des figures.

V. — Proportionnalité. — Similitude. Applications.

L'Ouvrage contient 336 figures d'une exécution irréprochable et se termine par une collection de plus de mille exercices : théorèmes à démontrer ; les lieux géométriques et problèmes.

R. de Montessus et R. d'Adhémar. — **Calcul numérique.** *(Opérations arithmétiques et algébriques, Intégration).* — 1 vol. gr. in.18, 250 p. ; 5 fr. ; O. Doin & fils, Paris.

Ce nouveau volume de la collection de l'*Encyclopédie scientifique* traite du *Calcul numérique*, tandis que dans un autre volume, que nous avons annoncé en mai, on étudie plus spécialement le *Calcul mécanique*. L'Ouvrage est divisé en deux parties :

La *première partie* traite des opérations arithmétiques, abrégées et surtout du calcul pratique des racines des équations tant algébriques que transcendantes Tous les procédés de calcul des racines sont exposés et des applications numériques nombreuses illustrent les méthodes. Les principes du calcul des différences terminent cette partie.

Dans la *seconde partie*, l'on trouvera une théorie des *Intégrales* et des *Equations différentielles* et aux *Dérivées partielles*, avec applications numériques et des applications de la méthode des *approximations successives* aux *fonctions implicites* et aux *équations*.

Niels Nielsen. — **Théorie des fonctions métasphériques** professée à l'Université de Copenhague. — 1 vol. in-4° de VII-212 p. Prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1911.

Ce beau volume présente sous le nom de fonctions métasphériques, sinon des fonctions absolument nouvelles, du moins des fonctions qui permettent de présenter sous un jour nouveau les fonctions hypergéométriques. On connaît les recherches et les volumes déjà publiés par M. Nielsen sur les fonctions cylindriques et sphériques. Or on peut conclure de là, sans aller d'abord jusqu'à la généralité de la série hypergéométrique, les fonctions qu'étudie l'auteur, lesquelles, combinées avec les fonctions eulériennes, permettent d'obtenir finalement tout ce que la série hypergéométrique a donné de pratique. Ce nouveau point de vue paraît fécond en résultats élégants.

Ainsi les nouveaux développements obtenus convergent dans des régions du champ complexe limitées par des courbes simples dont les premières furent entrevues par Charles Neumann et étaient des ellipses à foyers fixes.

L'intérêt du volume saute facilement aux yeux car on y trouve un grand nombre de résultats définitifs représentés par de nouveaux développements, des généralisations d'intégrales classiques, de formules dues à Gauss et à Dirichlet. Quand les fonctions étudiées sont considérées comme fonctions de deux variables, à savoir la variable ordinaire x et un paramètre α qui figure dans les coefficients de l'équation différentielle qui les définit, elles satisfont à une équation aux dérivées partielles en x et en α, d'où des considérations analogues à celles de la théorie des fonctions modulaires.

Enfin le volume se suffit à lui-même ; l'auteur y a placé quelques chapitres

d'introduction où il reprend notamment, avec une concision remarquable, la théorie des fonctions eulériennes. Il ne me semble pas exagéré de dire qu'on pourrait recommander son étude même à qui ignorerait la série hypergéométrique ; M. Nielsen conduirait sans doute le lecteur vers cette fonction, ses cas particuliers et ses applications avec un effort relativement faible. A. Buhl (Toulouse).

Andreas Voigt. — **Theorie der Zahlenreihen und der Reihengleichungen.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-136 p.; 4 M.: G.-J. Göschen, Leipzig.

Ce volume offre un très intéressant essai de synthèse. L'auteur remarque avec raison qu'en mathématiques on considère beaucoup plus fréquemment que les nombres isolés, des ensembles de nombres satisfaisant tous à une même définition, ayant tous une même propriété. C'est d'ailleurs là l'idée fondamentale de la théorie des ensembles. Les ensembles arithmétiques ici considérés sont, en premier lieu, ceux qui résultent d'une suite d'entiers

$$\overset{0}{v}_0, \overset{0}{v}_1, \overset{0}{v}_2, \ldots, \overset{0}{v}_s$$

puis d'une seconde suite

$$\overset{1}{v}_0, \overset{1}{v}_1, \overset{1}{v}_2, \ldots, \overset{1}{v}_s,$$

où $\overset{1}{v}_r = \overset{0}{v}_0 + \overset{0}{v}_1 + \ldots + \overset{0}{v}_r$, à laquelle on peut adjoindre une troisième suite par une définition analogue pour continuer ainsi indéfiniment. Une telle définition fait penser au triangle de Pascal et il s'agit bien, en effet, de quelque chose d'analogue mais de plus général. D'ailleurs les propriétés du binôme, ainsi que celles des coefficients de séries plus générales, sont retrouvées ensuite comme cas particulier des propriétés des tableaux à deux dimensions définies en premier lieu.

Après cette première partie nous rencontrons un problème plus profond et qu'on peut faire saisir au moyen d'une comparaison simple. La suite des nombres entiers étant définie, nous y intercalons des nombres fractionnaires fort distincts des premiers mais qu'on doit cependant relier avec eux. Or dans les séries de nombres construites dans la première partie de l'ouvrage, ne peut-on introduire d'autres nombres qui, en vertu de certaines conventions, pourront jouir de certaines propriétés des nombres primitifs ?

Je ne suis pas absolument sûr que de telles préoccupations soient toujours aussi originales que l'auteur paraît le croire, mais la contribution qu'il apporte à de telles idées justifie amplement la publication de cette œuvre aux notations élégantes, où bien des problèmes épars sont rassemblés d'une manière systématique. A. Buhl (Toulouse).

J.-W. Young. — **Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry.** Prepared for publication with the cooperation of W.-W. Denton. With a Note on the growth of algebraic symbolism by U.-G. Mitchell. — 1 vol. in-8°, 247 p.; 1 s. 6 d.; Mac Millan & C°, New-York.

L'auteur a réuni dans ce volume 21 conférences qu'il a faites à l'Université de l'Illinois pendant l'été 1909. Ces études, présentées d'une manière très claire, seront lues avec intérêt par tous ceux qui se préoccupent de la question des principes fondamentaux de l'algèbre et de la géométrie. Elles

sont données sous une forme élémentaire en ce sens qu'elles ne supposent chez le lecteur que des connaissances mathématiques relativement restreintes.

Par science mathématique M. Young entend : « Toute série de théorèmes tels que chacun des termes de la série, à partir d'un certain rang, soit une conséquence logique formelle d'un ou plusieurs des théorèmes qui le précèdent. » Cela nécessite à la base l'adoption d'un certain nombre de termes non définis et de quelques théorèmes non démontrés (axiomes ou postulats). La conception des géométries non-euclidiennes en découle tout naturellement, et à ce sujet M. Young reprend et développe la représentation d'un monde non-euclidien de M. Poincaré. Il en arrive ainsi à démontrer que la connaissance intuitive n'est pas suffisante pour caractériser avec précision le sens à attacher aux propriétés liées aux conceptions abstraites fondamentales de la géométrie et plus spécialement au postulat des parallèles d'Euclide. L'historique de ce postulat établit qu'il ne semble pas avoir satisfait Euclide lui-même au même titre que ses autres postulats.

Ce n'est cependant qu'au XVIIIe siècle que la question a été sérieusement reprise avec Saccheri, puis Gauss et surtout Lobatschewski et Bolyai. Selon M. Young, le choix des théorèmes pouvant être considérés comme des axiomes n'a rien de définitif; il passe en revue les définitions de quelques philosophes tels que Kant et Mill. Ensuite, partant de deux termes non définis et de l'expression de sept principes, il en déduit d'une manière logique de nouveaux principes et démontre qu'ils satisfont aux conditions nécessaires de conséquence, indépendance et catégorisme, dont il a donné la définition ; il conclut que « aucun terme ne doit être explicitement défini s'il ne peut l'être en termes représentant des idées notablement plus simples que le terme à définir. »

Cette première partie met en lumière le fait que la signification généralement attachée à des principes fondamentaux tels que la distance et la droite manque de précision, et que les axiomes et postulats de la géométrie ne peuvent être acceptés comme des vérités évidentes par elles-mêmes. Suit une discussion serrée des divers principes fondamentaux des mathématiques en commençant par celui de classe qui amène, sans nouvelle supposition, aux nombres cardinaux, puis aux classes finies et infinies. Les éléments d'une classe sont susceptibles, soit de certaines *relations*, soit de certaines *opérations* au moyen desquelles on peut les caractériser. A la catégorie des relations appartient entre autres l'*ordre*. Pour chaque nouvelle propriété l'auteur vérifie qu'elle satisfait aux conditions de conséquence, indépendance et catégorisme déjà établies. A la notion de classe considérée comme notion fondamentale par elle-même est adjointe la notion de classe dans ses rapports avec la relation d'ordre, puis avec la notion d'opération, ce qui amène à la notion de groupe qui est, après celle de classe et de correspondance, l'une des plus importantes parmi les principes fondamentaux des mathématiques.

Trois chapitres sont consacrés à l'étude historique et logique de la notion de nombre ; d'abord réel, positif, entier puis fractionnaire, irrationnel (à ce sujet l'auteur rappelle le postulat de Dedekind), enfin le nombre négatif et le nombre complexe.

Quoiqu'il soit fait mention de ces nombres à des périodes assez reculées, le nombre négatif, par exemple, se rencontre déjà dans l'ouvrage hindou de Bhaskara en 1150 av. J.-C., ce n'est guère qu'au commencement du XIXe siècle que la vraie nature de ces nombres a été reconnue et que leur théorie a été placée sur une base strictement logique. L'application de la notion de

nombre aux diverses opérations conduit l'auteur à l'interprétation géométrique, l'analyse vectorielle et les quaternions.

Dans son 13e chapitre, M. Young abandonne l'algèbre pour s'occuper plus spécialement des principes à la base de la géométrie en se limitant à ce qui concerne la déduction logique des théorèmes de géométrie euclidienne, sans appel à l'intuition. La différence et les rapports entre la géométrie projective et la géométrie métrique sont illustrés par le théorème de Desargues.

L'auteur estime que les groupes de principes fondamentaux répondant le mieux aux exigences de l'instruction élémentaire sont ceux de M. Hilbert et de M. Pieri.

M. Hilbert se base sur une *classe* d'éléments non définis, les points, et ce que l'on peut considérer comme des sous-classes de celle-ci, les droites et les plans. Il divise son groupe de principes en cinq sous-séries, l'alignement, la congruence, l'axiome des parallèles et la continuité.

M. Pieri a comme seuls termes non définis la notion de point et celle de déplacement rigide; il en déduit la définition de la droite, du plan, etc.

Les postulats sur lesquels M. Young base son étude de l'espace à quatre dimensions sont choisis de telle sorte que l'espace à trois dimensions de la géométrie ordinaire n'en est qu'un cas particulier.

Reprenant l'étude de la géométrie et de l'algèbre à la lumière des résultats obtenus, l'auteur conclut que, du point de vue abstrait formel où il se place, les principes constituant l'algèbre ordinaire et la géométrie métrique ordinaire coïncident absolument, l'une contient l'autre. Les notions de variable, de fonction, de limite se déduisent également de ces principes fondamentaux, ainsi que la notion d'infini.

Le volume se termine par une intéressante notice historique de M. U.-G. Mitchell sur le développement du symbolisme algébrique.

R. Masson (Genève).

L. Zoretti. — **Leçons sur le prolongement analytique** professées au Collège de France. — 1 vol. gr. in-8° de VI-116 p.; 3 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Ces leçons sur le prolongement analytique attachent une importance exclusive à la position du problème; elles en signalent les difficultés, étudient leur nature et ouvrent de vastes horizons aux chercheurs. La classification des fonctions analytiques, la possibilité de leur prolongement dépendant de l'ensemble de leurs singularités, l'auteur a commencé par rappeler les parties les plus essentielles de la théorie des ensembles. Son objet principal est d'attaquer l'étude des fonctions multiformes en suivant surtout MM. Poincaré et Painlevé. Au fond, c'est l'étude des équations différentielles qui a inspiré ces deux éminents géomètres. Le premier a construit ses fameuses fonctions fuchsiennes qui sont encore des fonctions présentant des propriétés exactes plus ou moins comparables à la périodicité, le second a entrepris l'étude d'équations différentielles sans se soucier de savoir d'avance si les intégrales présenteraient ou non une régularité quelconque et, cependant, ils se sont rejoints, en quelque sorte, ce qui semble prouver que, quelque compliqué que soit l'écheveau des singularités d'une fonction analytique, les tentatives de classification ne sont pas menacées d'un éternel échec.

M. Zoretti paraît essayer de réunir surtout les bases de toutes ces recherches; par instant on aimerait trouver plus de résultats acquis, mais

enfin il fait voir le but qu'il dit, lui-même, s'être proposé, celui d'amorcer les questions. A ce point de vue le livre sera loin de manquer d'utilité.

C'est une apologie de plus pour le système de Weierstrass ; les apologistes sont moins nombreux pour Cauchy et Riemann dont les méthodes ne permettent pas d'aller aussi loin sans calculs. Et les travaux que M. Zoretti expose et développe donnent un peu l'impression d'une analyse sans calculs. Je conseillerai volontiers une réaction contre cette tendance, mais ceci ne saurait être une critique ; calculés ou non, bien des résultats sont dus à M. Zoretti lui-même et, pour ceux-ci, il est le premier à demander des perfectionnements qu'il obtiendra sans doute ou que son livre suggérera à d'autres chercheurs. A. BUHL (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von Dr. H. SCHOTTEN. — B. G. Teubner, Leipzig.

Jahrgang 42. (1911). — N° 1. — H. E. TIMERDING : Für und wider die Dreieckskonstruktionen. — FRANZ REDL : Einfacher Beweis des Gaussschen Satzes vom ebenen Vierseit. Eine neue Winkelhalbierung.

N° 2. — K. WOLLETZ : Über Systeme von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt. — KARL BRÜCHER : Anschauung in der Arithmetik. — J. THIEDE : Über eine propädeutische Behandlung der Begriffe der Funktion und des Differentialquotienten in der Gymnasialprima. — W. LIETZMANN : Max Schuster †.

N° 3. — B. G. Teubner, 1811-1911. Festschrift von FELIX MÜLLER : Der mathematische Sternenhimmel des Jahres 1811. Rückblicke auf die Mathematik vor hundert Jahren. — ECKHARDT : Die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise. — J. HEINRICHS : Aufgabe : Dreiecke mit ganzzahligen Seiten anzugeben, so dass $a = n\beta + \gamma$ wird. — J. E. BÖTTCHER : Leicht lesbarer Dauerkalender. — A. WITTING : Einige Beweise elementarer planimetrischer Sätze.

N° 4. — B. HOFFMANN : Die mathematische Erd- und Himmelskunde in Prima. — A. SCHÜLKE : Integralrechnung im Unterricht. — P. ZÜHLKE : Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie. — H. PFAFF : Über Fokalkurven. — Dr. FRIEDRICH VON MÜLLER : Welche Mittelschulvorbildung ist für das Studium der Medizin wünschenswert ?

N° 5. — KARL HEINRICH MÜLLER : Traugott Müller und sein Einfluss auf die Methode des mathematischen Unterrichts in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. — E. ECKHARDT : Neue formen für den ersten sphärischen Kosinussatz und ihre Benutzung zur Ableitung aller Formeln der sphärischen Trigonometrie. — Dr. DIESING : Zur Dreiteilung des Winkels. — Dr. DIESING : Elementare Konstruktion der Parabel aus 4 Punkten $A_1 A_2 A_3 A_4$ — KARL LADEMANN : Figuren von konstanter Breite. — JOSEF SCHLESINGER : Beitrag zur Lehre von der Proportionalität der Linien. Ein Beispiel von Grenzbetrachtung.

N° 6. — H. Schotten : Friedrich Pietzker (mit einem Bildnis Fr. Pietzkers). — R. Fischer : Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, in denen die Quadratwurzeln aufgehen. — Stillcke : Matematische « Extratouren ». — Dr. W. Lietzmann : Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1910. — Literarische Berichte. — Sprechsaal. — Versammlungen.

Nos 7 et 8. — C. Hoffmann : Die Begleitkurve der Zissoide. — P. Johannesson : Eine Bemerkung über physikalisches Rechnen. — H. Wieleitner : Zur Methodik des Satzes von der Potenz am Kreise und der Aehnlichkeitslehre.

American Journal of Mathematics, edited by Fr. Morley, Baltimore.

Vol. XXXIII, nos 1 et 2. — J. Eiesland : On a class of cubic surfaces with curves of the same species. — A.-H. Wilson : The automorphic transformations of the binary quartic. — N.-J. Lennes : Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. — F.-R. Moulton and W.-D. Macmillan : On the solutions of certain types of linear differential equations with periodic coefficients. — Ch.-H. Sisam : On Three-Spreads Satisfyng Four or More Homogeneous Linear Partial Differential Equations of the Second Order. — C.-L.-E. Moore : Some properties of Lines in Space of Four Dimensions and their Interpretation in the Geometry of the Circle in Space of Three Dimensions. — G.-F. Gundelfinger : On the Geometry of Line Elements in the Plane with Reference to Osculating Circles. — L.-E. Dickson : Binari Modular Groups and their Invariants. — Ed. Kasner : The Group of Turns and Slides and the Geometry of Turbines.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. — 3me série. Tome I. Gauthier-Villars, Paris.

Fasc. 2, 3 et 4. — E. Goursat : Sur un procédé alterné. — W. Stekloff : Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. — D. Hilbert : Théorie des Corps de nombres algébriques, traduit par A. Lévy. — H. Dulac : Sur les points singuliers d'une équation différentielle. — P. Caubet : Etude des principales inégalités du mouvement de la lune qui dépendent de l'inclinaison

2. Livres nouveaux :

Ch. Bioche. — **Enseignement secondaire.** (Rapports de la sous-commission française, vol. II). — 1 vol. in-8, 157 p. ; 4 fr. ; Hachette et Cie, Paris.

Dr K. Brandenberger. — **Der mathematische Unterricht an den Schweizerischen Gymnasien und Realschulen.** — 1 fasc. in-8, 163 p. ; 3 fr. 50 ; Georg & Cie, Genève.

C. Cailler. — **Sur la notion de courbure et sur quelques points de géométrie infinitésimale non-euclidienne.** — 1. fasc. in-4, 60 p. ; 5 fr. ; (Extrait des *Mém. de la Soc. de Phys. de Genève*). Georg & Cie, Genève ; G. Fischbacher, Paris.

Robert Geigel. — **Die Wärme.** (*Bücher der Naturwissenschaft* herausgegeben von Prof. Dr S. Günther). — 1 vol. in-16, 191 p. ; 1 Mk. ; Philipp Reclam, Leipzig.

M. Grossmann. — **Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule.** — 1 fasc. 52 p. ; 2 fr. ; Georg & Cie, Genève.

Alf. Guldberg et G. Wallenberg. — **Theorie der linearen Differenzengleichungen.** — 1 vol. in-8, 288 p. ; 11 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

F.-W. Lanchester. — **Aerodynamik, Ein Gesamtwerk über das Fliegen.** Deutsche Ausgabe von C. u. A. Runge. Band II : Aerodonetik — 1 vol. in-8, 327 p. ; 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Gerhard Kowalewski. — **Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen.** — 1 vol in-8, 453 p. ; prix 13 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Wilhelm Lorey. — **Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker** an den höheren Schulen in Preussen und einigen Norddeutschen Staaten. — 1 fasc. in-8, 118 p. ; 3,20 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Mandart. — **Leçons de Géométrie analytique à deux dimensions** à l'usage de l'enseignement moyen. — 1 vol. in-8, 333 p., Wesmæl-Charlier, Namur.

Jean Renard. — **La Pédagogie à l'Université.** Formation des professeurs d'athénée et spécialement des professeurs de mathématiques. — 1 vol. in-8, 102 p. ; H. Dessain, Liège.

J.-A. Serret et G. Scheffers. — **Lehrbuch der Differential und Integral Rechnung.** Band II, 4te u. 5te Auflage. — 1 vol. in-8, 638 p. ; 13 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Paul Zühlke. — **Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie** an den Deutschen Realanstalten. — 1. fasc. in-8, 92 p. ; 2,60 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission. — 1 fasc. in-8, 88 p. ; 50 Pf. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Congrès international de l'Enseignement Technique supérieur, Bruxelles, septembre 1910. *Compte rendu.* — 1 vol. in-8, 217 p. ; G. Botny, édit., Ixelles-Bruxelles.

(Idem) W. v. Dyck. — **Enseignement des Sciences mathématiques, naturelles et techniques dans les écoles supérieures.** (Congrès international de l'Enseignement Technique supérieur. — 1 fasc. in-8, 67 p. ; G. Bothy, édit., Ixelles-Bruxelles.

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome II, vol. 2, fasc. 1 : *Analyse algébrique ;* exposé d'après l'article allemand de A. Pringsheim, Munich, et G. Faber, Stuttgard, par J. Molk, Nancy. — *Fonctions analytiques ;* d'après l'article allemand de W.-F. Osgood, Cambridge U. S. A., par P. Boutroux, Poitiers, et Jean Chazy, Grenoble. — Tome III, vol. 3, fasc. 1 : *Coniques ;* exposé d'après l'article allemand de F. Dingeldey, Darmstadt, par E. Fabry, Montpellier. — 2 fasc. ; Gauthier-Villars, Paris.

International Catalogue of Scientific Litterature, ninth annual Issue. *A. Mathematics.* — 1 vol. in-8, 228 p. ; prix 15 Sh. ; Harrisson a. Sons, Londres, Gauthier-Villars, Paris.

The Teaching of Mathematics in the United Kingdom, prepared for the intern. Commission of the Teaching of Mathematics. (v. p. 396 de cette Revue). — 8 fasc. in-8, Wyman a. Sons, Londres.

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

COMPTE RENDU

DU

CONGRÈS DE MILAN

18-21 septembre 1911

publié par

H. FEHR

Secrétaire-général de la Commission.

SOMMAIRE :

Comité central :

Président : M. F. Klein, G. R. R., professeur à l'Université de Gœttingue ;
Vice-président : Sir G. Greenhill, Londres ;
Secrétaire-général : M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève.

Comité local de Milan :

Président : M. Ant. Sayno, vice-directeur de l'Ecole polytechnique de Milan, et MM. les professeurs G. Colombo, sénateur, directeur de l'Ecole polytechnique :
G. Celoria, sénateur, directeur de l'Observatoire de Brera, à Milan ;
P. Piazza, professeur à l'Université Bocconi et à l'Institut technique de Milan ;
Ing. M. Baroni, professeur à l'Ecole polytechnique ;
G. Fasella, professeur à l'Ecole normale de jeunes filles G. Aguesi de Milan.
Secrétaire : M. Giacomo Loria, ingénieur.

Membres de la Commission internationale.

Délégués des pays participants :

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Carlsruhe), P. Treutlein (Carlsruhe).

Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch (Vienne).

Belgique : M. J. Neuberg (Liège).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).

Espagne : M. Z. G. de Galdeano (Saragosse).

Etats-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J. W. A. Young (Chicago).

France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant et C. Bourlet (Paris).

Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).

Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).

Hongrie : MM. M. Beke, C. Radoz, Ratz (Budapest).

Iles Britanniques : Sir Georges Greenhill (Londres), Prof. W. Hobson (Cambridge), Mr. C. Godfrey (Osborne).

Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Palerme).

Japon : M. R. Fujisawa (Tokio).

Norvège : M. Alfsen (Christiania).

Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).

Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).

Russie : MM. N. v. Sonin, Cojalovic, K. W. Vogt (St-Pétersbourg).

Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).

Suisse : MM. Fehr (Genève), C. F. Geiser (Zurich), J. H. Graf (Berne).

Délégués des Pays associés :

Australie : M. Carslaw (Sydney) ; suppléant en Europe : Prof. Bragg, Leeds.

Canada : M. Bovey, recteur au Collège impérial technique de Londres.

Colonie du Cap : M. Hough, de l'Observatoire royal de Capetown.

Mexique : M. Valentin Gama, professeur à l'Ecole nationale des ingénieurs, Tacuyaba.

I. — COMPTE RENDU SOMMAIRE

Le 1er Congrès international de l'Enseignement mathématique s'est tenu à *Milan* à l'Ecole polytechnique, sous la présidence de M. F. Klein (Gœttingue), du 18 au 21 septembre 1911. On sait que dans la réunion partielle qu'elle a organisée à *Bruxelles,* en août 1910, la Commission a décidé que la première réunion plénière aurait lieu à Milan.

Cette première réunion, qui devint en réalité un véritable Congrès, a rapproché dans un travail commun les délégués de la plupart des pays européens. Elle a montré tout l'intérêt qu'il y a à discuter dans une assemblée internationale des questions touchant à l'organisation et aux méthodes de l'enseignement mathématique. Contrairement à ce qui s'est fait jusqu'ici dans les Congrès des mathématiciens, les séances ont été uniquement consacrées à la discussion des rapports préparés par des Sous-commissions spéciales. Nous aurons à revenir, personnellement, dans l'*Enseignement mathématique,* sur l'organisation de nos Congrès, mais nous tenons à faire constater dès maintenant la réussite complète des séances organisées à Milan sur ces bases nouvelles.

Lundi 18 septembre. — Le Comité central a tenu une première séance, le matin à 9 h., dans laquelle il a discuté principalement les différentes questions figurant à l'ordre du jour du Congrès. Dans l'aprés-midi il a tenu une séance en commun avec les Sous-commissions A et B. La Sous-commission A avait pour mission de préparer la discussion concernant les mathématiques dans l'enseignement moyen et portant sur les deux points suivants :

1. Dans quelle mesure peut-on tenir compte dans les écoles moyennes de l'exposé systématique des mathématiques ?

2. La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.

Après une discussion à laquelle ont pris part à tour de rôle les délégués des principaux pays, il a été décidé que M. Castelnuovo rapporterait le lendemain sur la première question et M. Bioche sur la seconde.

Il a été procédé d'une manière analogue pour la question B concernant l'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles. M. Timerding a été désigné comme rapporteur.

Réception à la Cova. — Le soir à 9 heures, les congressistes ont été reçus dans l'un des salons du Café-Restaurant Cova, par le Comité local de Milan. Son président, M. le Professeur Sayno, a adressé de cordiales paroles de bienvenue aux congressistes. M. le Professeur Klein a répondu au nom des invités.

Mardi 19 septembre. — 9 h. du matin, *première séance* des délégués et des membres des Sous-commissions nationales. Avant d'entrer en séance, les congressistes ont d'abord déposé une couronne au monument Brioschi. Cette première séance a été entièrement consacrée aux rapports sur l'état des travaux dans les 19 pays participants. Les délégués ont exprimé le vœu que le Comité central prît des mesures pour faciliter la diffusion des publications concernant la Commission en créant un dépôt central de vente[1].

La *deuxième séance,* qui a eu lieu à 4 heures, avait pour objet l'exposé et la discussion des deux rapports de la Sous-commission A. Elle a été suivie d'une courte séance des délégués, dans laquelle ils ont examiné la participation de la Commission aux travaux du Congrès de Cambridge.

Réception au Palazzo Marino. — Le soir à 9 heures, une brillante réception a été offerte aux congressistes par la Municipalité de Milan, au Palazzo Marino. Dans une charmante allocution M. E. Greppi, Maire de Milan, a dit combien les Milanais étaient heureux de posséder pour quelques jours des mathématiciens venus des pays les plus divers, puis M. le Prof. Klein a exprimé les remerciements des congressistes en rappelant les attaches précieuses qui lient les mathématiciens à la ville de Milan depuis Léonard de Vinci jusqu'aux mathématiciens modernes, au nombre desquels il signale tout particulièrement Cremona et Brioschi.

Mercredi 20 septembre. — 9 heures du matin, *troisième séance* des délégués et des membres des Sous-commissions nationales. Elle avait pour objet l'examen de la question de l'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques, naturelles, etc. M. Timerding a rapporté au nom de la Sous-commission B ; son exposé a été suivi d'une discussion.

Dans une seconde partie de la séance, la Commission a discuté la participation au Congrès de Cambridge; elle estime qu'il y a lieu de proposer le renouvellement de son mandat jusqu'au Congrès suivant, afin que les travaux puissent être complétés et que des questions d'importance fondamentale puissent encore être mises en discussion dans des conférences de la Commission.

Séance générale publique. — A 4 heures les congressistes, auxquels s'était joint un public nombreux appartenant aux sociétés

---

[1] La librairie Georg & C[ie], Corraterie, 10, Genève, l'un des éditeurs de l'*Ens. math.*, a été chargée de ce dépôt.

scientifiques et au corps enseignant de la Province de Milan, s'étaient rendus dans la grande salle de l'Aula de l'Ecole polytechnique pour la séance générale. On verra plus loin le compte rendu complet de cette belle séance par laquelle se terminait la partie officielle du Congrès. Nous nous bornons à mentionner ici le discours de M. le Sénateur COLOMBO, Directeur de l'Ecole polytechnique de Milan, sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs, et la conférence de M. le Prof. F. ENRIQUES, sur les mathématiques et la théorie de la connaissance.

Jeudi 21 septembre. — Le lendemain, les congressistes ont fait une excursion au Lac Majeur et au Motterone, organisée par le Comité local. Nous y reviendrons également à la fin de ce compte rendu.

Telle a été, très brièvement retracée, la marche de la première Réunion de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique. Les questions mises à l'ordre du jour ont donné lieu à d'intéressants rapprochements et à d'utiles comparaisons entre l'organisation des études dans les divers pays. Leur discussion n'a été qu'un *premier* débat, qu'une simple introduction, en quelque sorte. Les problèmes soulevés mériteraient d'être repris et approfondis dans des rapports spéciaux, suivant les bases indiquées dans les circulaires adressées aux membres des sous-commissions et dont on trouvera le texte dans les *Travaux préparatoires*. La discussion ne devait d'ailleurs aboutir à aucune résolution, car, comme on l'a rappelé à plusieurs reprises, à Bruxelles et à Milan, la Commission ne se propose pas d'uniformiser l'enseignement dans les divers pays, ou d'imposer des plans d'études — cela ne serait pas en son pouvoir. Elle cherche à contribuer aux progrès de l'enseignement mathématique, partout où celui-ci se donne, par l'apport de documents qui présentent, sous une forme objective, un tableau de l'état actuel de l'enseignement et de ses tendances modernes.

Nous ne saurions terminer cette introduction sans réitérer à cette place nos vifs remerciements à tous ceux — et ils sont nombreux — qui ont collaboré à la réussite de ce Congrès. Nous nous bornerons à nommer ici M. le Prof. A. SAYNO, vice-directeur de l'Ecole polytechnique de Milan, président du Comité local, et M. Giacomo LORIA, ing., secrétaire, grâce à l'activité duquel l'organisation matérielle de la Réunion et de l'excursion a été prévue jusque dans les moindres détails.

PUBLICATIONS OFFERTES AUX CONGRESSISTES.

Les membres du Congrès ont reçu, à titre d'hommage du Comité local, les volumes ou fascicules suivants :

Quarantasei anni di vita del R. Istituto Tecnico superiore di Milano, 1863-1909. Monografia del Vicedirettore Prof. Antonio Sayno.

Il Giubileo del Politecnico Milanese celebratosi il 24 Marzo 1889. Ricordo publicato per cura di alcuni ex-allievi.

Onoranze al Senatore Giuseppe Colombo, *direttore del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano, nel 50° anno d'insegnamento. Milano, 1907.*

Inaugurazione del Monumento a Francesco Brioschi, *nel Regio Istituto Tecnico superiore di Milano. XIII dicembre MDCCCC. Milano, 1901. Adesioni e rappresentanze, discorsi, elenco dei Sottoscrittori.*

R. Istituto Tecnico Superiore di Milano. Programma, anno 1910-1911.

De son côté, la Municipalité a fait remettre aux Congressistes un exemplaire du bel Album illustré *Milan en 1906*, un volume de 278 pages avec 200 illustrations dans le texte (édition non mise en librairie).

II. — TRAVAUX PRÉPARATOIRES

Le programme détaillé du Congrès a été arrêté par le Comité central dans une réunion qu'il a tenue à Carlsruhe en février 1911. Afin de concentrer les débats sur les points les plus importants, il a été décidé que deux sous-commissions spéciales seront chargées de présenter à Milan des rapports préparatoires très brefs qui serviront de base à la discussion.

Les sous-commissions ont été constituées définitivement comme suit :

A *(enseignement moyen)*. — MM. Beke (Budapest), Bioche (Paris), Klein (Gœttingue), Lietzmann (Barmen), Scorza (Palerme) et Young (Chicago).

B *(enseignement supérieur)*. — MM. Bourlet (Paris), Fehr (Genève), Klein (Gœttingue), Somigliana (Turin), Timerding (Braunschweig), Wirtinger (Vienne).

Une fois les adhésions reçues et les sous-commissions définitivement constituées, le secrétaire-général a adressé à leurs membres les lettres ci-après, qui ont ensuite été développées dans les lettres de M. Lietzmann pour la sous-commission A, et de M. Timerding pour la sous-commission B.

En voici le texte :

Sous-commission A.

1. — *Lettre du secrétaire-général aux membres de la Sous-commission A.*

Genève, le 30 juin 1911.

Messieurs et très honorés Collègues,

Nous avons l'honneur de vous informer que la Sous-commission A est composée de MM. Beke, Bioche, Lietzmann, Scorza, Young et de M. Klein, président de la Commission, qui présidera également la Sous-commission.

Comme vous le savez, celle-ci est chargée de préparer la discussion de la question A mise à l'ordre du jour de la réunion de Milan. Nous avons estimé utile de choisir dans le « *Rapport préliminaire* » un certain nombre de points touchant à l'enseignement dans les écoles moyennes. Ces questions appartiennent à la deuxième partie, chap. IV : les méthodes d'enseignement.

I. — Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes de l'exposé systématique des mathématiques ?

a) En géométrie ; emploi des axiomes ;

b) en arithmétique et en algèbre ;

c) dans la suite du programme de l'enseignement mathématique.

d) Dans quelle mesure les idées modernes ont-elles pénétré dans l'enseignement ?

II. — La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen (voir le *Rapport préliminaire*, p. 14) :

a) Algèbre et géométrie.

b) Planimétrie et stéréométrie.

c) Planimétrie et trigonométrie.

d) Stéréométrie et géométrie descriptive,

e) Géométrie synthétique et géométrie analytique des sections coniques.

f) Calcul différentiel et calcul intégral.

Nous vous prions de donner votre avis sur ces différentes questions ou tout au moins sur celles qui vous intéressent plus particulièrement, en l'adressant directement au président M. Klein. Une séance préparatoire aura lieu le lundi 18 septembre afin de délimiter les débats et de fixer les idées directrices qui serviront de base à la discussion de la séance plénière. La Sous-commission désignera un ou deux rapporteurs qui introduiront le sujet à la séance.

Nous vous remercions de bien vouloir collaborer aux travaux de la Sous-Commission, et nous vous prions d'agréer, Messieurs, l'expression de nos meilleurs sentiments.

Le secrétaire-général : H. Fehr.

2. — *Lettre de M. Lietzmann aux membres de la Sous-commission A.*

Barmen, 22 juillet 1911.

Sur la demande de M. le prof. Klein, président de la Sous-commission A, chargée de rapporter au congrès de Milan, j'ai l'honneur de vous proposer le plan ci-après destiné à servir de base à la discussion :

I. *La question de la rigueur dans l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes.* — Si l'on cherche à classer les degrés de la rigueur,

depuis le système des théorèmes établis par une méthode purement déductive jusqu'au système expérimental et empirique, on peut faire les distinctions suivantes :

A. Les fondements sont établis en toute rigueur par des axiomes et le système est édifié par une voie purement déductive. Dans le cas extrême on exige l'indépendance des axiomes, les définitions étant limitées aux seules nécessaires.

B. Les fondements sont empiriques sans le secours d'un système d'axiomes. A partir d'un certain moment toutes les démonstrations sont établies rigoureusement.

C. Les considérations intuitives alternent avec la méthode déductive dans des différents degrés de l'enseignement. Dans les degrés inférieurs l'intuition prédomine, peu à peu on a recours à des déductions logiques sans atteindre cependant la rigueur complète. Comme dans B il est possible qu'à la fin on donne des développements sur le système axiomatique.

D. La méthode déductive n'intervient pas ; les mathématiques sont établies uniquement sur l'expérience et sur l'intuition.

Il y aurait lieu de montrer quelle est la voie suivie dans l'enseignement moyen (lycées, collèges, etc.) dans les différents pays :

a) pour l'arithmétique et pour l'algèbre ;

b) pour la géométrie.

c) Quand commence-t-on, s'il y a lieu, la méthode systématique (âge moyen des élèves) ?

d) Quelles sont les méthodes employées dans l'exposé de ces branches ?

II. — *La dépendance mutuelle des différents domaines de l'enseignement mathématique au point de vue de la rigueur.* — Ici encore il y a deux extrêmes :

A. Les *puristes* n'utilisent dans l'un des domaines que les méthodes de démonstration et d'exposition propres à ce domaine. En géométrie on évite les moyens arithmétiques ; en planimétrie on se borne au plan, etc.

B. D'autres admettent une *fusion* plus ou moins étendue de différents domaines des mathématiques.

Les conditions varient suivant les branches. Dans un pays on rencontre par exemple une fusion très marquée entre la géométrie et l'algèbre, et aucune fusion entre la planimétrie et la stéréométrie, ou vice versa. Il serait donc utile de montrer quelles sont les tendances générales dans les différents pays pour les branches suivantes :

a) Algèbre (respectivement Arithmétique) et Géométrie ;

b) Planimétrie et Stéréométrie ;

c) Planimétrie et Trigonométrie ;

d) Stéréométrie et Géométrie descriptive ;

e) Géométrie synthétique et Géométrie analytique des sections coniques ;

f) Calcul infinitésimal et Algèbre.

Les additions ou remarques concernant cette disposition seront les bienvenues.

A la réunion de Milan on procéderait comme suit : Pour les pays représentés dans la Sous-commission les réponses pourront être enregistrées dans la séance préparatoire du lundi 18 septembre, à 4 heures. Toutefois, afin de gagner du temps, il serait désirable que les réponses soient adressées dès maintenant au soussigné.

W. Lietzmann.

Sous-commission B.

1. — *Lettre du secrétaire-général aux membres de la Sous-commission B.*

Genève, le 30 juin 1911.

Messieurs et très honorés Collègues,

Nous avons l'honneur de vous informer que la Sous-commission B est composée de MM Bourlet. Fehr, Somigliana, Stæckel[1], Wirtinger et de M. Klein, président de la Commission, qui présidera également la Sous-Commission.

Comme vous le savez, celle-ci est chargée de préparer la discussion de la question B mise à l'ordre du jour de la réunion de Milan :

Comment convient-il d'organiser les études mathématiques destinées aux étudiants en physique et en sciences naturelles afin de les diriger directement vers le but qu'ils doivent atteindre ?

Nous chercherons à nous inspirer du plan donné dans le « *Rapport préliminaire* », deuxième partie :

I. — Les idées modernes sur l'enseignement mathématique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles.

II. — Son but. Les branches d'études. Organisation des études théoriques et pratiques.

III. — Les méthodes d'enseignement.

Nous vous prions de donner votre avis directement au président, M. Klein

Une séance préparatoire aura lieu le lundi 18 septembre. La Sous-commission désignera un ou deux rapporteurs qui introduiront le sujet à la séance.

En vous remerciant de votre collaboration, nous vous prions d'agréer, Messieurs, l'expression de nos sentiments distingués.

Le secrétaire-général : H. Fehr.

2. — *Lettre de M. Timerding aux membres de la Sous-commission B.*

Braunschweig, 24 juillet 1911.

M. Klein, président de la Sous-commission B, chargé de rapporter à Milan sur l'enseignement mathématique destiné aux étudiants en sciences physiques, en sciences naturelles, etc., me charge de vous soumettre le plan ci-après de notre rapport :

I. Introduction par M. Timerding.

II. Organisation et champ parcouru dans cet enseignement dans les différents pays.

III. Discussion de questions spéciales et de quelques ouvrages didactiques.

Pour la *partie II* il y aurait à considérer :

a) L'étendue du cours suivant les professions : 1. Physiciens ; 2. Chimistes ; 3. Pour les branches biologiques ; 4. Médecins. — Peut-être pourrait-on encore envisager : 5. Les écoles des mines ; 6. Les écoles forestières ; 7. Les sciences économiques.

---

[1] M. Stæckel ayant été empêché de prendre part aux travaux de la Commission a été remplacé par M. Timerding (Braunschweig).

Branches d'études mathématiques, 1. Mathématiques élémentaires ; 2. Géométrie analytique du plan ; 3. de l'espace ; 4. Géométrie synthétique ; 5. Algèbre et Arithmétique ; 6. Calcul différentiel ; 7. Calcul intégral ; 8. Equations différentielles ; 9. Analyse vectorielle.

b) Méthode d'enseignement, 1. *Suivant les branches :* La méthode est indépendante de la branche, — lui est adaptée, — ou est entièrement combinée avec elle ; 2. Suivant la rigueur le mode de démonstration est purement déductif, — est présenté avec des simplifications, — ou est empirique.

D'après ce schéma on pourrait répondre par exemple : Chimiste ; Calcul différentiel, — adapté à la branche, — avec simplifications.

Prière d'adresser les remarques concernant ce programme au soussigné.

H. Timerding.

III. — PREMIÈRE SÉANCE

Mardi 19 septembre 1911, à 9 h. du matin.

Ordre du Jour : 1. *Allocution du Président.*
2. *Rapports des délégués sur l'état des travaux des Sous-commissions nationales ; discussion.*

Hommage a Brioschi. — Avant de commencer les travaux, les congressistes ont tenu à rendre hommage à la mémoire de l'illustre mathématicien Brioschi en déposant une couronne au pied du monument qui est dans la cour de l'Ecole polytechnique. Une courte allocution a été prononcée par M. le Prof. Klein qui a rappelé ce que fut Brioschi pour la Science et pour l'Enseignement.

La première séance plénière est ouverte mardi matin à 9 $^1/_4$ h.

Discours d'Ouverture. — M. Klein, président, exprime tout d'abord les remerciements de la Commission au Comité local de Milan et tout particulièrement à M. le Sénateur Colombo, Directeur de l'Ecole polytechnique, qui a bien voulu mettre des salles à la disposition du Congrès. Puis il donne un aperçu général du programme de la Réunion en insistant sur le but que nous avons à poursuivre. Depuis la réunion partielle tenue à Bruxelles en août 1910, de grands progrès ont été réalisés dans les travaux des sous-commissions ; plusieurs pays ont déjà terminé l'ensemble de leurs rapports, et, d'ici au Congrès de Cambridge, la plupart des pays auront également achevé leur travail. Ces rapports constitueront un ensemble de documents très précieux tant pour les autorités scolaires que pour le corps enseignant de chaque pays.

Ainsi que nous l'avons déjà déclaré à Bruxelles, notre travail est purement objectif. Notre tâche est de mettre en lumière les tendances modernes de l'enseignement mathématique. Nous ne ferons pas de propositions, car nous ne voulons et nous ne pouvons rien imposer et il n'est pas question d'uniformiser l'ensei-

gnement. Mais nos travaux permettront non seulement aux professeurs de savoir ce qui se fait dans les nations voisines, mais ils renseigneront aussi chacun sur l'organisation de son propre pays.

De la comparaison de ces documents et de l'étude des expériences faites ailleurs naîtront certainement de nouveaux progrès dans le domaine de l'enseignement mathématique.

Langues officielles du Congrès. — Conformément au *Rapport préliminaire,* les langues admises par le Congrès sont l'allemand, l'anglais, le français et l'italien. MM. les professeurs Veronèse, sénateur (Padoue) et Castelnuovo (Rome) expriment toutefois le vœu que les orateurs se servent, si possible, de préférence de la langue française qui est comprise par la majorité des participants. — Adopté.

Liste de Présence. — Le secrétaire-général procède ensuite à l'établissement de la liste de présence des représentants des divers pays. Etaient présents :

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), W. Lietzmann (Barmen) et Timerding (Braunschweig).

Autriche : MM. W. Wirtinger (Vienne) et W. Dintzl (Vienne).

Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).

France : MM. A. de Saint-Germain, C.-A. Laisant, C. Bourlet, Ch. Bioche (Paris).

Hongrie : M. Ratz (Budapest).

Iles Britanniques : Sir Georges Greenhill (Londres), Professor E. W. Hobson (Cambridge), Mr. C. Godfrey (Osborn).

Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), les sénateurs d'Ovidio (Turin) et Veronèse (Padoue), Conti (Rome), Lazzeri (Livourne), Severi (Padoue), Somigliana (Turin).

Norvège : M. Alfsen (Christiania).

Russie : MM. Cojalovic (St-Pétersbourg) et Sintsof (Kharkow).

Suède : M. H. v. Koch (Stockholm).

Suisse : MM. H. Fehr (Genève), E. Gubler (Zurich) et Jaccottet (Lausanne).

Les délégués des autres pays s'étaient fait excuser pour la plupart, soit en raison de la date du Congrès, de la distance ou pour des raisons de santé.

La liste ci-dessus ne mentionne que les membres de la Commission et des sous-commissions nationales. Les séances ont été suivies en outre par un certain nombre de professeurs de Milan.

Remarques de M. Veronèse. — M. le Sénateur Veronèse demande ensuite la parole pour présenter quelques remarques générales concernant la Commission et le but à poursuivre. Il estime que la Commission doit constater et exposer les faits d'une façon purement objective, et il s'associe entièrement aux déclarations faites dans ce sens par le président. Le savant géomètre de Pa-

donc signale ensuite quelques questions qu'il serait intéressant d'étudier.

Par exemple, examiner les idées directrices de la réforme de l'enseignement de la géométrie en Italie et leur influence sur l'évolution de l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes. Les recherches sur les principes de la science, en particulier de la géométrie, n'ont-elles pas eu et ne doivent-elles pas avoir une influence sur le même enseignement; par exemple l'enseignement propédeutique de la Géométrie intuitive ou expérimentale n'est-il pas une conséquence de l'origine expérimentale de la Géométrie reconnue par les mathématiciens. D'autre part, on pourrait examiner, dans chaque pays, dans quelle mesure l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes de culture générale contribue à la formation de l'esprit et satisfait aux besoins mêmes du pays.

Il n'est guère possible, dans ce compte rendu sommaire, de signaler en détail les intéressants problèmes soulevés par M. Veronèse. Nous sommes certains d'être l'interprète des congressistes en exprimant ici le vœu que l'éminent géomètre les traite lui-même dans l'un des fascicules que la Sous-commission italienne compte consacrer à des vues générales sur l'enseignement mathématique.

Après quelques remarques de M. Enriques, le président passe à l'ordre du jour : *Présentation des rapports des sous-commissions nationales et discussion.* Les pays sont appelés dans l'ordre alphabétique renversé, en suivant le tableau fourni par la *Circulaire N° 4*. Toutefois, pour ce compte rendu, nous reprenons l'ordre habituel.

Etat des travaux au 15 septembre 1911.

Allemagne. — Rapporteur : M. F. Klein. — Les rapports que la Sous-commission allemande publie sous le titre de *Abhandlungen* comprendront un ensemble de 40 fascicules répartis en 5 volumes. Aux treize fascicules parus viennent s'adjoindre trois nouveaux fascicules ; ce sont ceux de M. Wirz sur les écoles moyennes du Reichsland, de M. Timerding sur les problèmes d'arithmétique commerciale dans les écoles moyennes et de M. Jahnke sur les écoles supérieures spéciales.

M. Klein fait remarquer que chacun des Etats allemands organise lui-même ses écoles. D'où une grande diversité. Mais partout il règne une grande liberté parmi les professeurs et les directeurs, ainsi qu'à l'Université pour les étudiants. On ne peut donc avoir qu'une influence morale sur le corps enseignant. Les travaux de la Commission ont déjà donné une impulsion dans les différents degrés. Les Gouvernements allemands sont favorables et laissent une grande latitude pour faire des expériences.

Voici la liste des travaux publiés ou en préparation ; ils sont édités par la Maison B. G. Teubner à Leipzig :

A. **Berichte und Mitteilungen,** *veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission.* In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh

1. Fehr, H., Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan der Kommission. Deutsche Uebersetzung von W. Lietzmann. (S. 1-10.) 1909. M. 0.30.

2. Noodt, G., Ueber die Stellung der Mathematik im Lehrplan der höheren Mädchenschule vor und nach der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preussen. (S. 11-32.) 1909. M. 0.80.

3. Klein, F., und Fehr, H., Erstes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 33-38.) 1909. M. 0.20.

4. Klein, F., und Fehr, H., Zweites Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann, sowie Zühlke, P., Mathematiker und Zeichenlehrer im Linearzeichenunterricht der preussischen Realschulen. (S. 39 bis 54.) 1910. M. 0.50.

5. Lietzmann, W., Die Versammlung in Brüssel. Nach dem von H. Fehr verfassten dritten Rundschreiben des Hauptausschusses. (S. 55-74.) 1911. M. 0.60.

6. Fehr, H., Viertes Rundschreiben des Hauptausschusses. Deutsch bearbeitet von W. Lietzmann. (S. 75-88.) 1911. M. 0.50.

B. **Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland,** *veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission.* Herausgegeben von F. Klein. 5 Bände, in einzeln käuflichen Heften. gr. 8. Steif geh.

I. Band. *Die höheren Schulen in Norddeutschland.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen. Auf Grund der vorhandenen Lehrbücher. (XII u. 102 S.) 1909. M. 2.

2. Lietzmann, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen. (VIII u. 204 S.) 1910. M. 5.

3. Lorey, W., Staatsprüfung und praktische Ausbildung der Mathematiker an den höheren Schulen in Preussen und in einigen norddeutschen Staaten. (IV u. 134 S.) 1911. M. 3.20.

4. Thær, A., Geuther, N., Böttger, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte, Mecklenburgs und Oldenburgs. (VI u. 90 S.) 1911. M. 2.

5. Schröder, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen, insbesondere in Norddeutschland. (In Vorbereitung.)

II. Band. *Die höheren Schulen in Süd- und Mitteldeutschland.* Mit einem Einführungswort von P. Treutlein.

1. Wieleitner, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Lehranstalten, sowie Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte im Königsreich Bayern. (XIV u. 85 S.) 1910. M. 2.40.

2. Witting, A., Der mathematische Unterricht an den Gymnasien und Realanstalten nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Sachsen. (XII u. 78 S.) 1910. M. 2.20.

3. Geck, E., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Königreich Württemberg. (IV u. 104 S.) 1910. M. 2.60.

4. Cramer, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen

nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Baden. (IV u. 48 S.) 1910. M. 1.60.

5. Schnell, H., Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen nach Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren und die Ausbildung der Lehramtskandidaten im Grossherzogtum Hessen. (VI u. 51 S.) 1910. M. 1.60.

6. Hossfeld. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen Thüringens. (In Vorbereitung.)

7. Wirz, Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenchulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen. (IV. u. 58 S.) 1911. M. 1.80.

III. Band. *Einzelfragen des höheren mathematischen Unterrichts.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Schimmack, R., Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland. (VI u. 146 S.) 1911. M. 3 60.

2. Timerding, H. E., Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern. Mit 22 Figuren. (VI u. 112 S.) 1910. M. 2.80.

3. Zühlke, P., Der Unterricht im Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten. (IV u. 124 S.) 1911. M. 2.60.

4. Hoffmann, B., Astronomie, Vermessungswesen, mathematischen Geographie an den höheren Schulen. (In Vorbereitung.)

5. Timerding, H. E., Kaufmännische Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (45 S.) 1911. M. 1.60.

6. Gerhardt, M., Geschichte der Mathematik an den höh. Schulen. (In Vorb.)

7. Wernicke, Mathematik und philosophische Propädeutik. (In Vorb.)

8. Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit 1870. (In Vorbereitung.)

9. Höckner, Die Mathematik in der Lebensversicherung. (In Vorb.)

IV. Band. *Die Mathematik an den technischen Schulen.* Mit einem Einführungswort von P. Stäckel.

1. Grünbaum, H., Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (XVI u. 100 S.) 1910. M. 2.60.

2. Ott, C., Die angewandte Mathematik an den technischen Mittelschulen der Maschinenindustrie. (Unter der Presse.)

3. Girndt, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen. (In Vorbereitung.)

4. Schilling, C., und Meldau, H., Die Mathematik an den Seefahrtsschulen. (Unter der Presse.)

5. Hæse, Die mathematischen Fächer an den gewerblichen Fortbildungsschulen. (In Vorbereitung.)

6. Penndorf, Die Mathematik an den kaufmännischulen Lehranstalten. (In Vorbereitung.)

7. Jahnke, E., Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete. (VI. u. 55 S.) 1911. M. 1.80.

8. Furtwängler, Ph., Die mathemat. Ausbildung der Feldmesser. (In Vorb.)

9. Stäckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen. (In Vorb.)

V. Band. *Die Mathematik an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten.* Mit einem Einführungswort von F. Klein.

1. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Rechnenunterrichtes in Deutschland. Ein Litteraturbericht. (Unter der Presse.)

2. Lietzmann, W., Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts auf Grund der Lehrbücher. (In Vorbereitung.)

3. Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte. (In Vorbereitung.)

4. Dressler, H., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen und Thüringen (In Vorbereitung.)

5. Treutlein, P., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Süddeutschland mit Ausführungen von Bock und Kerschensteiner über Bayern, Geck über Württemberg, Cramer über Baden, Hensing über Hessen. (In Vorbereitung.)

6. Lietzmann, W., Die Organisation der Volksschulen, gehobenen Volksschulen, Präparandenanstalten, Seminare usw. in Preussen. (In Vorb.)

Autriche. — Rapporteur : M. W. Wirtinger. — Il a été publié jusqu'à ce jour 15 rapports répartis sur 9 fascicules ; il reste 3 rapports en manuscrits et 3 en préparation. M. Wirtinger signale le récent décret concernant les examens des candidats à l'enseignement dans les Ecoles moyennes [1].

Voici la liste des rapports concernant l'Autriche (éditeur : Alfred Hölder, Vienne) :

Heft 1. — Der mathem. Unterricht an den *Realschulen* von Fr. Bergmann.

Der mathematische Unterricht an den *Volks- und Bürgerschulen*, von K. Kraus. — 81 S. ; M. 1.80.

Heft 2. — Der mathematische Unterricht an den Bildungsanstalten für *Lehrer u. Lehrerinnen*, von Th. Konrath.

Der mathematische u. physikalische Unterricht an den höheren *Handelsschulen*, von M. Dolinski.

Der math. Unterricht an der höheren *Forstlehranstalt Reichstadt*, von M. Adamicka. — 52 S. ; M. 1.20.

Heft 3. — Der math. Unterricht an den *Gymnasien*, von E. Dintzl. — 78 S. ; M. 1.80.

Heft 4. — Der math. Unterricht an den *Mädchenlyzeen*, von Th. Konrath.

Die *praktische Vorbildung für das höhere Lehramt* in Oesterreich, von J. Loos.

Der math. Unterricht an den *gewerblichen Lehranstalten*, von W. Rulf. — 64 S. ; M. 1.60.

Heft 5. — Der math. Unterricht an den *technischen Hochschulen*, von E. Czuber. — 39 S. ; M. 1.20.

Heft 6. — Die *mathematischen Schulbücher* an den Mittelschulen u. verwandten Anstalten, von Ph. Freud. — 53 S. ; M. 1.20.

Heft 7. — Der mathematische Unterricht an den *Universitäten*, von R. v. Sterneck. — 50 S. ; M. 1.20.

Heft 8. — Bericht über die speziellen Verhältnisse des öffentlichen *Mathematikunterrichtes an den Volks- und Mittelschulen Galiziens*, von S. Zaremba. — 25 S. ; M. 1.20.

Heft 9. — Der Unterricht in der *darstellenden Geometrie an den Realschulen, Gymnasien, Realgymnasien und Reform-Realgymnasien*, von A. Adler.

Der Unterricht in der *darstellenden Geometrie* an den technichen *Hochschulen*, von E. Müller. — 124 S. ; M. 2.40.

---

[1] Prüfungsvorschrift f. d. Lehramt an Mittelschulen (mit Einschluss der Mädchenlyzeen, vom 15. Juni 1911. — K.k. Schulbücherverlag, Wien ; 40 Heller. — L'*Ens. math.* en donnera un aperçu dans un prochain numéro, sous la rubrique « Notes et documents ».

Sous presse :

Heft 10. — Der mathematische Unterricht an der *K.k. Hochschule für Bodenkultur* in Wien, von O. SIMONY.

Der mathematische Unterricht an den *Montanistischen Hochschulen* (Bergakademien), von E. KOBALD.

Der mathematische Unterricht an den *Militär-Erziehungs- und Bildungsanstalten*, von A. MIKUTA.

Der mathematische Unterricht an den *Fachschulen des K.k. Technologischen Gewerbemuseums* in Wien, von K. REICH.

Heft 11. — Die neuesten Einrichtungen in Oesterreich zur *Vorbildung der Mittelschullehrer in Mathematik, Philosophie und Pädagogik*, von A. HÖFLER.

En manuscrit :

Die Mathematik im Physikunterricht der österreichischen Mittelschulen, von A. LANNER.

Il est probable qu'à la fin de 1911 la sous-commission autrichienne aura terminé et publié tous ses rapports.

Nous rappelons que l'on trouve ces rapports comme suppléments aux deux périodiques autrichiens : *Zeitschrift f. die österr. Gymnasien* et la *Zeitschrift f. das Realschulwesen*.

Belgique. — Rapporteur : M. H. FEHR, secrétaire-général. — D'après les renseignements récents fournis par M. Neuberg, délégué, les rapports suivants sont sous presse et distribués dans le courant de l'automne :

Les mathématiques dans les écoles primaires et les écoles normales d'instituteurs, par M. DOCK.

Les mathématiques dans les Athénées, collèges et écoles moyennes, par M. PLOUMEN.

Sur l'enseignement du dessin dans les écoles primaires et moyennes et dans les Athénées et collèges, par M. MONTFORT.

Puis viendront les deux rapports suivants actuellement en préparation :

Les mathématiques dans les écoles industrielles, par M. ROMBAUT.

L'enseignement des mathématiques dans les Universités et les Ecoles supérieures, par M. NEUBERG.

Danemark. — M. HEEGAARD, délégué, annonce que le rapport d'ensemble concernant l'enseignement mathématique en Danemark est prêt pour ce qui est de la rédaction, il reste à terminer la traduction. Le volume pourra sans doute être distribué vers Noël.

Espagne. — Rapporteur : M. H. FEHR, secrétaire-général. — M. de GALDEANO a consacré jusqu'ici deux fascicules à l'enseignement mathématique en Espagne. Le premier a été signalé dans la *Circulaire N° 2*. Le second fascicule (18 pages) est consacré principalement à l'enseignement supérieur universitaire et technique.

Etats-Unis. — La délégation des Etats-Unis a informé le secrétaire-général que plusieurs rapports sont actuellement sous presse et que d'autres paraîtront dans le courant de l'hiver.

France. — M. de SAINT-GERMAIN présente les cinq volumes contenant l'ensemble des rapports de la Sous-commission française et donne un rapide aperçu de leur contenu.

M. KLEIN félicite la Sous-commission française et en particulier la délégation d'avoir terminé les travaux dans le délai prévu.

Voici la liste des cinq volumes et des rapports qu'ils contiennent (Editeur: Hachette & Cie, Paris).

Tome I. — *Enseignement primaire*, publié sous la direction de M. Bioche, prof. de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. 85 pages (3 fr. 50) :

Avant-propos.

a) Rapport sur l'ensemble des établissements dans lesquels se donne, en France, un enseignement mathématique, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles primaires élémentaires, par M. J. Lefebvre.

c) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures, par M. G. Tallent.

d) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales primaires d'instituteurs, en France, par M. A. Vareil.

e) Rapport sur l'école normale supérieure d'Enseignement primaire de Saint-Cloud; par M. Goursat.

Appendice.

Tome II. — *Enseignement secondaire*, publié sous la direction de M. Bioche, prof. de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand. — 159 pages (5 fr.) :

Avant-propos.

a) Rapport sur la place et l'importance des mathématiques dans l'enseignement secondaire en France, par M. Ch. Bioche.

b) Rapport sur les classes de mathématiques spéciales et de Centrale, par M. E. Blutel.

Pièces annexes.

c) Rapport sur l'arithmétique par M. A. Lévy.

d) Rapport sur l'algèbre, par M. Guitton.

e) Rapport sur la géométrie, par M. Th. Rousseau.

f) Rapport sur l'enseignement de la mécanique, par M. H. Beghin.

g) Rapport sur l'enseignement de la cosmographie, par M. A. Muxart.

h) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nouvelles, par Frank Lombard.

Appendice.

Tome III. — *Enseignement supérieur*, publié sous la direction de M. Albert de Saint-Germain, Doyen honoraire de la Faculté des sciences de Caen, président de la Sous-commission française, — 123 pages (4 fr.):

Aperçu général sur l'enseignement supérieur des mathématiques.

a) Rapport sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral, de la mécanique rationnelle, de l'astronomie et des mathématiques générales dans les Facultés des sciences en France, par M. E. Vessiot.

b) Rapport sur les enseignements mathématiques d'ordre élevé dans les Facultés des Sciences d'Universités françaises, par M. Emile Borel.

Annexe. — Faculté des Sciences de Paris : programmes des certificats d'études supérieures pour l'année 1911.

c) Rapport sur les diplômes d'études supérieures de sciences mathématiques, par M. A. de Saint-Germain.

d) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les instituts techniques des facultés des sciences, par M. H. Vogt.

e) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'école normale supérieure et sur l'agrégation des sciences mathématiques, par M. Jules Tannery.

f) Note sur l'enseignement mathématique au collège de France, par M. A. de Saint-Germain.

g) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'école polytechnique, par M. G. Humbert.

h) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Ponts et Chaussées, par M. Maurice d'Ocagne.

i) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole nationale supérieure des Mines, par M. René Garnier.

j) Rapport sur l'enseignement mathématique à l'Ecole nationale des Mines de Saint-Etienne, par M. Friedel.

k) Note sur l'Ecole d'application du Génie maritime, par M. A. Janet.

Tome IV. — *Enseignement technique*, publié sous la direction de M. P. Rollet, Directeur de l'Ecole municipale professionnelle Diderot (à Paris), — 212 pages (5 fr.) :

Introduction.

Ecoles pratiques de commerce et d'industrie. Programmes officiels (28 août 1909). Extraits concernant l'enseignement mathématique.

a) Rapport de M. Harang.

b) Rapport de M. Ch. Lagneaux.

c) Rapport de M. Ch. Lagneaux.

Ecoles nationales professionnelles. Programme de l'enseignement technique théorique.

d) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nationales professionnelles (E. N. P.) par M. Larivière.

e) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles nationales professionnelles, par M. E. Tripard.

Ecoles d'arts et métiers. Programmes officiels du 9 mai 1910.

f) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (1re année), par M. J. Roumajon.

g) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'arts et métiers (2e année), par M. Bezine.

h) Rapport sur l'enseignement de la mécanique dans les écoles d'arts et métiers (3e année), par M. Bazard.

Ecoles de commerce. — *i)* Rapport sur l'enseignement mathématique dans les établissements de la Chambre de Commerce de Paris par M. P. Mineur.

Conservatoire national d'arts et métiers. — *j)* Rapport sur l'enseignement des mathématiques au Conservatoire national des arts et métiers, par M. Carlo Bourlet.

Ecole centrale des arts et manufactures. — *k)* Rapport sur l'enseignement mathématique à l'école centrale des arts et manufactures, par M. P. Appell.

Appendice.

Tome V. — *Enseignement des jeunes filles*, publié sous la direction de Mlle Amieux, prof. au Lycée Victor-Hugo à Paris. — 95 pages (3 fr. 50) :

Aperçu général.

Enseignement secondaire. Introduction.

a) Rapport sur la place des mathématiques dans les plans d'études, l'organisation générale et l'enseignement obligatoire, par Mlle A. Amieux.

b) Rapport sur l'enseignement des mathématiques dans la 2e période et sur la préparation au baccalauréat et aux examens de l'enseignement secondaire féminin, par Mme Baudeuf.

c) Rapport sur l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale de Sèvres, par M. P. Appell.

Enseignement professionnel. Rapport sur les mathématiques dans l'enseignement professionnel des jeunes filles, par Mme Pivot et Mlle Fredon.

Enseignement primaire. Introduction.

a) Note sur l'Enseignement mathématique dans les écoles primaires élémentaires.

b) Rapport sur l'enseignement mathématique dans les écoles primaires supérieures de jeunes filles, par M. Tallent.

c) Sur l'enseignement mathématique dans les écoles normales d'Institutrices primaires.

d) Rapports sur l'enseignement mathématique à l'Ecole normale supérieure d'Institutrices de Fontenay-aux-Roses, par MM. G. Fontené et G. Koenigs.

Grèce (sans nouvelles).

Hollande. — Rapporteur : M. H. Fehr, secrétaire-général. — Les rapports concernant l'enseignement mathématique en Hollande ont été publiés en un volume qui a été distribué aux membres de la Commission le 1er juin 1911. C'est le second pays qui ait terminé ses travaux. Le volume (151 p., 3 fr.) comprend les rapports suivants (Editeur : J. Waltman, Delft) :

1. L'enseignement mathématique à l'école primaire.
2. L'enseignement mathématique aux « Burgeravondscholen » (écoles dites bourgeoises), écoles professionnelles, écoles de dessin, écoles professionnelles pour filles et écoles techniques.
3. Ecoles de marine.
4. L'enseignement mathématique aux écoles moyennes (Hoogere Burgerscholen). Ecole moyenne à 3 années d'études.
5. Ecole moyenne à 5 années d'études.
6. Ecoles moyennes pour jeunes filles.
7. L'enseignement mathématique aux gymnases.
8. Les universités.
9. Académie technique.
10. L'enseignement mathématique aux instituts militaires de l'armée de terre dans les Pays-Bas.
11. Ecole de machinistes pour la marine à Hellevœtsluis.
12. Institut Royal de marine à Willemsoord.
13. Rapport complémentaire sur les propositions de la Commission d'Etat pour la réorganisation de l'enseignement, établie par Arrêté Royal du 21 mars 1903. n° 49.

Hongrie. — M. L. Ratz rapporte. On sait qu'il s'est constitué en Hongrie en 1906 une commission qui a fait une enquête approfondie de l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes [1].

L'idée directrice de la réforme préconisée par la Commission peut être caractérisée de la manière suivante : L'enseignement des mathématiques doit être tel que l'élève reconnaisse l'importance des mathématiques dans les branches des connaissances humaines. Nous voulons que l'élève qui termine l'école moyenne emporte dans la vie pratique une certaine culture mathématique, de manière que les méthodes de la pensée mathématique pénètrent dans une certaine mesure dans la vie publique. L'élève doit se rendre compte des liens nombreux qui existent entre les sciences mathématiques et la vie pratique.

---

[1] Abhandlungen über die Reform des math. Unterrichts in Ungarn, deutsch herausgegeben von E. Beke u. S. Mikola. 160 p., B. G. Teubner, 1911.

Il faut agir sur le développement de la pensée non pas par des connaissances isolées, mais par des connaissances qui soient en relation étroite avec l'activité journalière et les idées usuelles (voir « Abhandlungen über die Reform des math. Unterrichts in Ungarn », p. 146).

Pour réaliser ce principe général, les mathématiques doivent poursuivre les buts suivants : Tenir compte, dans la mesure du possible, des domaines concrets et de la vie pratique ; développer l'intérêt pour des questions économiques ; développer la conception de l'espace ; utiliser les représentations graphiques ; introduire les éléments du calcul infinitésimal avec les applications. La partie la plus importante de nos propositions de réforme est celle qui touche au développement de la pensée fonctionnelle ; je me bornerai donc seulement à ce point.

La notion de fonction doit être préparée avec beaucoup de soin et il faut laisser suffisamment de temps aux élèves afin qu'ils puissent se familiariser avec ces idées. Dans les classes inférieures, l'élève est appelé à établir de nombreux graphiques basés sur des mesures effectuées par l'élève lui-même ; puis viennent les graphiques concernant la statistique et des problèmes de géométrie physique. En IVe viennent ensuite, à l'occasion des équations du premier degré, l'introduction et les exercices sur les fonctions linéaires ainsi que la résolution graphique d'équations et d'égalités du premier degré. Dans les classes suivantes l'élève est familiarisé avec les fonctions du second degré, les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques. C'est en VIIe que nous introduisons les dérivées avec la géométrie analytique. L'introduction et les développements concernant cette notion se fait sur des bases intuitives et sur des graphiques. Viennent ensuite les règles de différentiation et l'application aux problèmes de maxima et minima empruntés à l'algèbre, à la géométrie et à la physique. Dans la classe suivante nous introduisons les éléments du calcul intégral qui sont ensuite appliqués au calcul d'aire de figures planes, à l'aire et au volume de corps de rotation ; puis viennent la détermination des centres de gravité, des moments d'inertie et autres applications de la physique. On termine en général par le développement en série de fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques.

Nos propositions ont été soumises au Ministère de l'Instruction publique ; toutefois, jusqu'à ce jour, il n'a été pris aucune décision ; cependant les autorités supérieures laissent toute latitude aux maîtres qui désirent adapter leur enseignement aux propositions de réforme ; ainsi, au Gymnase évangélique de Budapest, l'enseignement se fait déjà depuis quatre ans sur ces bases et l'on a constaté le meilleur succès.

On peut également signaler les essais satisfaisants que l'on a faits dans les lycées de jeunes filles et aux académies militaires.

M. Ratz parle également des conférences populaires que M. Beke a faites devant de nombreux auditoires.

Sur la demande de la Commission internationale, il s'est également constitué une sous-commission hongroise ; elle est présidée par M. le prof. König. La première partie des travaux sera distribuée très prochainement aux membres de la Commission ; le reste suivra dans le courant de cette année universitaire.

Iles Britanniques. — M. Godfrey rapporte. — On sait que la Sous-commission anglaise publie ses rapports avec le concours du Board of Education. Nous en avons donné la liste en son temps (*Circ. no 4*, no de mars

1911, p. 131-133). Ils sont publiés sous la responsabilité propre de chacun des auteurs et sous le titre général de : *The Teaching of Mathematics in the United Kingdom. being a series of Papers prepared for the International Commission on the Teaching of Mathematics.* Les huit premiers fascicules viennent de paraître; ils sont mis en vente séparément chez : WYMAN and Sons, Londres; OLIVER and Boyd, Edinbourg; E. PONSONBY, Dublin. En voici la liste :

N° 1. Higher Mathematics for the Classical Sixth Form. By Mr W. NEWBOLD. — 14 p. in-8°; prix : 1 d.

N° 2. The relations of Mathematics and Physics. By Dr L.-N.-G. FILON. — 9 p.; 1 d.

N° 3. The Teaching of Mathematics in London Public Elementary Schools. By Mr P.-B. BALLARD. — 28 p.; 2 d.

N° 4. The Teaching of Elementary Mathematics in English Public Elementary Schools. By Mr H.-J. SPENCER. — 32 p.; 2 1/2 d.

N° 5. The algebra Syllabus in the Secondary School. By Mr C. GODFREY. 34 p.; 2 1/2 d.

N° 6. The Correlation of Elementary Practical Geometry and Geography. By Miss Helen BARTRAM. — 8 p.; 1 d.

N° 7. The Teaching of Elementary Mechanics. By Mr W.-D. EGGAR. — 13 p.; 1 d.

N° 8. Geometry of Engineers. By D.-A. Low. — 15 p.; 1 1/2 d.

Italie. — M. CASTELNUOVO rapporte. — Sur les douze rapports annoncés. cinq sont terminés et distribués. Ce sont ceux de MM. PINCHERLE, SOMIGLIANA, SCARPIS, FAZZARI et SCORZA. Voici le tableau général des travaux de la Sous-commission italienne :

1. *Scuole infantili ed elementari*, prof. CONTI (Roma), (in manoscritto).
2. *Scuole normali*, prof. CONTI (Roma), (in manoscritto).
3. *Scuole classiche :*
   a) I successivi programmi dal 1867 al 1910, prof. SCARPIS (Bologna), 11 p. (pubblicato).
   b) Critiche e proposte, prof. FAZZARI (Palermo), 16 p. (pubblicato).
4. *Scuole ed istituti tecnici*, prof. SCORZA (Palermo), 34 p. (pubblicato).
5. *Scuole professionali, commerciali e militari*, prof. LAZZERI (Livorno) (in manoscritto).
6. *Università : corsi di matematica per gli allievi ingenieri*, prof. SOMIGLIANA (Torino), 11 p. (pubblicato).
7. *Università : Sulla laurea e la preparazione dei candidati all'insegnamento*, prof. PINCHERLE (Bologna), 16 p. (pubblicato).
8. *Sui trattati italiani di matematiche elementari*, prof. SCORZA (Palermo), (in preparazione).
9. *Sulle proposte di riforma dell'insegnamento matematico nelle scuole medie*, dott. VACCA (Genova), (in preparazione).
10. *Sulla evoluzione degli insegnamenti geometrici nelle Università*, prof. SEVERI (Padova), (in preparazione).
11. *Sulla evoluzione degli insegnamenti analitici nelle Università* (non ancora assegnato).
12. *Osservazione e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, prof. PADOA (Genova), (già pubblicato nel Bollettino di Matematica, 1910, e da ripubblicarsi negli Atti Ufficiali della Sottocommissione italiana).

L'exposé de M. Castelnuovo a été suivi d'une intéressante discussion à laquelle ont pris part MM. les sénateurs Veronèse et d'Ovidio. M. Veronèse a insisté particulièrement sur le fait qu'en Italie il n'existe qu'un type d'école moyenne conduisant à toutes les Facultés de l'Université, ce sont les gymnases classiques, tandis que l'*istituto tecnico* (Realschule) conduit seulement à la Faculté des Sciences. On va instituer un autre type d'école moyenne : le gymnase moderne.

Japon. — Ainsi que nous l'avions annoncé dans la *Circulaire N° 4*, la Sous-commission prépare un ensemble de rapports qui seront traduits en anglais. Ils seront terminés au commencement de 1912.

Norvège. — M. Alfsen rapporte. — Les plans d'étude des écoles moyennes sont actuellement en revision, ce qui explique le retard apporté à la publication du rapport général concernant l'enseignement mathématique dans les différents établissements de la Norvège.

Portugal. — Rapporteur : M. H. Fehr, secrétaire-général. — Le gouvernement de la République a entrepris d'importantes modifications dans l'organisation de l'enseignement. Ainsi, dans l'enseignement supérieur, on vient de créer une université à Lisbonne et une autre à Porto. M. le prof. Teixeira, notre délégué, a été nommé recteur de cette dernière université. Cette réorganisation de l'enseignement retarde nécessairement la publication du rapport concernant le Portugal.

Roumanie. — M. G. Tzitzeika, délégué, a fait savoir au Comité central que le fascicule sur l'état actuel de l'enseignement en Roumanie paraîtra en février 1912.

Russie. — M. Coialovitsch rapporte. — Cinq fascicules ont déjà été distribués aux membres de la Commission. Ce sont les suivants :

1. *L'enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques supérieures et quelques-unes des écoles militaires*, par C. Possé. — 100 p.

2. *L'enseignement mathématique dans les écoles de Finlande*, rédigé par une commission instituée par le Sénat impérial de Finlande. —52 p.

3. *Bericht über den mathematischen Unterricht an den russischen Realschulen*, von K. W. Vogt. — 16. p.

4. *L'enseignement mathématique dans les écoles primaires et les écoles normales*, par M. S.

L'enseignement mathématique dans les gymnases de garçons du Ministère de l'Instruction publique et dans les *instituts de jeunes filles* du ressort des établissements de l'Impératrice Marie, par M. Kondratiev. — 29 p.

5. *L'enseignement mathématique dans les Corps des cadets*, par M. Poprugenko.

Notice sur les Cours pour la préparation des maîtres des Corps de cadets, par M. Makchéev. — 29 p.

Sont déjà traduits en français et sous presse :

a) Sur l'organisation de l'enseignement mathématique dans les *gymnases de jeunes filles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique et à l'*Institut pédagogique de jeunes filles*. Par M. Michelson, prof. à cet institut.

b) Sur l'enseignement mathématique dans les *écoles industrielles* du ressort du Ministère de l'Instruction publique. Par MM. Kotournitzky et Hatzouk, professeurs à l'Institut technologique de St-Pétersbourg.

c) Sur l'enseignement des mathématiques, de la physique et de la géo-

graphie mathématique dans les *gymnases de jeunes filles* dans l'arrondissement scolaire de Varsovie. Par M. Goriatckev, prof. à l'Université de Varsovie.

Rapports déjà présentés en langue russe (en traduction).

a) Les mathématiques dans l'*Institut technologique de St-Pétersbourg* Par Boris Coïalovitsch, prof. à cet institut.

b) Les mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes (université de femmes)* à St-Pétersbourg. Par le même.

c) Les mathématiques dans les *cours supérieurs de femmes à Moscou*. Par M. Mlodziewski, anc. prof. à l'Université de Moscou.

d) Les mathématiques dans l'*Institut polytechnique de Varsovie*. Par M. Mordoukhaï-Boltowskoï, prof. à l'Université de Varsovie.

e) Sur la préparation des maîtres pour les écoles moyennes secondaires. Par M. Kagan, prof. adjoint à l'Université d'Odessa.

f) Les mathématiques dans les *écoles de l'administration générale de l'agriculture*. Par M. N. N.

M. Sintsof prend la parole après le premier représentant de la Russie. Il insiste sur les difficultés qui se rencontrent dans son pays pour les réformes dans l'enseignement mathématique. Différentes sociétés ont mis ces questions à l'ordre du jour. La Société mathématique de Karkoff s'est occupée des mathématiques dans les écoles réales. Un intérêt pour les questions d'enseignement se manifeste également dans les sociétés mathématiques de Moscou, de Riga, de St-Pétersbourg et de Varsovie. Il appelle l'attention de la Commission sur le premier Congrès russe des professeurs de mathématiques qui aura lieu à St-Pétersbourg du 9 au 16 janvier 1912. Ce Congrès ne manquera pas d'avoir une influence utile sur le développement de l'enseignement des mathématiques en Russie. M. Sintsof exprime le désir que les membres de la Commission veuillent bien prendre part aux travaux de ce Congrès.

Suède. — M. H. von Koch rapporte. — Les rapports au nombre de huit ont été terminés au mois de février dernier; ils ont été réunis en un volume contenant une préface de M. H. von Koch, délégué. On a pu voir, d'après les comptes rendus publiés dans l'*Enseignement mathématique*, que ces rapports fournissent non seulement des indications sur les plans d'études mais aussi d'intéressants renseignements concernant les méthodes. — C'est la Suède qui, la première, a terminé l'ensemble de ses rapports.

Der mathematische Unterricht in Schweden, herausgegeben von Dr. H. von Koch und Dr. E. Göransson. — Editeur : C. E. Fritze, Stockholm.

Ecoles primaires et écoles normales, par H. Dahlgren : Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminaren Schwedens, 52 p.

Ecoles réales, par E. Göransson et E. Hallgren : Die Mathematik an den schwedischen Realschulen; 28 p.

Gymnases, par E. Göransson : Die Mathematik an den schwedischen Gymnasien, 51 p.

Etablissements de jeunes filles, par O. Josephson et Anna Rönström : Die Mathematik an den höheren Mädchenschulen in Schweden, 23 p.

Ecoles professionnelles élémentaires, par K.-L. Hagström, G. Erikson et C. Heüman : Die Mathematik an elementartechnischen Gewerbeschulen, 22 p.

Ecoles techniques moyennes, par O. Gallander : Der mathematische Unterricht an den technischen Mittelschulen, 8 p.

Ecoles techniques supérieures, par H. von Koch : Die Mathematik an der technischen Hochschule in Stockholm, 13 p.

Universités, par A. Wiman : Die Mathematik an den schwedischen Universitäten, 18 p.

Suisse. — Rapporteur : M. H. Fehr, délégué. — Les rapports de la Sous-commission suisse ont été répartis en huit fascicules, dont le I[er], consacré aux travaux préparatoires, a paru en janvier 1909.

Sont actuellement terminés les rapports de M. Brandenberger sur les écoles moyennes, de M. Grossmann sur l'Ecole polytechnique fédérale, de M. Gubler sur les écoles de jeunes filles et de M. Matter sur les écoles modernes. Ces deux derniers sont réunis en un même fascicule avec le rapport de M. Scherrer sur les écoles normales qui est également terminé. Les autres rapports sont sous presse. Le fascicule 8 vient également de paraître.

Voilà le tableau d'ensemble du contenu de ces fascicules qui seront terminés vers la fin de l'année 1911.

L'enseignement mathématique en Suisse. Rapports de la Sous-commission suisse, publiés sous la direction de H. Fehr. — 8 fasc. en vente séparément. Librairie Georg & C[ie]. Genève et Bâle.

Fasc. 1. — *Les travaux préparatoires : Rapport préliminaire sur l'organisation de la Commission et le plan général de ses travaux*, publié au nom du Comité central par H. Fehr, secrétaire général de la Commission (en français et en allemand). — *Organisation des travaux en Suisse*. (43 p.), 1910. Fr. 1.50.

Fasc. 2. — *Aperçu général*, par H. Fehr.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Primarschulen, von Just Stöcklin.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Sekundarschulen, von Badertscher, Bern. — (Sous presse).

Fasc. 3. — *Der mathematische Unterricht an den höheren Mädchenschulen der Schweiz*, von E. Gubler, Zürich.

Der mathematische Unterricht an den Lehrer- und Lehrerinnenseminarien der Schweiz, von F. R. Scherrer, Küsnacht.

Organisation und Methodik des mathematischen Unterrichts in den Landerziehungsheimen, von K. Matter, Frauenfeld. — 1911, Fr. 2.25.

Fasc. 4. — *Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien und Realschulen*, von K. Brandenberger, Zürich. — (167 p.), 1911. Fr. 3.50.

Fasc. 5. — *Les mathématiques dans l'enseignement technique moyen en Suisse*, par L. Crelier, Bienne. — (Sous presse).

Fasc. 6. — *Les mathématiques dans l'enseignement commercial en Suisse* par L. Morf, Lausanne. — (Sous presse).

Fasc. 7. — *Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, von M. Grossmann, Zürich. — (52 p.), 1911. Fr. 2.

Fasc. 8. — *Les mathématiques à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne*, par M. Lacombe, Lausanne.

Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Universitäten, von J.-H. Graf, Bern. — 1911, Fr. 2.25.

Dépôt central de vente des publications concernant la Commission internationale. — Au cours de cette séance, plusieurs délégués ont exprimé le vœu qu'il soit créé un dépôt central de vente des publications des sous-commissions nationales. Cela permettrait à ceux qui désirent acquérir un ensemble de fascicules de pays différents de n'avoir à s'adresser qu'à un seul libraire. Le cas se présentera sans doute fréquemment, car dans les milieux intéressés des divers pays on se proposera certainement d'examiner tel rapport spécial ou même d'acheter l'ensemble de toutes les publications.

Le Comité central a obtenu le concours de l'un des éditeurs de L'Enseignement mathématique, *la Maison* GEORG & Cie, *à* Genève (Corraterie, 10), *qui veut bien se charger de ce dépôt.*

Messieurs les Délégués sont priés d'en informer leur éditeur afin qu'il entre en relations avec la Maison Georg & Cie, *dès que les fascicules ou les volumes sont mis en vente.*

IV. — DEUXIÈME SÉANCE

Mardi 19 septembre, à 4 heures.

Ordre du Jour :

Les mathématiques dans l'enseignement moyen ; rapports de la sous-commission A :

I. *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.), *de l'exposé systématique des mathématiques ?*

II. *La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.*

Discussion.

M. F. Klein, président, expose d'abord les deux questions mises à l'ordre du jour et dont la discussion a été préparée par une sous-commission dite A. — M. Castelnuovo a été chargé de rapporter sur la question A, I concernant la rigueur dans l'enseignement moyen, tandis que M. Bioche introduira la question A, II relative à la fusion des différentes branches mathématiques dans ce même enseignement.

A. I. — La rigueur dans l'enseignement mathématique dans les écoles moyennes.

M. Castelnuovo rapporte. Une discussion préliminaire a eu lieu la veille entre MM. les délégués au sujet de la question : *Dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes* (lycées, collèges, gymnases, écoles réales, etc.) *de l'exposé systématique des mathématiques ?* Pour diriger la discussion M. Lietzmann avait proposé une classification des différents degrés de

rigueur et avait posé des questions[1] qui ont donné lieu à quelques remarques pour les différents pays. Il s'agit aujourd'hui de résumer ce premier débat et de porter la discussion devant le Congrès.

M. Castelnuovo accepte pour le moment la classification de M. Lietzmann; il veut cependant la préciser en quelques points pour éviter des malentendus. Il fait remarquer ensuite que si l'on veut établir une comparaison entre les méthodes d'enseignement employées dans les différents pays, en relation avec la dite classification, il faut fixer l'attention sur un même type d'écoles, et sur la même branche de mathématiques. Il convient de choisir dans ce but les gymnases (lycées) et l'enseignement de la géométrie.

Voici alors comment on peut classer les différents degrés de rigueur; pour rendre la classification plus claire, nous ferons suivre le numéro de la classe du nom de quelques auteurs qui emploient dans leurs traités la méthode indiquée.

A) *Méthode entièrement logique* (Peano, Hilbert[2], Halsted). — Tous les axiomes sont posés; on discute leur indépendance; le développement ultérieur est rigoureusement logique. On ne fait aucun appel à l'intuition; les notions primitives (point, etc.) sont assujetties à la seule condition de satisfaire aux axiomes.

B) *Fondements empiriques, développement logique.* — De l'observation de l'espace réel l'on déduit les propositions primitives sur lesquelles est fondé le développement logique qui suit. — Il convient ici de distinguer trois sous-groupes :

B_A) tous les axiomes nécessaires sont énoncés (Sannia-d'Ovidio, Veronèse, Enriques-Amaldi).

B_B) une partie des axiomes est énoncée (Euclide, Thieme).

B_C) on énonce seulement les axiomes qui n'ont pas un caractère absolu d'évidence (Kambly, Müller).

C) *Les considérations intuitives s'alternent avec la méthode déductive* (Borel, Behrendsen-Götting). — On recourt à l'évidence toutes les fois qu'il convient, sans qu'il résulte d'une manière précise ce que l'on admet et ce que l'on démontre.

D) *Méthode intuitive-expérimentale* (Perry). — On présente les théorèmes comme des faits qui ont un caractère intuitif ou peuvent être démontrés par l'expérience, sans qu'on aperçoive le lien logique qui unit ces faits.

Si l'on examine maintenant quelles méthodes sont adoptées par les différents pays dans les écoles nommées, on arrive aux conclusions suivantes :

Aucun pays n'adopte d'une façon systématique ni la méthode A),

[1] Voir plus haut dans les « Travaux préparatoires ».

[2] On doit remarquer que le Mémoire bien connu de M. Hilbert n'a pas un caractère didactique, mais il a servi de base à l'ouvrage de M. Halsted [qui vient d'être traduit en français par M. Barbarin. (Paris, Gauthier-Villars.) — H. F.].

ni la méthode D), excepté naturellement quelques professeurs isolés qui ont fait des tentatives dans l'un ou l'autre sens.

Les nations latines (Italie, France, Suisse française) *préfèrent la méthode* B).

Les nations allemandes (Allemagne, Autriche, Suisse allemande) *s'approchent de la méthode* C).

L'Angleterre qui était restée fidèle à Euclide (méthode B_B) *jusqu'à 1900, adopte maintenant dans la plupart de ses écoles la méthode* B_C, sous l'influence du mouvement qui a eu pour promoteur M. Perry.

Manquent les renseignements concernant les autres nations, en particulier la Russie, l'Espagne. Pour les Etats-Unis d'Amérique, la sous-commission a reçu d'intéressantes observations rédigées par M. J. W. Young (Chicago) ; elles seront reproduites plus loin.

La différence que l'on remarque entre ces différentes tendances pourrait être attribuée aux caractères qui distinguent les races latines des races allemandes ; mais il est probable que les conditions économiques (en particulier l'industrialisme) ont aussi exercé une influence appréciable. Pour distinguer l'importance des facteurs qui ont déterminé le choix de l'une ou l'autre méthode, il conviendrait d'examiner l'évolution que ces méthodes ont subie dans les différents pays. Voici les renseignements qui sont donnés par M. Castelnuovo ou par quelques-uns des congressistes présents.

Italie : $B_C \longrightarrow B_B \longrightarrow B_A$.

Le premier passage a eu lieu en 1867, par l'effet d'une réforme des programmes due à MM. Brioschi, Betti et Cremona. A présent se manifeste une réaction chez plusieurs professeurs qui aspirent à revenir à B_C.

France : $B_B \longrightarrow B_A \longrightarrow C$.

Le dernier passage correspond à une tendance plutôt qu'à une réalité.

Allemagne : $B_B \longrightarrow B_C \longrightarrow C$.

Angleterre : $B^B \longrightarrow B_C$.

Les renseignements qui précèdent se rapportent particulièrement à la géométrie. Il faudrait reprendre l'enquête pour l'algèbre ou les autres branches d'enseignement secondaire des mathématiques.

Il faudrait encore préciser *à quel âge* dans les différents pays commence l'enseignement méthodique [1].

Quelles difficultés rencontrent les élèves à suivre soit le développement logique, soit la méthode fondée sur l'expérience ? Quels

---

[1] Pour l'Italie cet âge va de 13 à 15 ans.

procédés sont employés pour surmonter ces difficultés ? Quels sont les résultats que l'on obtient par l'une ou l'autre de ces méthodes, non seulement par rapport aux effets de l'école (profit, examens, etc.), mais, ce qui intéresse davantage, par rapport à l'étendue de la culture des élèves ?

Ce sont là autant de questions importantes que M. Castelnuovo signale à l'attention du Congrès.

Discussion. — M. Klein fait remarquer qu'il existe une différence profonde entre les livres et l'enseignement effectif. Quant à la question de l'indépendance des axiomes, elle n'est pas résolue jusqu'au bout.

Nous nous limiterons ici aux écoles moyennes et en particulier aux gymnases. Dans les autres écoles, par exemple dans les écoles d'ordre professionnel, on se rattache à la catégorie D. Autrefois on prenait partout la même méthode B. Une transformation heureuse s'est effectuée dans le sens d'une meilleure adaptation de l'enseignement au but de l'école. On peut signaler, à titre d'exemple, les efforts faits par M. Andrade dans le domaine de l'enseignement destiné aux horlogers [1].

M. Veronèse dit qu'en effet la catégorie A n'existe que pour les traités scientifiques tels que ceux de MM. Peano, Hilbert, Veronèse *(Fondamenti di Geometria)*, etc., du reste la loi d'indépendance n'est encore démontrée complètement dans aucun des systèmes. Il ne saurait être d'accord avec M. Perry si celui-ci veut introduire sa méthode dans les écoles moyennes préparant à l'enseignement supérieur. Les mathématiques ont un côté éducatif, elles doivent aider à la culture de l'esprit. L'enseignement intuitif expérimental doit préparer à l'enseignement déductif. Mais les théorèmes dépendent des propositions admises dans les démonstrations et peuvent varier avec celles-ci ; aussi, afin qu'il y ait la rigueur nécessaire, il faut, pour la validité même des théorèmes, que les propositions admises sans démonstration (axiome ou non) soient évidentes et soient énoncées explicitement. Quant aux éléments d'Euclide on doit reconnaître que selon leur esprit ils appartiennent plus à la catégorie B*a*, qu'à la catégorie B*b* ; car si les axiomes n'y sont pas tous énoncés cela tient à la difficulté qu'il y avait au temps d'Euclide d'établir tous les axiomes.

D'autre part il peut y avoir de la rigueur dans un ouvrage de la catégorie C et moins de rigueur dans un manuel B_A. Nous ne devons pas faire de la rigueur excessive dans l'enseignement moyen ; il faut que l'intelligence moyenne des élèves puisse comprendre. L'écolier doit être amené à posséder les principales propriétés et à voir les rapports qu'elles ont entre elles ; nous devons

---

[1] Congrès de Rome, 1908. — (Voir aussi son Premier Livre de la Géométrie naturelle, dans *L'Ens. math*, 1908. — *H. F.*).

les amener à bien raisonner sans qu'ils s'en aperçoivent, l'écolier lui-même y trouvera une grande satisfaction.

Si l'industrialisme ou l'utilitarisme matériel avait en effet des influences prépondérantes dans l'enseignement des écoles moyennes, les mathématiciens devraient les combattre.

Quant aux manuels on ne peut pas juger de leur valeur d'après le nombre des exemplaires vendus.

M. d'Ovidio estime qu'il est difficile de classer les méthodes et les livres et de reconnaître si la rigueur est parfaite. Il faut que la rigueur soit compatible avec l'enseignement ; c'est donc une question très relative. Les auteurs doivent se tenir dans un juste milieu qui semble être indiqué par la catégorie B_A pour les établissements indiqués.

M. Bourlet apporte des renseignements purement objectifs sur ce qui se fait en *France*. Il n'est guère possible de faire ici un tableau exact ; l'enseignement dépend de la classe. Pendant le premier cycle (Quatrième et Troisième) les élèves voient les faits géométriques, qu'ils étudient ensuite avec plus de précision pendant le deuxième cycle (Seconde et Première) puis une troisième fois dans la classe de mathématiques.

En France l'enseignement oral prévaut, le livre permet au professeur de donner des problèmes ; c'est surtout sur les professeurs que le livre a une influence.

M. Bourlet montre l'évolution qui s'est faite depuis le traité de Legendre ou ceux du type Legendre, remplacés ensuite par celui de Rouché et Comberousse, qui a servi pendant très longtemps. Puis on a constaté une crise due à l'industrie, comme l'a dit M. Castelnuovo. La nécessité de développer l'enseignement secondaire a conduit à faire commencer plus tôt l'enseignement de la géométrie, mais alors les élèves n'ont pas compris et on a dû changer la méthode, c'est alors qu'on a introduit les nouveaux programmes de 1902 et 1905.

Il mentionne ici les efforts faits par Méray, dès 1874, introduisant une part expérimentale, sans une grande rigueur.

Le traité de Méray, qui est destiné uniquement aux maîtres, apporte une foule d'idées nouvelles et originales. Des essais ont été faits d'après cette méthode.

On sait que M. Bourlet a fait lui-même un manuel de géométrie élémentaire en développant certaines idées de Méray. La considération des groupes de rotation, de translation et d'homothétie lui permet d'éviter l'axiome d'Euclide. Son manuel, qui est destiné au premier cycle, rentre dans la catégorie C, mais l'auteur se propose d'en faire un pour la catégorie B et ensuite un autre pour la catégorie A. Il signale à ce propos les perfectionnements apportés à sa méthode par M. Rousseau, dans un article publié dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1909 (p. 81-97). En résumé il

estime que l'on doit chercher un même système de géométrie dans lequel l'exposé B pourrait se déduire de A, C de B et D de C; suivant l'âge de l'élève on prendrait successivement l'étude en allant de D ⟶ C ⟶ B ⟶ A.

M. Hobson parle de la méthode et des manuels en usage en *Angleterre.* Ceux-ci ont en effet de la tendance à aller de la catégorie B_B à B_C. Les critiques qui se sont élevées contre l'emploi d'Euclide tiennent, non pas au défaut de la méthode, mais surtout à l'ordre des faits géométriques examinés. Il faut développer le raisonnement logique par une acquisition systématique des connaissances géométriques, mais il n'est pas nécessaire d'avoir un système de postulats et d'axiomes. Il est d'accord avec M. Veronese pour ce qui est des idées de M. Perry; elles ne fournissent pas de méthodes générales.

M. Dintzl (Vienne) apporte des renseignements concernant l'*Autriche.* Faute de temps, il doit se borner aux points caractéristiques qu'il développe ensuite par écrit pour ce compte rendu.

Dès 1849 les manuels se rattachent à la catégorie C, et aujourd'hui encore c'est le système dominant dans l'enseignement mathématique des écoles moyennes autrichiennes; ce système est étroitement lié à l'enseignement graduel qui caractérise le plan d'études en Autriche.

Dans les trois années du degré inférieur l'enseignement a un caractère purement *propédeutique;* les notions et propositions sont presque exclusivement tirées de l'*intuition*; par cela même l'intuition en est fortifiée et les élèves sont ainsi amenés à dessiner, mesurer, construire des modèles. Ce n'est guère qu'exceptionnellement, (par exemple au sujet du théorème de Pythagore) que des déductions très courtes sont introduites.

Dans la quatrième année, où les élèves entrent vers 13 ou 14 ans, l'enseignement arithmétique débute par une exposition des lois régissant les opérations et des rapports des opérations entre elles. Le champ des études géométriques de cette classe comprend la planimétrie. A côté de l'intuition on introduit ici graduellement le raisonnement logique qui, surtout dans les dernières années, tend à prévaloir, sans toutefois supplanter complètement l'intuition. Les programmes officiels disent à ce sujet qu'en géométrie le raisonnement rigoureux ne doit être exposé complètement que pour quelques théorèmes isolés et qu'en arithmétique les notions sur les rapports des opérations entre elles seront obtenues au moyen des équations de condition.

Cela n'implique cependant aucunement qu'en géométrie il ne puisse être parlé d'axiomes ou qu'en arithmétique on doive exclure, par exemple, les principes à la base de l'addition, de la multiplication, etc. De la manière dont la notion de fonction et les éléments du calcul infinitésimal sont traités, il ressort nette-

ment que l'intuition joue un rôle également dans les degrés supérieurs. Ces notions sont en effet introduites en faisant un usage fréquent de la représentation géométrique. Le niveau de l'enseignement n'est cependant nullement rabaissé par l'importance marquée donnée à l'intuition ; il est aisé de s'en rendre compte par l'étude de la série de manuels autrichiens modernes (consulter les Rapports autrichiens, spécialement ceux qui concernent l'enseignement mathématique dans les écoles réales (fasc. 1), les gymnases (fasc. 3), ainsi que le rapport sur les manuels mathématiques (fasc. 5).

Le système C est d'ailleurs celui qui, mieux que tout autre, satisfait à la condition psychologique d'adapter constamment l'enseignement au développement intellectuel de l'élève. Au reste, il convient de mentionner que pour les écoles moyennes autrichiennes on insiste spécialement sur le fait que l'enseignement des mathématiques doit s'adapter à la force moyenne des élèves et non aux facultés de quelques élèves particulièrement bien doués pour les mathématiques.

M. Lietzmann nous adresse par écrit les renseignements qu'il n'a pu donner à la séance, faute de temps. — En *Allemagne* il n'est pas usage, comme dans la plupart des grands Etats, de répartir l'enseignement de la géométrie en deux cycles, dont le second part de nouveau des notions fondamentales. Il est vrai que le cours proprement dit est généralement précédé d'un enseignement propédeutique ; mais celui-ci est très court, de quelques semaines à un an. Les élèves commencent ainsi l'étude systématique à 11 ou 12 ans environ. Dans ces conditions — et c'est ainsi depuis plusieurs décades — l'enseignement doit nécessairement tenir compte du jeune âge des élèves et procéder suivant la méthode C. Toutefois les manuels, tout au moins les anciens, appartiennent presque tous aux catégories B_b et B_c. Ils procèdent d'une façon indépendante des chemins que suit la méthode d'enseignement, de manière à pouvoir encore être utilisés plus tard pour des retours en arrière. Dans ce but les fondements sont établis avec toute la rigueur possible dans ce domaine et les théorèmes sont développés le plus possible par la méthode déductive.

Tout récemment cependant on a fait paraître des ouvrages méthodiques qui s'adaptent davantage à l'enseignement donné et qui suivent par conséquent la méthode C. Cela tient à ce que l'on tend à étendre encore l'emploi de la méthode intuitive en tenant compte du développement psychologique de l'élève.

Dans tous les cas il faut faire remarquer que, dans les degrés supérieurs, on ne revient pas d'une manière systématique aux fondements, sauf quelques exceptions où l'on a essayé d'examiner quelques questions relatives aux fondements, par exemple l'indépendance des axiomes, En Allemagne les élèves terminent

de bonne heure (à 15 ou 16 ans) le programme de géométrie qui, dans la plupart des pays, est limité au champ des éléments d'Euclide. Pendant les deux ou trois dernières années ils abordent des domaines plus modernes, tels que la géométrie analytique et synthétique des sections coniques, la géométrie descriptive, etc.

Pour tout ce qui touche à la rigueur, il me semble qu'il faut attribuer une importance fondamentale à la question de l'enseignement par cycles, c'est-à-dire si l'on enseigne la Géométrie en un ou deux cours, ou même en trois, comme en France. Peut-être que le prochain congrès pourra examiner de plus près la question et étudier en même temps les raisons d'ordre psychologique.

Etats-Unis. — M. J.-W.-A. Young (Chicago), membre de la Sous-commission A, a bien voulu envoyer une Note fournissant des renseignements concernant les *Etats-Unis*. Les lecteurs la trouveront annexée à la fin du compte rendu de cette séance.

Remarques de M. F. Enriques. — Au sujet de la distinction établie entre le point de vue logique et le point de vue intuitif, M. Enriques croit qu'il convient d'appeler l'attention de la Commission sur la différence entre la méthode *intuitive* et la méthode *expérimentale*. Il est très remarquable que parmi les partisans de la méthode expérimentale se trouvent souvent des logiciens. C'est ainsi que — chez nous — le regretté Vailati était surtout adversaire de l'appel à l'intuition, mais il voulait d'un côté la rigueur logique, de l'autre côté le développement de véritables expériences géométriques. Dans la même situation se trouve peut-être en partie l'école de Peano. En Danemark, le traité de Bonnesen donne aussi un exemple remarquable de liaison entre une véritable rigueur logique et l'emploi de l'expérience. Il y a lieu de tenir compte de ces faits dans la classification proposée.

A. II. — La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.

Nous reproduisons ici le résumé rédigé par M. Ch. Bioche, rapporteur. Dans cet exposé l'auteur tient compte des remarques fournies par la discussion à laquelle ont pris part MM. Lietzmann, Lazzeri, Veronèse, Castelnuovo, d'Ovidio, Bourlet et Klein.

M. Bioche précise d'abord ce qu'on entend par les tendances *puriste* et *fusionniste*.

Les *puristes* évitent d'introduire en arithmétique la considération des grandeurs concrètes, et d'employer le calcul en géométrie; ils traitent séparément les questions de géométrie plane et celles de géométrie de l'espace; bref, ils séparent rigoureusement les divers domaines.

Les *fusionnistes,* au contraire, exposent la théorie des grandeurs proportionnelles en prenant des exemples géométriques ; ils utilisent les représentations graphiques en arithmétique ou en algèbre, et les formules de trigonométrie en géométrie ; ils n'attendent pas, pour aborder les questions de géométrie de l'espace, que tout le programme de géométrie plane soit traité.

On ne peut donner que des indications un peu vagues sur la question, non seulement parce qu'il y a une grande variété de programmes et de méthodes d'un pays à un autre, mais surtout parce que la fusion de deux matières d'enseignement peut être faite à des degrés très divers ; de plus, dans bien des cas, lorsque les programmes s'opposent plus ou moins complètement à une fusion, un certain nombre de professeurs regrettent cet état de choses et tâchent de faire de la fusion dans leur enseignement.

Enfin on peut pratiquer la fusion pour certaines matières sans la pratiquer pour d'autres. Je distinguerai donc différents cas, comme le proposent MM. Fehr et Lietzmann dans les deux lettres aux membres de la Sous-commission A pour préparer nos travaux.

a) *Algèbre, ou Arithmétique, et Géométrie.* Dans la plupart des pays il y a fusion ; notamment les représentations graphiques sont tres employées en arithmétique et en algèbre. En Allemagne, en Autriche et en Suisse on fait en outre de la Géométrie analytique pendant un an. Dans certains pays, l'Italie notamment, où la fusion n'est pas ordinairement employée, elle l'est cependant dans les écoles techniques (écoles réales).

b) *Planimètrie et Stéréométrie.* En général ces deux enseignements sont complètement séparés, sauf pour les classes de début, parce que les programmes s'y opposent. Mais on sait qu'il a paru de remarquables ouvrages de géométrie *fusionniste*, notamment ceux de M. Méray en France et de M. Lazzeri en Italie qui vient d'être traduit en allemand par M. Treutlein. En Allemagne il a paru déjà en 1844 un ouvrage fusionniste, celui de Bretschneider ; c'est sans doute le plus ancien.

Le livre de M. Méray[1], qui est resté longtemps presque inaperçu en France, a eu un grand succès ces dernières années ; il a été utilisé surtout dans les écoles normales primaires ou dans les écoles techniques. Les programmes de l'enseignement secondaire séparent nettement la géométrie plane et la gèométrie de l'espace pour les classes de IIe et de Ire C et D où se donne le premier enseignement logique de la géométrie.

Les *Elementi di Geometria* de M. Lazzeri[2] reproduisent les leçons faites par l'auteur aux élèves de l'Académie navale de Livourne.

---

[1] La 1re édition a paru en 1874.

[2] La 1re édition a paru en 1891 ; auparavant les leçons de M. Lazzeri avaient été lithographiées.

Ce livre, écrit sous l'entrave d'un programme officiel, fut approuvé par divers mathématiciens. La Société *Mathesis* provoqua une enquête d'où il résulta que les mathématiciens italiens étaient partagés en deux groupes presque égaux sur la question de la fusion. La société exprima, à l'unanimité, le vœu que les programmes fussent rédigés de façon à laisser les professeurs libres de suivre la méthode qu'ils jugeraient la meilleure. Des programmes rédigés dans ce sens par M. d'Ovidio parurent en 1900 et permirent des expériences de méthodes fusionnistes. Mais des programmes publiés quatre ans plus tard ont arrêté les essais déjà commencés.

c) *Planimétrie et Trigonométrie.* Dans la plupart des pays, il y a séparation complète entre ces deux matières. En France, au contraire, la fusion se fait : certains programmes mentionnent expressément des notions de trigonométrie au milieu d'un ensemble de questions relatives aux propriétés métriques.

d) *Stéréométrie et Géométrie descriptive*[1]. Ces enseignements sont en général séparés : quelquefois même ils ne sont pas donnés par le même professeur.

En *Autriche* l'enseignement de la Géométrie descriptive est associé à celui de la Géométrie dans l'espace, et utilisé pour ce dernier. M. Dintzl nous adresse sur cette question quelques renseignements complémentaires. Dans les *Realschulen* ce n'est que dans la IVe classe qu'il y a fusion entre le Dessin géométrique (cette matière n'est appelée Géométrie descriptive que dans les trois classes supérieures) et la Stéréométrie, puisque pour la théorie des projections les conceptions et les théorèmes de stéréométrie doivent nécessairement trouver place dans l'enseignement. Dans les classes supérieures, la Géométrie descriptive est une matière autonome et comme telle séparée de la Stéréométrie qui se trouve, dans la Ve classe, principalement consacrée à l'évolution des surfaces et des volumes. Il y a quelque chose de semblable dans les *Realgymnases* dans lesquels la Géométrie descriptive n'est enseignée que pendant deux ans, et en même temps est séparée de la Stéréométrie dans la Ve classe. Sans doute il doit y avoir entre les deux matières, dans les classes citées, une étroite dépendance. Mais on n'a pas encore une longue expérience puisque les Realgymnases sont nés en 1907. Au *Gymnase* on peut parler d'une fusion puisqu'on illustre l'enseignement de la Stéréométrie par des projections parallèles en plan et élévation, ou des projections obliques de corps simples. Cependant cet enseignement ne tire pas davantage parti du dessin stéréométrique pour ce qui est l'objet de la Géométrie descriptive dans les Realgymnases et les Realschulen.

---

[1] En Italie l'enseignement de la Géométrie descriptive ne se donne, d'une manière systématique, qu'aux Universités ou dans des écoles techniques supérieures.

e) *Géométrie synthétique et Géométrie analytique des coniques.* On trouve tous les modes imaginables relativement à cette question.

En Autriche, par exemple, on étudie analytiquement les coniques. En France, on les étudie synthétiquement, tout en établissant les équations réduites; c'est généralement en utilisant l'équation réduite de l'ellipse qu'on démontre que cette courbe est projection orthogonale du cercle. En Angleterre, on fait une étude synthétique et une étude analytique séparées.

En Allemagne on étudie les coniques synthétiquement et analytiquement, en général d'une manière séparée, dans les derniers temps souvent ensemble. En Italie, les coniques sont étudiées seulement dans les instituts techniques (Oberrealschulen), en les regardant comme sections du cône de rotation.

Il peut être intéressant de faire la remarque que c'est surtout dans les enseignements techniques que se pratique la fusion de divers enseignements.

ANNEXE

Rapport adressé à la Sous-commission A

par J. W. A. Young (Chicago).

Introduction. — Je traiterai les questions proposées en partie en me plaçant au point de vue du sujet mathématique et de l'âge de l'élève, sans prendre en considération les conditions spéciales de nation ou d'organisation éducative, et en partie en me plaçant au point de vue des conditions locales d'Amérique. Relativement à ce dernier point, il est nécessaire de rappeler très brièvement certains caractères de l'organisation américaine qui doivent être pris en considération pour savoir si les procédés mis en évidence dans les questions proposées sont praticables ou non dans les conditions américaines.

Alors qu'en Allemagne ou en France, l'élève passe neuf années dans un même établissement *(gymnase, lycée)* sous le même corps enseignant, les maîtres de mathématiques étant tous préparés à l'enseignement des parties les plus avancées du programme, et travaillant tous vers un même but, en Amérique, ces neuf années sont réparties entre *trois différents types d'établissements*, ayant des buts différents, une organisation différente, des méthodes différentes et des maîtres différents, de préparation mathématique très différente.

Cinq années (entrée minimum normale de 9 à 13 ans inclus) se passent dans les écoles élémentaires (Elementary Schools). On y enseigne l'arithmétique (Rechnen, calcul), un peu de géométrie d'observation et la mesure des figures géométriques. Le maître (presque toujours une maîtresse) a rarement poussé sa préparation mathématique au delà d'une année d'algèbre élémentaire et d'une année de géométrie, et souvent même pas si loin. Cet unique maître, du reste, enseigne également les autres branches d'étude et n'a pas d'aptitude ou de préparation spéciale pour enseigner l'arithmétique plutôt que l'anglais, l'histoire, la géographie, etc.

Trois années (entrée minimum normale de 14 à 16 ans) se passent à l'école supérieure dite *High School*. Ici, l'algèbre élémentaire (équations du second degré) et la géométrie plane et de l'espace sont enseignées par un maître (probablement dans la majorité des cas une maîtresse) dont la préparation mathématique n'a pas dépassé, à part quelques rares exceptions, un cours d'une année sur le calcul différentiel et intégral *(calculus)* et le plus souvent ne va même pas jusque là. L'enseignement des mathématiques se fait par un spécialiste dans ce domaine, ou bien par un maître pouvant enseigner les mathématiques et un autre sujet — comme par exemple la physique, — quoiqu'il arrive souvent que des classes mathématiques sont confiées à des maîtres dont les spécialités sont des sujets n'ayant aucune relation avec les mathématiques.

Une année (entrée minimum normale 18 ans [1]) se passe au *collège*. Ici, les compléments d'algèbre, la trigonométrie, les éléments de géométrie analytique et quelquefois d'analyse sont enseignés par un professeur (presque toujours un maître, excepté dans les collèges de jeunes filles) qui, dans les meilleurs établissements possède souvent le titre de docteur en mathématiques.

Par ce bref aperçu, on se rend facilement compte que les questions de savoir si une transformation est désirable théoriquement et si cette transformation est réalisable pratiquement, peuvent recevoir, si l'on se place dans les conditions de l'Amérique, des réponses tout à fait différentes.

A. — *L'influence de l'exposition systématique des mathématiques dans l'instruction secondaire.*

I. — *Jusqu'à quel point, dans quelle mesure peut-on tenir compte, dans les écoles moyennes de l'exposé systématique des mathématiques ?*

J'expliquerai tout d'abord sur quelle interprétation des termes de la question ma réponse est basée. Par « écoles moyennes » j'entends les neuf années mentionnées ci-dessus. Par « exposition systématique des mathématiques » j'entends leur présentation

[1] L'école supérieure (High School) comprend quatre années, mais l'élève ne fait généralement pas de mathématiques durant la quatrième année.

méthodique *(formal)*, de façon à placer en première ligne leur organisation logique et à présenter en une suite convenable un enchaînement complet de définitions, d'axiomes et de théorèmes. Et finalement, j'entends que « tenir compte » ne concerne pas seulement l'« exposition systématique » proprement dite qui se fait en classe même et qui est relative au domaine des mathématiques, mais aussi l'influence indirecte que de telles expositions pratiquées ailleurs dans la sphère d'influence du professeur (par exemple dans les conférences universitaires et dans les publications) peuvent avoir sur l'instruction secondaire.

Dans ce dernier ordre d'idée, le travail de l'école moyenne peut et devrait tenir compte d'une façon complète de l'exposition systématique des mathématiques. Lors de sa préparation académique, le professeur devrait non seulement s'être rendu maître de l'exposition systématique de nombreux domaines des mathématiques supérieures, mais aussi de l'exposition systématique et critique du champ entier du programme secondaire, en même temps que des sujets de mathématiques supérieures qui s'y rapportent. Le premier genre d'exposition systématique a toujours été amplement fourni par les universités, et il est heureux de constater que des cours concernant le second genre d'exposition systématique commencent à s'introduire dans diverses universités. Puisse leur nombre augmenter rapidement! La grande majorité des étudiants en mathématiques de l'université (du moins en Amérique) deviennent plus tard maîtres dans l'enseignement secondaire tel qu'il a été défini plus haut, et bénéficieront grandement d'une exposition systématique de la construction logique des divers domaines des mathématiques secondaires, présentée avec toute la largeur de vue et la perspicacité voulues du professeur universitaire. Naturellement, je n'ai en vue ici que le côté théorique, sans penser à des questions méthodiques ou didactiques (quoique l'université, à mon avis, pourrait bien s'occuper également de questions de ce genre, du moins incidemment.

Une fois le maître à son travail d'enseignement, il devrait se tenir au courant des progrès concernant le côté systématique de son domaine. Ici également, l'université peut être d'une grande utilité, soit par des cours concernant l'enseignement, destinés aux maîtres de l'enseignement secondaire et que ceux-ci pourront suivre dans les heures disponibles, soit par des publications ayant pour but de les tenir au courant de ce qui se fait. Il est encourageant de remarquer qu'à cet égard aussi, il existe de nombreux exemples excellents, bien dignes d'émulation.

Admettons donc que le maître possède lui-même une préparation systématique complète et actuelle des sujets qu'il enseigne, occupons-nous maintenant de la façon dont cette connaissance devrait affecter son enseignement.

Il va sans dire que son enseignement devrait être construit sciemment sur un système logique, un squelette bien articulé supportant l'organisme mathématique ; mais il ne s'ensuit pas que l'élève devrait avoir conscience de ce squelette supportant le corps de la doctrine mathématique, telle qu'elle est exposée dans les établissements secondaires, pas plus qu'il n'est conscient du squelette supportant le corps de son propre maître. Les enfants peuvent facilement s'effrayer si on leur présente prématurément un squelette. L'organisation systématique est un événement relativement tardif dans le développement scientifique. Tout d'abord, les faits concrets sont acquis ; puis, de ces faits concrets, on déduira le corps de doctrine, sous la forme de théorèmes plus ou moins isolés ; finalement, le corps de connaissance abstraite est organisé en une entité systématique.

Par conséquent, il semble que les débuts devraient se faire d'une façon concrète, aussi bien dans l'enseignement secondaire en général que dans le travail d'une année particulière ou dans l'exposition d'un sujet spécial quelconque ; les procédés abstraits (abstraits relativement à la maturité et au degré d'avancement de l'élève) n'apparaissant que pour éviter de trop nombreuses répétitions concernant des exemples concrets essentiellement pareils. Le but de l'enseignement de la classe n'est pas de faire des mathématiques abstraites, mais plutôt des mathématiques présentant par-ci par-là des procédés *abstraits*. Herbert Spencer a fait remarquer très justement (*Education,* chap. II) que « les hommes s'imaginent que les formules générales inventées par eux pour exprimer des groupes de détails et qui simplifient leurs conceptions par la représentation de plusieurs faits par un seul, que ces formules doivent également simplifier les conceptions d'un enfant. Ils ont oublié qu'une généralisation n'est simple qu'en comparaison de tout l'ensemble des vérités particulières qu'elle comprend, qu'elle est plus complexe que l'une quelconque de ces vérités prise séparément... et que, pour un esprit ne possédant pas ces vérités particulières, elle est un mystère. Confondant ainsi deux genres de simplification, les maîtres se sont constamment trompés en débutant par les « premiers principes ». »

En se plaçant au point de vue de l'élève, l'organisation systématique est un résultat plutôt qu'un point de départ de l'enseignement, et, tandis qu'il poursuit son programme d'année en année, sa maturité croissante et ses connaissances mathématiques de plus en plus étendues lui fournissent de mieux en mieux la base nécessaire à l'organisation formelle de cet ensemble de faits en un système cohérent.

Nous devrions peut-être considérer également la question en donnant simplement à l'« exposition systématique » l'interprétation beaucoup plus étroite d'une exposition de laquelle l'intuition

est rigoureusement exclue, et où le corps de doctrine complet est construit sur un ensemble de définitions et de postulats formulés explicitement.

Pour ce qui concerne l'enseignement secondaire, il ne me semble pas bon d'essayer d'en exclure l'intuition, quel que soit le degré d'avancement auquel on est parvenu ; ou de restreindre ou d'entraver d'une façon quelconque la liberté d'avoir recours à l'intuition. Les recherches de caractère non-intuitif qui se sont faites durant ces dernières dizaines d'années ont eu, il est vrai, une importante répercussion sur l'enseignement secondaire, et, par conséquent, le maître devrait avoir pris connaissance de leurs résultats généraux et les avoir étudiées d'une façon suffisamment détaillée pour en avoir saisi l'esprit. Mais cette répercussion n'est pas de nature à justifier un usage moins fréquent de l'intuition en classe et une tendance plus effective à la rigueur formelle; tout au contraire. Le maître n'a qu'à examiner par exemple une suite de postulats indépendants de la géométrie plane, pour se rendre compte qu'il serait absolument impraticable de les présenter en classe. Il y trouvera des axiomes et des théorèmes qui jusqu'alors ont été tacitement acceptés en classe et qui sont si évidents intuitivement que leur mention en classe ne ferait que désorienter l'élève.

Par exemple[1] :

« Les termes non définis sont « point » et « ordre ».

Axiome I. Il existe au moins deux points distincts.

Axiome II. Si des points A, B, C sont dans l'ordre ABC, ils sont dans l'ordre CBA.

Axiome III. Si des points A, B, C sont dans l'ordre ABC, ils ne sont pas dans l'ordre BCA.

Théorème 1. Si des points A, B, C sont dans l'ordre ABC, ils ne sont pas dans l'ordre CAB. (Preuve par les axiomes II et III).

Théorème 2. L'ordre ABC implique que A est distinct de B, et B de C.

Théorèmes subséquents.

Théorème 5. Si DE est une ligne, il existe un point F non situé sur cette ligne.

Théorème 6. Entre deux points distincts quelconques il existe un troisième point.

Ces axiomes et ces théorèmes sont cités pour montrer combien les propositions, dont on peut déduire toutes les autres, sont peu nombreuses et simples, et combien la campagne qui doit être menée, même à l'heure actuelle, contre cette idée « de ne pas admettre sans démonstration ce qui peut être prouvé » est futile. Ils montrent clairement qu'il est impraticable d'énumérer en géo-

[1] Veblen, *Trans. Am. Math. Soc.*, 1904, p. 343 et suiv.

métrie élémentaire tous les axiomes qui y sont en usage, et que ces derniers ne doivent pas être réduits à ceux qui sont indémontrables par le moyen des autres. Il ne faut même pas chercher de preuves pour justifier la validité de ces axiomes. Il est suffisant qu'ils soient valides relativement à la géométrie concrète du monde qui nous entoure; et, du reste, ce sont des vérifications spéciales de ce genre qu'utilisent en guise de preuve, les auteurs sur ce sujet, pour établir la validité et l'indépendance de leurs axiomes. Les récentes recherches sur les axiomes condamnent, une fois pour toutes, tout espoir d'enseigner à l'enfant une géométrie logiquement parfaite dans laquelle tous les résultats sont déduits d'un ensemble de principes fondamentaux irréductibles, et avec cet espoir disparaît la raison d'adhérer plus longtemps à cette apparence d'un tel système déductif rigoureux.

Le maître qui comprendra la juste portée de ces recherches, accordera pleine liberté à l'intuition, acceptant sans démonstration tout ce qui est suffisamment évident par intuition ; il acceptera tacitement quelques-uns de ces postulats ou axiomes, il en citera d'autres à titre d'informations, en les faisant précéder d'un « sans doute » ou d'un « il est évident que », enfin il en présentera peut-être encore quelques-uns d'une manière formelle, en tant qu'« axiomes ». Il débutera par des théorèmes suffisamment compliqués pour nécessiter une démonstration aux yeux de l'élève, il s'écartera à volonté des formes traditionnelles, fera librement usage du mouvement (superposition, translation parallèle, rotation autour d'un point ou d'un axe) dans les définitions ou démonstrations, chaque fois qu'il sentira qu'en opérant ainsi il simplifie les choses, et, dans tout cela, il ne s'effrayera pas du fait que son système pourra présenter une certaine redondance, mais il se déclarera satisfait à la pensée que les démonstrations qu'il aura données dans son enseignement seront de véritables preuves, aussi bien comme étant des conséquences légitimes de l'ensemble des propositions primitivement admises, que comme assurant l'élève de la justesse de propositions qui ne lui sont pas autrement évidentes.

Passant aux questions secondaires, il semble inutile d'ajouter quelque chose aux questions *a), b), c)*. Relativement à la question *d)*, j'ajouterai qu'en ce qui concerne l'Amérique, les maîtres (exceptés ceux qui enseignent dans les collèges) n'ont eux-mêmes qu'une faible connaissance des développements modernes des mathématiques, et par conséquent, ces idées n'ont pas encore eu d'influence bien marquée sur l'enseignement secondaire du pays en général. Il existe cependant un fort contingent, toujours croissant, de maîtres qui profitent des facilités qui leur sont offertes par les cours d'été des universités et collèges, par les assemblées des diverses associations de maîtres, et par les livres et publications périodiques, pour approfondir leurs connaissances

mathématiques et pour se mettre en contact avec les idées modernes.

Deux propositions, en outre, qui ont été présentées dans les discussions récentes, quoique ne concernant pas des développements mathématiques absolument modernes, ont été acceptées avec approbation. L'une d'elles est relative à la plus grande attention à accorder aux applications des mathématiques aux sciences physiques et à la vie pratique, et l'autre à la plus grande importance à attribuer à la notion de fonction (y compris la représentation graphique des fonctions sur papier quadrillé).

II. *La question de la fusion des différentes branches mathématiques dans l'enseignement moyen.*

Conformément à la circulaire de M. H. Fehr, secrétaire-général, j'examinerai les cas suivants :

a) *Algèbre et géométrie.* — En Amérique, l'enseignement de ces deux branches a été et est encore l'extrême opposé d'une fusion. Les sujets sont enseignés dans des années séparées, et lorsqu'on étudie l'un, l'autre est complètement laissé de côté. L'algèbre est généralement commencée dans la première année de l'école supérieure *(High School)* (la sixième année de la période de neuf années désignée plus haut par le terme de « moyenne ») et est enseignée durant toute cette année. L'année suivante la géométrie plane est commencée et achevée. On y fait aucun usage des connaissances algébriques acquises l'année précédente. L'année d'après on reprend l'algèbre pour un semestre et pendant le second semestre on étudie la géométrie de l'espace toute entière. L'enseignement de l'algèbre ignore les connaissances de géométrie plane de l'élève et l'enseignement de la géométrie de l'espace, de même, ne tient pas compte de ses connaissances algébriques. Durant ces dernières dix années environ, quelques établissements se sont écartés du plan d'étude qui vient d'être cité et ont fait diverses tentatives de fusionner le programme d'algèbre et de géométrie des deux premières années de l'école supérieure *(High School)* (la sixième et la septième année de la période « moyenne ») en un cours unique et « cohérent » de « mathématiques ». Ce travail de fusionnement en est encore à sa période expérimentale et il serait trop tôt de parler de son introduction probable dans l'enseignement.

L'enseignement simultané de l'algèbre et de la géométrie, à la place de leur enseignement successif, a été également proposé, mais n'a été entrepris jusqu'à présent que par un très petit nombre d'établissements[1]. Il me semble que ce devrait être la prochaine démarche à entreprendre par les *High Schools* améri-

[1] Je pourrais ajouter qu'étant donné l'absence générale de législation centrale, il est possible pour la grande majorité des écoles d'introduire une transformation de ce genre dès qu'elles le désirent.

caines. Cette juxtaposition des deux branches est facilement réalisable dans les conditions actuelles, et rendrait possible la plupart des fusions désirables, sans exiger la complète réorganisation du travail que nécessiteraient ces dernières.

Personnellement, je ne puis, quant à présent, m'enrôler parmi les avocats de la fusion. Je crois fermement que l'enseignement simultané de l'algèbre et de la géométrie est préférable à leur enseignement séparé tel qu'il a lieu en Amérique. L'expérience du monde en général justifie amplement cette façon de penser et il est inutile de discuter la question ici. Un enseignement simultané offre la possibilité de faire un fréquent usage des méthodes de l'une des branches dans l'étude des questions qui se présentent dans l'autre branche, et l'on devrait s'efforcer, spécialement en Amérique, de faire usage de ces possibilités. J'aimerais qu'on enseigne ces deux branches comme deux domaines coordonnés des mathématiques, pouvant mutuellement se rendre des services, et je pense que le mur impénétrable qui les a si longtemps séparées en Amérique devrait être abattu, ou qu'on y ménage des portes en quantités suffisantes pour qu'il soit possible de passer à volonté d'un domaine dans l'autre. Mais, la disparition du mur ne changera pas le caractère essentiel des domaines. Si l'un de ces domaines était une plaine et l'autre une colline, ils resteraient ce qu'ils étaient, une fois le mur abattu. S'ils sont suffisamment peu élevés, il sera peut-être possible de les graduer tous deux en une pente uniforme, mais une pareille uniformité pourrait ne pas être désirable même en cas de possibilité.

Il me semble que les domaines de l'algèbre et de la géométrie sont essentiellement différents, aussi bien dans le fond que dans la méthode, et que ces différences sont suffisantes pour exclure la possibilité d'une fusion des deux en un tout unique qui ne serait ni de l'algèbre ni de la géométrie, mais une combinaison réelle des deux. Du reste, même en admettant la possibilité, cette fusion ne m'apparait pas comme désirable. Ce serait une perte réelle, si quelqu'un réussissait à fusionner ces deux domaines et méthodes de pensée, chacun si vivant et si bien caractérisé, en une combinaison neutre. Je veux bien que mon roast beef et mon dessert me soient servis dans un même dîner, mais je ne désire nullement qu'on les mélange en un seul mets.

b) *Planimétrie et stéréométrie ;*

c) *Planimétrie et trigonométrie ;*

d) *Stéréométrie et géométrie descriptive.* — Je n'ai pas étudié avec suffisamment d'attention la question de la fusion de ces couples de branches pour pouvoir donner beaucoup de renseignements importants sur ce sujet. A ma connaissance, aucune tentative sérieuse concernant des fusions de ce genre n'a été faite en Amérique, et quelque importants que soient leurs mérites théo-

riques, il serait encore prématuré de les introduire dans ce pays. Pour un Américain, la question de savoir si la fusion de ces branches est désirable ou non, est d'un ordre entièrement abstrait, c'est pourquoi cette question devra probablement laisser la place à d'autres, concernant des transformations qui pourraient être entreprises plus rapidement en cas de besoin. Au point de vue abstrait, et en me basant sur des considérations d'ordre fortuit, je ne suis nullement convaincu qu'il soit désirable de fusionner ces sujets durant les premières années.

Ce serait cependant une excellente idée de reunir, dans les leçons de géométrie dans l'espace, différents groupes de théorèmes analogues de géométrie plane et de l'espace. Ceci pourrait se faire à la fin du cours de géométrie dans l'espace, lors d'un résumé et d'une revision des deux sujets.

Il serait aussi avantageux peut-être de définir les fonctions trigonométriques d'angles aigus lors de l'étude des triangles rectangles semblables, et d'introduire l'usage des tables des valeurs naturelles de ces fonctions à propos de la résolution des triangles rectangles. On pourra ensuite généraliser les définitions au cas d'angles obtus, démontrer géometriquement les formules nécessaires pour la résolution des triangles quelconques, et les utiliser à la résolution de problèmes simples. Lorque l'algèbre et la géométrie sont enseignées simultanément, on pourra commencer l'étude des logarithmes en algèbre, un peu avant l'étude des fonctions trigonométriques, ce qui permettra également de faire usage des tables trigonométriques relativement à ces fonctions. Cette mesure concernant l'étude des fonctions trigonométriques semble être avantageuse comme venant compléter le programme de géométrie plane, mais je suis loin d'être un ardent partisan de l'introduction trop rapide des parties plus générales du sujet, comme par exemple la définition des angles positifs et négatifs de grandeur quelconque et des fonctions trigonométriques de ces angles, la démonstration générale des relations entre les fonctions d'x et celles des angles du type $\frac{n\pi}{2} + x$, les formules d'addition et leurs conséquences, etc. Il serait plus prudent de réserver cette partie qui est généralement enseignée sous le titre de « trigonométrie » pour la dernière année par exemple de la période moyenne.

e *Géométrie synthétique et Géométrie analytique des sections coniques.* — A ma connaissance, aucune tentative de fusionnement de ces deux genres d'étude n'a été faite en Amérique. On est généralement d'avis, semble-t-il, que le développement de la nouvelle méthode de géométrie analytique est de première importance et qu'elle serait gênée plutôt que facilitée si l'on traitait egalement les problèmes par les méthodes synthétiques familières

aux étudiants. En Amérique, les élèves de géométrie analytique ont rarement au-dessous de dix-huit ans et souvent au-dessus de vingt, et possèdent une puissance d'attention et de concentration suffisamment bien développée pour poursuivre avantageusement une étude prolongée en se servant uniquement de la géométrie analytique. Il serait intéressant cependant d'examiner si un cours quelconque de géométrie synthétique, par exemple sur les sections coniques, ne pourrait pas être introduit dans les *Colleges* d'Amérique. Actuellement, le programme d'algèbre de la *High school* est continué au *College* par des cours d'algèbre, sur la théorie des équations, etc. mais on n'y trouve pas de suite correspondante pour le programme de géométrie synthétique élémentaire, de sorte que l'étudiant qui, même après avoir étudié passablement de mathématiques, sort du *College* ou de l'université pour enseigner les mathématiques dans une *high school* se rend compte que ses connaissances algébriques se sont accrues lors de son travail de collège, mais qu'il n'en est pas de même pour ses connaissances de géométrie synthétique élémentaire, et il se trouve comme maître à la tête d'une classe en ne possédant du sujet qu'il va enseigner que ce qu'il avait lui-même appris comme élève, dans une classe analogue.

f) *Calcul différentiel et calcul intégral.* — Des tentatives de fusionnement de ces deux sujets, jusqu'à des limites variables, ont été faites en Amérique, mais pas, à ma connaissance, d'une façon décisive. Je présume qu'il en est peu qui favoriseraient le fusionnement le plus étroit possible, c'est-à-dire l'introduction dès le début les trois concepts fondamentaux du Calcul — la dérivée, l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie — et en traitant si possible chaque problème pour la première fois en partant de l'un de ces points de vue. Par contre, il en est peu également qui favoriseraient l'autre extrême, c'est-à-dire une étude prolongée et détaillée du calcul différentiel avant même d'introduire les éléments du calcul intégral. Après avoir expérimenté diverses possibilités, je procède actuellement comme suit : tout d'abord, dans le calcul différentiel, différentiation des fonctions usuelles et leurs combinaisons par les opérations usuelles, dérivées successives de quelques fonctions simples de ce genre, représentation graphique de courbes (en se servant de la première et de la seconde dérivée), maxima et minima, développements simples par les formules de Maclaurin et de Taylor avec applications faciles. On continue par une étude simple de l'intégrale indéfinie, puis, par un bref examen de l'intégrale définie. En Amérique, le degré de maturité des élèves qui étudient le calcul différentiel et intégral est tel que cette étude du problème inverse se fait en corrélation suffisamment étroite avec le problème direct pour permettre la complète utilisation de leurs relations mutuelles, alors que leur

esprit n'est pas désorienté par de fréquents abandons et reprises de sujets non terminés, mais est satisfait par une étude plus ou moins complète de chaque sujet. J'ai trouvé que cette distribution était en général plus satisfaisante que mes tentatives de fusionnements plus complets.

(Traduction de M. J.-P. Dumur, Genève.)

V. — TROISIÈME SÉANCE

Mercredi 20 septembre, à 9 h. du matin.

Ordre du Jour :

I. L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles. — Rapport de la Sous-commission B. — Discussion.
II. Les travaux de la Commission au Congrès de Cambridge.

I. — L'enseignement mathématique théorique et pratique destiné aux étudiants en sciences physiques et naturelles.

M. Timerding, qui a été chargé par la Sous-commission B de présenter le rapport général concernant cet objet, veut bien faire son exposé en français ; en voici son propre résumé :

Je préciserai d'abord les catégories d'étudiants dont il sera question aujourd'hui. Il s'agira non pas des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs pour lesquels les études mathématiques doivent former le centre et la base de leurs connaissances, mais des étudiants pour lesquels ces études ont en quelque sorte un caractère accessoire. Pour ceux-ci elles ne prennent une certaine importance que pour quelques parties de leurs occupations. Le nombre de ces professions est très grand et il nous paraît utile d'en faire tout d'abord une liste.

Une telle énumération doit tenir compte de l'ordre naturel et des relations mutuelles entre les différentes professions ainsi que de leurs rapports plus ou moins intimes avec les mathématiques. De cette sorte on verra dès le commencement, quels problèmes ces professions offrent à l'enseignement mathématique.

Comme Gœthe l'a dit, notre vraie tâche consiste à formuler les problèmes, non à les résoudre. C'est ce que j'essaierai dans notre cas.

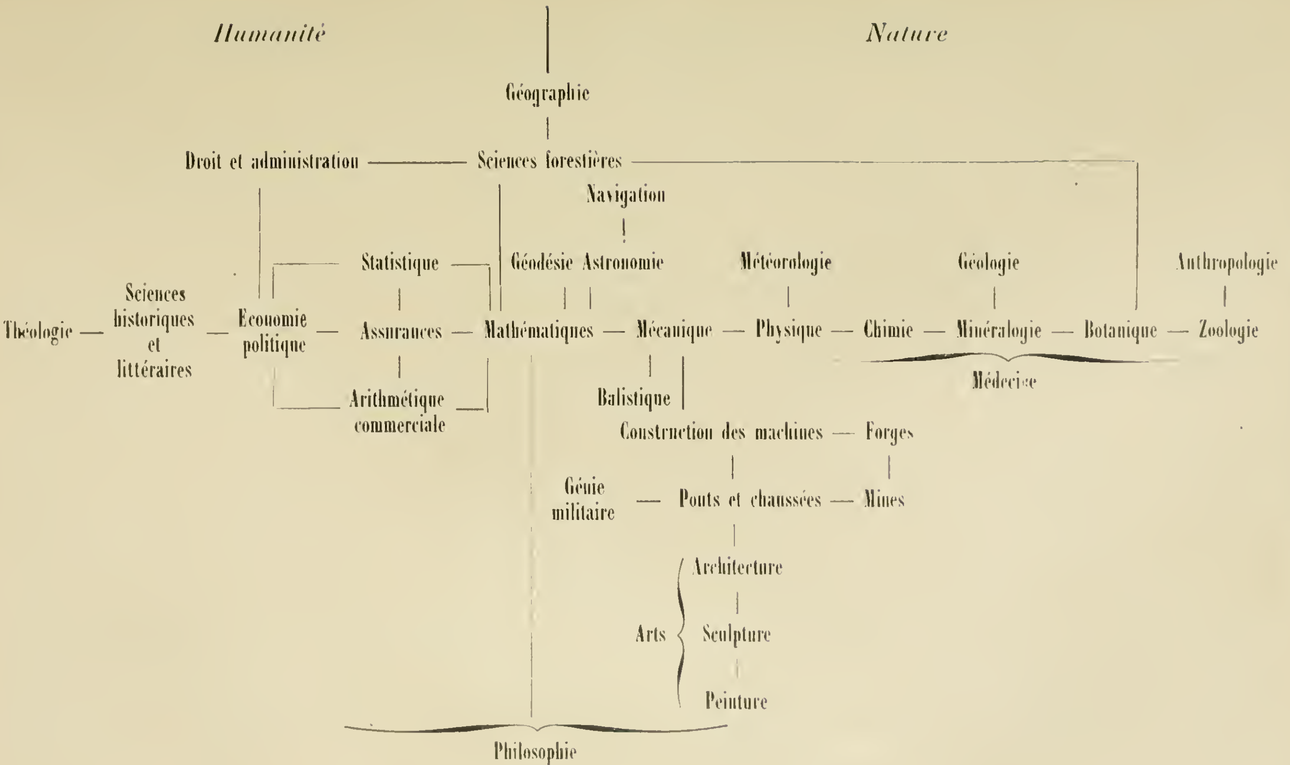
Pour pouvoir mieux m'expliquer je veux me servir d'une représentation graphique, d'une espèce d'arbre généalogique des connaissances humaines. Je commencerai en divisant par un trait vertical toute la surface de cette table en deux parties égales qui nous serviront à représenter les deux côtés qu'on peut distinguer dans toutes nos connaissances. Celles-ci se rapportent ou à la *nature* ou à l'*humanité*, ce seront là les deux parties de notre tableau.

Si je donne maintenant aux mathématiques une position centrale, ce n'est pas seulement par partialité pour la science qui nous réunit ici. Les mathématiques ont été presque toujours reconnues comme la science des premiers éléments de l'entendement humain et elles sont par conséquent la science fondamentale par laquelle on doit commencer l'énumération que nous voulons donner. Elles n'appartiennent ni entièrement au côté de la nature, ni à celui de l'humanité ; elles forment plutôt un lieu neutre ou si l'on veut un passage entre ces deux côtés.

Nous attacherons ensuite aux mathématiques la série des sciences naturelles. Ce sera d'abord la mécanique, puis la physique et après elle la chimie, la minéralogie, la botanique et la zoologie. A la physique on joindra encore la météorologie et à la minéralogie sera réunie la géologie. Le rapport entre ces sciences est en général tel que chacune d'entre elles influence celles qui la suivent dans la série. Mais on trouvera encore beaucoup d'autres relations entre elles que nous ne pouvons pas citer ici.

On peut placer ensemble la zoologie et l'anthropologie. Quant à la médecine nous devons la considérer comme une science pratique qui est en contact intime avec toutes les sciences naturelles. A la mécanique nous pourrons rattacher encore une autre série de sciences et de professions qui se rapprochent déjà plus du côté de l'humanité que ne le font les sciences naturelles proprement dites, qui sont même à la base de notre civilisation: Je veux parler des sciences techniques. La première d'entre elles s'occupe de la construction des machines. Celle-ci se rattache non seulement à la mécanique, mais aussi à la physique : il faut penser surtout à l'électrotechnique, et aussi à la théorie des machines à vapeur. On ajoutera ensuite la construction des voies de communications : ponts, chaussées et chemins de fer. De là il n'y a qu'un pas à l'architecture ; de celle-ci on passera à la sculpture, à la peinture et l'on entrera ainsi dans le domaine de l'art. On trouvera encore ici des relations nombreuses qu'il serait difficile d'épuiser. Comme seul exemple je citerai le lien direct que la perspective constitue entre les mathématiques et la peinture.

A la mécanique on pourra ajouter encore une science spéciale, la balistique qui s'y rattache directement. En parlant de l'artillerie, on pensera aussi aux fortifications : mais le génie mili-


Humanité
Nature
Géographie
Droit et administration
Sciences forestières
Navigation
Statistique
Géodésie
Astronomie
Météorologie
Géologie
Anthropologie
Théologie
Sciences historiques et littéraires
Économie politique
Assurances
Mathématiques
Mécanique
Physique
Chimie
Minéralogie
Botanique
Zoologie
Médecine
Arithmétique commerciale
Balistique
Construction des machines
Forges
Génie militaire
Ponts et chaussées
Mines
Arts
Architecture
Sculpture
Peinture
Philosophie

taire entre presque entièrement dans la construction des ponts et chaussées que j'ai déjà citée.

Je dois nommer encore la technique des mines et des forges qui forme une science à elle, quoique très rapprochée de la construction des ponts et chaussées d'une part et de la construction des machines d'autre part.

Mais il y a encore d'autres sciences qui se rattachent très étroitement aux mathématiques. Ce sont avant tout la géodésie et l'astronomie. Naturellement ces dernières sont en outre liées à la mécanique et à la physique aussi bien qu'entre elles. La géodésie se continue directement par la géographie; celle-ci touche à un grand nombre de sciences, elle appartient en parties égales au côté de la nature et au côté de l'humanité, et on la divise à ce point de vue en géographie physique et géographie politique. Nous avons encore une espèce d'appendice et d'application de l'astronomie dans la navigation qui s'approche aussi de la géographie. De plus les mathématiques trouvent une application très curieuse dans la science forestière que nous pourrons placer aussi bien du côté « Administration » que du côté « Nature ».

J'ai nommé maintenant les sciences principales qui se trouvent du côté de la nature et je passerai au côté de l'humanité. Mais ici je dois me borner à celles des sciences qui montrent un rapport direct avec les mathématiques. Ce sont la statistique, la théorie des assurances et l'arithmétique commerciale. Derrière elles il y a la vaste région de l'économie politique. On a voulu trouver aussi pour celle-ci des rapports directs avec l'analyse mathématique. Ces rapports sont très intéressants; on pensera d'abord au calcul des probabilités dans lequel on a cru une fois trouver un moyen pour régler les actions humaines d'après des lois arithmétiques, mais tout cela a été soumis dans notre temps à une critique sévère, les calculs qu'on peut faire s'appuient nécessairement sur certaines idées qui ne sont pas généralement acceptées.

Les différentes sciences que nous avons représentées dans notre tableau sont liées entre elles — répétons-le encore une fois — d'une manière bien plus compliquée que nous ne pouvons le rendre visible. Aussi notre tableau est bien loin d'être complet et même d'être exact sous tous les rapports. Il partage ainsi le sort de toutes les images symboliques. Je veux mentionner par exemple une branche très essentielle de notre civilisation moderne que je n'ai pas encore nommée : ce sont les postes et télégraphes. Les connaissances qu'elle exige appartiennent aussi bien à la technique physique qu'à l'économie politique; et elle est encore étroitement liée à la géographie; la législature et la politique y jouent aussi un rôle important.

Ayant parlé jusqu'à présent des *matières* je dois dire aussi deux

mots sur les *méthodes*. Dans les parties à droite de notre tableau c'est l'observation des phénomènes de la nature qui remplace la déduction mathématique, dans les parties à gauche c'est au contraire la connaissance des faits d'histoire et des institutions humaines qui sert de base à l'étude des sciences sociales. On voit ainsi que les mathématiques se trouvent au centre d'un grand courant qui traverse les domaines de l'induction : d'une part l'induction expérimentale et d'autre part l'induction historique. Le courant lui-même appartient à la déduction. Mais la métaphore n'est pas exacte. Il ne s'agit pas précisément d'un seul courant entre deux bords bien marqués, mais il sort de ce courant un grand nombre de ramifications ou plutôt le courant dépasse ses bords et inonde les champs voisins, car la déduction joue un rôle important dans toutes les sciences. Au milieu du courant on ne doit pas seulement placer les mathématiques, mais aussi la philosophie. Mais il faut remarquer que la philosophie n'est pas comme les mathématiques une science limitée à des objets bien définis, elle s'étend plutôt à toutes les connaissances humaines et forme pour ainsi dire l'ensemble de tout ce que ces connaissances contiennent d'éléments déductifs. Les mathématiques elles-mêmes pourraient être décrites comme l'infiltration d'un suc spécial dans l'eau pure de la déduction générale.

Or chez nous en Allemagne la tendance générale est qu'on s'oppose à cette infiltration. C'est là la grande tendance *a*mathématique ou *anti*mathématique qui s'est fait remarquer partout très fortement pendant les dernières années. L'opposition s'avance des deux côtés de notre tableau vers le milieu, elle s'élève aussi bien du côté expérimental que du côté historique. On peut dire qu'on s'efforce de se passer des mathématiques partout ou cela est possible et de les réduire à un minimum où elles sont indispensables. La réaction des méthodes expérimentales part autant des naturalistes que des ingénieurs. Parmi les derniers il y en a même quelques-uns qui veulent qu'on ne transmette à l'étudiant des sciences techniques qu e des formules toutes prêtes à l'usage sans l'incommoder en aucune sorte avec leur déduction.

D'autre part l'étude du droit et de l'administration jouit de la plus haute considération dans tout l'enseignement qui se rapporte aux sciences sociales. Par exemple dans nos écoles de hautes études commerciales la jurisprudence et l'économie politique maintiennent un règne presque absolu, et vis-à-vis d'elles est entièrement négligée la partie mathématique dans la technique du commerce. La tendance de réduire les études mathématiques se fait remarquer partout. Ainsi dans une de nos écoles forestières on a supprimé le poste de professeur de mathématiques et transmis l'enseignement mathématique à des professeurs sortant de la carrière forestière elle-même.

Dans les écoles des mines on a commencé à réunir les cours de mathématiques avec la mécanique[1]. L'étude des postes et télégraphes, qui a été réformée il y a peu de temps, semble aussi se diriger décisivement vers le côté administratif et la connaissance approfondie du côté technique est laissée à quelques spécialistes.

La raison de cette tendance générale, qui doit paraître bien étrange à ceux qui n'y sont pas habitués comme nous le sommes, doit être cherchée dans la tradition invétérée qui provient de l'état absolu fondé sur la hiérarchie administrative. L'étude du droit est encore la seule porte qui donne accès aux hauts postes dans l'état et c'est une question de dignité pour une profession d'y avoir part. Pourtant, il ne faut pas passer sous silence qu'il y a aussi une forte opposition contre cette pratique. De même l'aversion des naturalistes contre les mathématiques n'est pas sans exceptions. Les médecins surtout commencent à se diriger vers le côté physico-mathématique, poussés par les nouvelles découvertes en physique, qui peuvent rendre de très grands services à la médecine. Je peux m'appuyer sur une conférence qu'un célèbre professeur, M. de Müller, a faite là-dessus il y a peu de temps[2].

Mais en général on trouve encore de très grandes difficultés à faire accepter une instruction mathématique même là où elle est absolument nécessaire. C'est pour cette raison qu'on donne chez nous, par exemple aux architectes, les connaissances mathématiques nécessaires à un cours sur la résistance des matériaux. Dans nos Ecoles techniques supérieures il y a des cours de mathématiques spécialement pour les architectes et les chimistes (en général 2 à 3 h. durant un semestre), mais ces cours sont peu fréquentés par les architectes, puisque les mathématiques ont été ôtées de leurs examens. On peut se faire une idée de ce qu'ils contiennent par le *Lehrbuch der Mathematik* de M. Scheffers (2me édit. Leipzig, Veit) que l'auteur lui-même a désigné comme un traité destiné à ceux qui ignorent les mathématiques et ont l'intention de les ignorer toujours.

Ceci n'est pas seulement comme on pourrait le penser une mauvaise plaisanterie. Nos jeunes étudiants n'ont pas le moindre goût pour l'acquisition de connaissances qui n'appartiennent pas immédiatement à leur futur métier. Nous sommes en Allemagne profondément spécialistes et ce qu'il y a de plus, nous le sommes dès que nous commençons nos études. Ainsi les jeunes naturalistes et ingénieurs, dès qu'ils sont entrés dans leur carrière, méprisent tout ce qui n'est pas de leur branche spéciale. Ils n'ont pas assez d'expérience pour savoir qu'il s'agit avant tout de bien connaître

---

[1] Quant aux Ecoles professionnelles supérieures, voir dans les rapports de la Sous-commission allemande celui de M. Jahnke.

[2] Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Leipzig, Teubner) No. 8.

les fondements de leur profession et que ce sont précisément les connaissances qu'ils dédaignent comme secondaires et superflues qui peuvent leur aider à avancer eux-mêmes leur propre science. Au contraire, à force de s'opposer à des occupations qui ne les intéressent pas, ils deviennent vraiment inintelligents pour toutes les études générales et surtout pour les mathématiques.

C'est pour ces raisons que l'on a été obligé d'adapter les mathématiques à la profession, afin de pouvoir les enseigner avec succès. Un très bon exemple de ce procédé nous est fourni par la *Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften* par MM. Nernst et Schœnflies (Munich, R. Oldenbourg). Ici par exemple la géométrie analytique aboutit à la représentation graphique de l'état thermique d'un gaz ou d'un fluide, l'idée de la fonction est illustrée par la loi de Mariotte, pour dire ce que c'est que la dérivée on parle de la vitesse d'une réaction, la théorie du mouvement d'un point est appliquée immédiatement au mouvement des ions et ainsi de suite.

Le cours qui a donné lieu à ce Traité existe encore à l'Université de Gœttingue, sous le même titre (avec 3 h. par semaine pendant un semestre). A l'Université de Berlin on trouve un cours sous le même nom, mais avec une heure par semaine seulement; de plus le professeur Rubens ajoute à son cours de Physique expérimentale, fréquenté aussi par les chimistes, une heure de compléments mathématiques. A l'Université de Munich il y a aussi un cours de Mathématiques générales destiné aux étudiants de toutes les Facultés.

Comme je l'ai déjà dit, on a réuni dans nos écoles des mines les leçons de mathématiques avec un cours de mécanique. On l'a fait, il est vrai, en partie pour épargner du temps, mais aussi pour avoir dans toutes les expositions mathématiques des exemples tirés du métier des élèves et s'appliquant même à des objets que les jeunes étudiants ont devant les yeux quand ils visitent les mines.

Je ne peux pas dire que les tendances actuelles en Allemagne, que je viens de décrire aussi fidèlement que possible, me semblent très favorables à un développement heureux du génie mathématique dans le domaine de ses applications.

En Autriche l'état général est à peu près le même. On a institué pour les naturalistes des cours spéciaux très faciles, mais alors on a fait l'expérience curieuse, bien que trop explicable, que les étudiants se présentaient pour les examens en mathématiques spéciales après n'avoir suivi que ce cours élémentaire.

En Angleterre le manque d'une organisation réglementaire des hautes études a poussé encore plus loin la spécialisation des différentes branches. Bien qu'en Angleterre la liaison entre la physique et les mathématiques soit reconnue partout, bien que ce pays ait la gloire d'avoir poussé au plus haut degré l'application des mathé-

matiques aux sciences sociales — par exemple son institut des actuaires à de très grands mérites pour le perfectionnement scientifique des assurances sur la vie — bien que, encore, on doive à des savants anglais l'association de l'analyse mathématique à des problèmes biologiques tels que les dimensions des individus et l'hérédité, il manque pourtant une organisation de l'instruction mathématique de toutes ces professions dont nous avons parlé ici.

J'ai laissé ensemble les pays germaniques parce qu'ils forment un contraste très marqué avec les pays romans. Dans ceux-ci l'esprit général est bien plus favorable aux mathématiques. On n'y a pas le même préjugé contre les mathématiques que chez nous, on n'y prend pas comme chez nous l'étude des mathématiques pour l'occupation privilégiée de quelques personnes un peu détraquées et incapables d'une idée pratique, au contraire on croit cette occupation très noble et très utile à la communauté et l'on pense ne pouvoir faire mieux que de laisser passer autant que possible les jeunes gens par une bonne instruction mathématique.

Passons maintenant à l'organisation de ces études en France; on constate clairement une grande différence entre les vues fondamentales. Si l'on tend en Allemagne à pousser toujours plus loin la spécialisation des études, on essaie en France, au contraire, de donner à une partie des études une généralité qui conserve aux élèves une connaissance claire des fondements de leur science et une certaine liberté d'esprit. Ce que nous obtenons du point de vue pratique est gagné par les Français du point de vue théorique.

La différence fondamentale entre la France et l'Allemagne se manifeste clairement dans ce que les Écoles d'application, entre autres l'École des Ponts et Chaussées, l'École des Mines, l'École du Génie maritime et les Écoles de l'Artillerie et du Génie ne sont accessibles qu'à ceux qui ont passé l'examen de sortie de l'école polytechnique ou des études équivalentes.

Pour les études mathématiques des naturalistes on a résolu en France la question de la manière suivante. Dans les écoles moyennes il y a une classe de mathématiques spéciales. Cette classe a un programme depuis 1905, ce programme est accepté par tous les examens d'admission, par exémple à l'école polytechnique. Pour ceux d'entre les naturalistes qui n'ont pas passé par la classe de mathématiques spéciales on a institué dans les Universités un cours de mathématiques générales (2 à 3 h. par semaine pendant un an) par lequel ils peuvent acquérir les connaissances mathématiques qui leur sont nécessaires.

Pour l'Italie M. Somigliana a bien voulu me donner les indications suivantes :

Les candidats au doctorat en physique ont la même préparation mathématique que les élèves ingénieurs et les candidats au doc-

torat en mathématiques, c'est-à-dire des cours complets d'algèbre, de géométrie analytique, de calcul infinitésimal, de géométrie projective et descriptive.

Les candidats au doctorat en chimie peuvent suivre deux voies: ou faire le programme mathématique comme les ingénieurs et les physiciens, ou avoir une préparation en sciences naturelles. Pour ceux-ci et pour les naturalistes a été institué, il y a une dizaine d'années, un cours spécial de mathématiques supérieures, de trois heures, presque dans toutes les Facultés des sciences, qui comprend l'algèbre, la géométrie analytique et la calcul infinitésimal. On cherche dans ce cours à traiter beaucoup d'exemples pris dans la mécanique, la physique et la chimie et à donner les démonstrations, les plus simples possibles, en évitant toutes discussions et critiques.

Les résultats de ce cours ne sont pas trop satisfaisants, un an étant insuffisant à faire acquérir aux élèves tant d'idées nouvelles et une certaine pratique dans le calcul.

Il y a actuellement en Italie une seule école pour les ingénieurs des mines. Elle est annexée à l'Ecole polytechnique de Turin et fréquentée seulement par des jeunes qui sont déjà des ingénieurs civils ou industriels. On ne peut parler pour cette raison d'un enseignement mathématique propre des ingénieurs des mines.

Dans les écoles supérieures de commerce on donne un enseignement de mathématiques suffisamment étendu, en deux ou trois ans. Après une préparation générale analytique, on traite spécialement les arguments qui se rattachent aux questions financières et aux assurances, même en se servant des moyens de l'analyse supérieure.

Qu'il me soit permis d'ajouter encore deux mots sur la RUSSIE[1].

---

[1] Voir dans les rapports de la Sous-commission russe celui de M. POSSÉ (p. 6); nous croyons utile d'en donner un extrait (H. F.). — « Dans les Universités de Moscou, de St-Pétersbourg, de Kiew, de Karkow et d'Odessa, on a introduit, à diverses époques, un cours succinct des mathématiques, et dans les deux premières encore un Cours d'éléments de Mécanique pour les étudiants naturalistes. Le temps consacré à ces cours est différent dans les Universités mentionnées; le plus long est à St-Pétersbourg, savoir trois heures par semaine pendant deux années ou quatre semestres pour les Mathématiques et deux heures pendant deux semestres pour la Mécanique. (L'année scolaire est de 26–27 semaines.) Pour les naturalistes ce cours est obligatoire (ainsi que le cours de Mécanique) pour les étudiants de la subdivision de Chimie de la section naturaliste, c'est-à-dire qu'il est exigé aux examens. L'introduction de ces cours dans le plan d'études de la section naturaliste, au moins pour les chimistes, est une preuve que la nécessité des connaissances des éléments de Calcul infinitésimal et de Géométrie analytique est depuis longtemps conçue par les naturalistes.

« Quant au programme de ces cours, autant que nous pouvons en juger d'après l'Université de St-Pétersbourg, nous allons nous permettre la remarque suivante. A notre avis, il serait préférable de réduire quelques développements purement mathématiques et d'ajouter quelques applications tirées du domaine des sciencas naturelles et dont on trouve de nombreux exemples dans les livres d'enseignement des Mathématiques pour les naturalistes, comme BURKHARDT, *Vorlesungen über die Elemente der Diff.- u. Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung der Naturerscheinung*, ou NERNST u. SCHOENFLIESS, *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften*. L'absence de telles applications dans un cours destiné à l'usage de ceux qui ne font des Mathématiques qu'en vue des applications est un défaut que nous allons rencontrer encore en parlant des écoles techniques supérieures. »

Les universités russes ont des cours spéciaux pour les naturalistes qui comprennent la géométrie analytique, la trigonométrie plane et sphérique et l'analyse infinitésimale. Pour les minéralogistes on exige, problablement à cause de la cristallographie, les deux premières parties et l'on fait abstraction de l'analyse infinitésimale.

Ces indications très imparfaites pourront sans doute être complétées encore par MM. les délégués des différents pays. Je sens vivement les grandes lacunes que j'ai laissées partout. Ce que je pouvais donner dans mon rapport c'était seulement l'éclaircissement du problème en général et des manières dont on a essayé de le résoudre dans les différents pays.

Discussion.

M. Klein, président, ouvre la discussion en rappelant que le Comité central a jugé préférable de laisser hors du débat de ce jour tout ce qui touche aux ingénieurs proprement dits et aux physiciens. Nous nous proposerons d'examiner cette importante question une autre fois.

M. Bourlet. — Permettez-moi, Messieurs, d'ajouter quelques mots aux indications données par M. Timerding.

Pour bien comprendre l'état actuel de cet enseignement préparatoire, en France, il me faut d'abord faire un résumé historique.

Au commencement du XIX[e] siècle l'enseignement scientifique *pratique* était tout entier concentré en un seul point : l'Ecole Polytechnique, qui, comme son nom l'indique et conformément à son programme, « préparait à *toutes* les carrières exigeant des connaissances scientifiques étendues ».

Le succès de cette grande école, le mérite de ses anciens élèves lui donnèrent un lustre et une réputation qui survit encore aujourd'hui. Devant l'affluence des candidats, il fallut organiser la préparation du concours d'entrée ; et ainsi naquit dans nos lycées cette classe de Mathématiques Spéciales qui n'a de pareille dans aucun autre pays. Elle n'avait pas de programme propre ; c'est celui de l'Ecole Polytechnique qui servait de règle. Vous trouverez dans le Volume II des publications de la Sous-commission française un rapport remarquable de M. Blutel sur ce sujet.

Lorsqu'ensuite d'autres écoles telles que l'Ecole Normale Supérieure, les Ecoles des Mines, des Ponts et Chaussées, l'Ecole centrale des Arts et Manufactures se développèrent ou se créèrent, elles durent, pour avoir des candidats et essayer de détourner à leur profit une partie du flot montant vers l'Ecole Polytechnique, adopter, en tout ou partie, le programme d'admission de cette école.

Toute la jeunesse française qui voulait entrer dans une carrière scientifique ou appliquée se rua vers la classe de Mathématiques Spéciales. Ainsi pendant assez longtemps nos Facultés des Sciences ne reçurent-elles comme élèves que tous ceux qui, après avoir passé plusieurs années dans une classe de Mathématiques Spéciales n'avaient pas réussi à se faire recevoir au moins à l'une des deux plus grandes écoles rivales, l'École Polytechnique et l'École Normale Supérieure. Et, par un résultat étrange de cet état de choses, c'était le *Ministre de la Guerre* qui, en modifiant à son gré le programme d'entrée à l'École Polytechnique, tenait dans ses mains les destinées scientifiques de la France.

A la suite de la création des Universités et de la renaissance des Facultés des Sciences sous l'énergique impulsion de M. *Liard*, alors directeur de l'Enseignement supérieur, peu à peu se forma, particulièrement en physique et chimie, une nouvelle catégorie d'étudiants qui n'étaient pas passés par la classe de Mathématiques Spéciales. Il fallut donc penser à leur donner une instruction mathématique préliminaire, et c'est ainsi que prit naissance le certificat de *mathématiques générales* au sujet duquel on trouvera des renseignements complets dans l'excellent rapport de mon collègue M. *Vessiot* (Vol. III des publications françaises)[1].

Par un juste retour, le succès de ce cours, sa meilleure adaptation aux besoins de la technique eut une répercussion sur la classe de Mathématiques Spéciales et en 1905, à la suite de la nomination d'une grande commission interministérielle, on donna enfin un programme à cette *classe* (voir le rapport de M. Blutel). C'est dans ce programme, défini par le ministre de l'instruction publique, que *toutes* les grandes écoles puisent maintenant les éléments de leur concours d'admission.

J'ajoute, pour être complet, qu'à la suite du développement considérable des carrières techniques scientifiques dans la vie moderne, le ministère de l'instruction publique fut amené en 1902 et 1905 à augmenter considérablement la place et l'étendue de l'enseignement des sciences dans nos lycées. Maintenant dans les classes de Seconde et Première C et D on enseigne les éléments de la géométrie analytique et des dérivées, et dans la classe de Mathématiques (A et B) on va jusqu'au calcul intégral. Ainsi l'enseignement des lycées suffit-il actuellement pour donner aux jeunes gens les connaissances mathématiques (géométrie pure, analytique et descriptive, trigonométrie, algèbre, calcul différentiel et intégral) dont on peut avoir besoin dans le commerce, l'économie politique et même les constructions civiles et l'architecture. Ainsi jusqu'ici il y avait à l'École des Beaux-Arts à Paris un cours de

[1] Le programme comprend deux parties distinctes enseignées souvent par deux professeurs différents : 1° Algèbre, Calcul infinitésimal, Géométrie analytique ; 2° Éléments de Mécanique rationnelle.

mathématiques pour les architectes. Le Conseil supérieur de cette Ecole vient de reconnaître que ce cours est devenu inutile parce que les matières qu'on y enseigne sont traitées au lycée. Le cours est supprimé à partir de 1912 et son programme est transporté dans celui du concours d'admission.

Ces modifications successives ont ainsi amené en France un régime stable très simple et qui suffit amplement à nos besoins.

Il peut se résumer dans le tableau ci-dessous :

Enseignement mathématique préparatoire.

A. — Dans les lycées et collèges jusqu'au baccalauréat inclus : *Commerce, Banque, Assurances, Economie politique, Constructions civiles, Architecture.*

B. — Classe de Mathématiques Spéciales : *Grandes Ecoles scientifiques, théoriques et techniques.*

C. — Cours de Mathématiques Générales dans les Universités : *Chimie, Physique, Histoire naturelle.*

Ce tableau, comme on le voit, embrasse tous les cas. Il répond à l'esprit français et à l'esprit de l'enseignement en France qui, à l'opposé de ce qui se passe en Allemagne, a horreur des spécialisations prématurées et oblige les élèves à recevoir une instruction générale très étendue. On ne concevrait pas chez nous un cours de mathématiques uniquement pour des chimistes fait dans l'esprit de la spécialisation étroite que nous ont signalée MM. les délégués allemands.

M. Somigliana : J'ai bien peu à ajouter à ce que j'avais donné par écrit et que M. Timerding vient de communiquer d'après mon exposé. Je veux dire seulement qu'en Italie les chimistes peuvent arriver au doctorat même en suivant les cours de mathématiques communs aux ingénieurs, aux physiciens et aux candidats au doctorat en mathématiques dans les deux premières années d'université. En effet certains de nos meilleurs professeurs de chimie ont suivi cette voie.

Pour les architectes je peux dire que maintenant, dans les écoles polytechniques de Milan et de Turin, on a institué des cours spéciaux avec des enseignements réduits de calcul infinitésimal, de géométrie descriptive et de mécanique.

M. Wirtinger parle de l'instruction mathématique des naturalistes en Autriche.

L'affaire est réglée dans les écoles polytechniques par le plan d'études. Les chimistes forment une section séparée comme dans l'Empire allemand avec des cours spéciaux fixés par l'ensemble des professeurs de la section.

Pour les autres écoles le tableau ci-dessous donne l'étendue des études mathématiques :

	Première année		Seconde année	
	Leçons	Exercices	Leçons	Exercices
Machines	5	2	5	2
Ponts et Chaussées . .	5	2	5	2
Architecture	4	2	—	—
Chimie	4	2	—	—
	Heures par semaine			

Je veux parler encore des Universités.

Les examens que les candidats passent ici procurent ou le doctorat ou le diplôme pour l'instruction supérieure. Ce dernier laisse pour chaque branche le choix libre entre l'autorisation d'enseigner dans toutes les classes ou seulement dans les classes inférieures. Nous désignerons la première par le nombre 1 et la deuxième par $^1/_2$. Alors les combinaisons possibles pour les naturalistes A, B, C, D sont données par le tableau suivant :

	A	B	C	D
Mathématique	1	1	$^1/_2$	$^1/_2$
Physique	1	—	$^1/_2$	$^1/_2$
Chimie	—	—	1	—
Histoire naturelle . . .	—	—	—	1
Philosophie	—	1	—	—

L'organisation de l'enseignement universitaire pour les groupes C et D n'est pas encore achevée, mais elle le sera probablement bientôt. Pour le groupe C on pourra aller si loin en mathématiques que les jeunes gens pourront continuer leur instruction par l'autodidaxie. Pour le groupe D on est très restreint par les grandes exigences de la minéralogie, la botanique et la zoologie qui doivent être étudiées ensemble. Les minéralogistes et les chimistes votent pour une augmentation de l'instruction mathématique, mais les botanistes et les zoologistes la repoussent. Donc il faut éviter toute surcharge des étudiants et se contenter d'une organisation de l'enseignement qui le rende utile et intéressant. Nous devons observer fidèlement ce principe général que nous ne pouvons pas agir par la contrainte, mais que nous encourageons l'émulation chez les étudiants et leur faisons sentir les avantages

d'une bonne connaissance des mathématiques pour leurs études spéciales.

M. Cojalowitsch ajoute quelques mots sur l'enseignement mathématique dans les gymnases et les écoles techniques russes en général. Les écoles techniques supérieures ont des programmes qui varient d'un établissement à un autre; qui sont, les uns très restreints, les autres très étendus (en allant par exemple jusqu'à la série de Fourier et aux fonctions cylindriques).

M. Fehr appuie entièrement ce que dit M. Bourlet au sujet des inconvénients que présente, dans l'enseignement universitaire, une spécialisation trop rapide. Après la culture générale que cherche à donner l'enseignement moyen, les Facultés des Sciences doivent fournir au jeune étudiant les bases solides d'une forte culture générale scientifique. Pour ce qui concerne particulièrement les mathématiques, il est indispensable qu'à côté des cours destinés aux mathématiciens et aux physiciens, il y ait un cours dit de mathématiques générales portant sur les notions les plus utiles. Il serait précisément intéressant de savoir quelles sont ces notions. Les opinions seront sans doute très variées suivant les spécialistes que l'on consultera. Mais il ne faut pas se faire d'illusions sur la portée d'un pareil cours, si on ne lui consacre pas un temps suffisant et surtout s'il n'est pas accompagné de travaux pratiques. Ceux-ci ne doivent pas être de simples problèmes d'un caractère théorique; ils doivent montrer à l'étudiant, mieux qu'on ne peut le faire par des exemples dans un cours général, comment les mathématiques interviennent réellement dans les applications. Il est désirable que les écoles supérieures apportent une attention toute spéciale au développement de cet enseignement pratique pour en faire un véritable *laboratoire mathématique*.

M. Fehr donne ensuite quelques renseignements sur les cours de mathématiques générales dans l'enseignement supérieur en Suisse. A l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich il existe, à côté des cours s'adressant aux mathématiciens, aux physiciens et aux ingénieurs, un cours d'éléments de mathématiques supérieures destiné aux étudiants des sections I (architecture), IV (chimie), VI (école forestière) et IX (section normale des sciences naturelles). Il comprend 7 heures par semaine (théorie 5 h., exercices 2 h.) pendant le 1er semestre et 4 h. pendant le 2me semestre; cette 2me partie n'est obligatoire que pour la section IX, elle est facultative dans la section IV [1].

A l'Université de Genève il existe également un cours d'éléments de mathématiques supérieures; il comprend 5 h. par semaine (théorie 3 h., exercices pratiques 2 h.) pendant deux semestres.

---

[1] Pour plus de détails voir l'exposé de M. Grossmann dans le fasc. 7 des Rapports de la Sous-commission suisse.

M. Timerding. — Si je me permets de prendre encore une fois la parole c'est parce que je n'ai pas encore tiré les conséquences du tableau que j'avais donné au commencement.

Le but de nos efforts communs n'est pas seulement d'établir l'état de l'enseignement mathématique dans les différents pays, mais aussi de rechercher les problèmes que cet enseignement nous propose. C'est à l'avancement des études mathématiques que doit servir tout notre travail ici. Donc il me semble important de savoir dans quelle direction on devrait continuer la discussion que nous avons entamée aujourd'hui pour en tirer les résultats les plus favorables.

Or il y a deux questions qui s'offrent d'elles-mêmes, si nous envisageons les choses comme nous l'avons fait.

La première est la question de la *fusion* non seulement entre les différentes branches mathématiques, mais aussi entre les mathématiques et les sciences voisines telles que la mécanique, la physique, la chimie, ou encore l'économie politique. J'ai donné déjà des exemples de telles fusions. Je citerai encore un petit ouvrage d'un économiste américain M. Irving Fisher, fournissant une introduction au calcul infinitésimal spécialement destinée aux étudiants d'économie politique.

La deuxième question ne se rapporte pas à la matière, mais à la méthode. Dans quelle mesure, pourrait-on demander, le but spécial de l'enseignement mathématique affecte-t-il la *méthode* de cet enseignement? Faut-il avoir par exemple des méthodes spéciales pour les physiciens ou pour les chimistes? Tout le monde sait que la différentielle n'est pas la même chose pour le physicien et pour le géodésien que pour le mathémacien proprement dit. Il ne s'agit plus pour eux de quantités infiniment petites (ou de limites, pour éviter un terme équivoque) mais de quantités assez petites, et c'est ainsi que tout le Calcul infinitésimal est appliqué dans ces sciences-là. Or faut-il en tenir compte dans l'enseignement dès le commencement? Ou encore faut-il observer toute la rigueur même dans un enseignement élémentaire où l'on ne veut traiter que les premiers principes dans un but pratique? Peut-on se servir au contraire d'une induction partielle au lieu de la déduction pure pour faciliter les études? Peut-on même recourir à des méthodes expérimentales?

Toutes les questions me semblent dignes d'être considérées dans toute leur étendue. Je ne veux pas dire qu'on pourrait y donner une réponse à l'unanimité. Ce ne serait pas même désirable, c'est justement la diversité des réponses qui nous fera envisager les questions sous tous les rapports.

Pardonnez-moi, Messieurs, ces quelques remarques. Peut-être ne seront-elles pas tout à fait sans valeur.

M. Bourlet. — Je me permettrais de prier M. le professeur

Timerding de bien vouloir ajouter à son Tableau de questions une troisième catégorie dont voici l'objet :

Il me semble qu'un des sujets les plus importants que nous puissions et devions étudier c'est celui de la *nature* de ce cours de mathématiques préparatoires. Et cette question se subdivise en deux parties :

1° Quelles sont les *matières* qui figurent dans ces cours, ce qui revient à se demander quelles sont les parties des mathématiques qui sont nécessaires ou utiles aux techniciens.

2° Quelles sont les *méthodes* employées pour enseigner ces matières.

Ce second point me paraît fondamental et j'aurais eu d'intéressantes communications à faire à ce sujet en faisant une étude critique comparée des ouvrages tels que ceux de MM. Appell, Fabry et Vogt, opposés à un ouvrage tout récent et fort curieux de mon ami Henri Bouasse, dont on connaît les tendances progressistes et même révolutionnaires, si on devait croire l'auteur lui-même qui tient à affirmer violemment ses préférences.

II. — Les travaux de la Commission au Congrès de Cambridge.

La question de la participation de la Commission au 5e Congrès international des mathématiciens (Cambridge, 22-28 août 1912) a été examinée par le Comité central dans sa séance du lundi 18 septembre et un premier débat a eu lieu mardi soir à 7 h. dans une séance des délégués.

La Commission ayant été créée à la suite d'une résolution du Congrès de Rome (avril 1908), il semble indiqué qu'une conférence générale sur les travaux de la Commission soit faite à la première assemblée plénière du prochain Congrès. M. Klein, président, veut bien se charger de cet exposé. Le reste se traitera dans des séances que la Commission tiendra en commun avec la section d'enseignement, et qui seront établies sur le plan des séances de Milan : une séance pour la présentation et la discussion des rapports, et deux séances consacrées à des questions d'enseignement moyen et de l'enseignement supérieur. Les travaux seront préparés par deux Sous-commissions. Le Comité central cherchera à établir dès maintenant des liens très étroits entre cette section et la Commission. La chose est d'autant plus facile que M. Hobson, secrétaire-général du Congrès de Cambridge, appartient précisément à la délégation anglaise.

Grâce à l'activité des Sous-commissions nationales, nous pourrons présenter au Congrès un grand nombre d'importants rapports sur l'enseignement mathématique dans les principaux pays.

Toutefois, à la suite de l'extension considérable qu'ont pris nos travaux, il ne sera pas possible de donner à Cambridge une étude comparée des différents rapports nationaux. Du reste, pour plusieurs pays, ces rapports ne seront pas encore terminés. Il paraît donc nécessaire de soumettre au Congrès une proposition tendant à renouveler le mandat de la Commission jusqu'au Congrès suivant.

Si cette manière de voir est adoptée à Cambridge, nous pourrons ensuite tirer parti des documents rassemblés et aborder l'étude de toute une série de questions spéciales, comme on l'a fait à Milan. Dans ce but, de nouvelles réunions, telles que celle-ci, seraient organisées entre les deux prochains Congrès. D'intéressants problèmes ont déjà été proposés, par exemple la préparation du corps enseignant, les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs, les mathématiques et la physique, etc.

Après discussion, la Commission donne un préavis favorable et, sur la proposition de MM. Véronèse, de Saint-Germain et Bourlet, elle décide de s'en remettre entièrement au Comité central pour ce qui est du choix des questions à mettre en discussion.

M. Castelnuovo recommande que dans la suite les rapports préliminaires des Sous-commissions A et B soient distribués en temps utile aux membres de la Commission.

M. Cojalowitsch insiste sur ce point et présente quelques vœux qui seront rappelés aux deux sous-commissions.

Au nom de la délégation anglaise MM. Hobson et Godfrey invitent les mathématiciens présents à venir très nombreux au Congrès de Cambridge.

VI. — SÉANCE GÉNÉRALE PUBLIQUE

Mercredi 20 septembre, à 4 heures.

La séance est ouverte à 4 heures par M. le Professeur F. Klein, président de la Commission, à l'Aula de l'Ecole polytechnique, en présence de MM. les représentants du Ministère de l'Instruction publique, du Préfet et du Syndic de Milan qui, tour à tour, adressent aux congressistes des paroles de cordiale bienvenue et des vœux pour le succès des travaux de la Commission. M. le sénateur Colombo donne lecture du télégramme ci-après que lui a adressé S. E. le Ministre de l'Instruction publique M. Credaro :

« En regrettant de ne pouvoir participer au Congrès, je vous prie de bien vouloir y représenter le Ministre de l'Instruction publique et d'assurer que je tiendrai dans la plus haute considéra-

tion les délibérations de la Commission qui a pris tant d'autorité et qui a bien mérité de la Science et de l'Enseignement. »

M. Colombo lit encore le télégramme par lequel M. Vicini, sous-secrétaire d'Etat, le prie de « présenter ses hommages et ses salutations aux savants qui sont venus à Milan pour le Congrès international de l'enseignement mathématique ».

Allocution de M. le Prof. Dr F. Klein, président.

M. le Prof. Klein remercie les représentants du Gouvernement, de la Préfecture et de la Mairie d'avoir bien voulu assister à cette séance et d'y avoir exprimé des sympathies officielles qui nous sont très précieuses. Il rappelle les contributions importantes que les savants italiens du passé et des temps modernes ont apportées aux sciences mathématiques et l'intérêt qu'ils ont voué aux questions de l'enseignement.

Le but que poursuit la Commission internationale offre un intérêt général qui dépasse le domaine de la Science abstraite. Le développement de la technique moderne et de la vie sociale conduit sans cesse à de nouveaux problèmes qui appellent la collaboration des mathématiques. Le nombre des élèves des Ecoles moyennes et des établissements supérieurs augmente d'une façon considérable. Il en résulte des exigences nouvelles pour l'enseignement. Nous devons en tenir compte tout en sauvegardant les intérêts pour la recherche scientifique libre qui, en mathématiques comme dans les autres sciences, a une influence heureuse dans tous les domaines de la culture moderne.

Notre travail est international parce qu'on rencontre ces mêmes problèmes dans toutes les nations où se cultive la Science. Mais cela ne veut pas dire que notre Commission ait un rôle législatif, qu'elle cherche à unifier les programmes ou les méthodes ou à imposer des résolutions. Elle se propose simplement d'être un intermédiaire fournissant, par ses rapports et ses discussions, des documents utiles. Dans chaque pays on suivra son propre chemin, après avoir pris connaissance des progrès réalisés à l'étranger et en tenant compte des conditions particulières du pays.

Présentation des Publications.

M. H. Fehr, secrétaire-général de la Commission, donne ensuite un aperçu très rapide de l'organisation de la Commission et de l'état actuel des travaux. Il attire l'attention du Congrès sur les difficultés qu'ont à surmonter les rapporteurs dans les pays où l'instruction publique n'est pas centralisée ou qui sont obligés de faire traduire leur rapport dans l'une des quatre langues adoptées

par les Congrès internationaux de mathématiciens ainsi que par la Commission.

Jusqu'à ce jour près de quatre-vingts fascicules ou volumes ont été distribués aux membres de la Commission. Trois pays ont terminé leurs rapports ; ce sont la Hollande et la Suède, dont les publications ont été distribuées fin mai 1911, et la France qui vient d'achever les cinq volumes annoncés par sa Sous-commission. Pour les autres pays les travaux sont en cours de publication. M. Fehr dépose les fascicules parus sur la table présidentielle.

Discours de M. le Professeur Colombo, Sénateur

Directeur de l'Ecole polytechnique de Milan.

Sull'insegnamento matematico nelle scuole per gli ingegneri.

Onorevoli Colleghi,

È un grande onore per me quello di potervi dirigere la parola, nella mia qualità di direttore di un Politecnico italiano, in questa adunanza generale della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico.

In queste aule del Politecnico si sono riuniti in questi giorni i più legittimi e illustri rappresentanti delle scienze matematiche di tutti i paesi, per conferire sulle elevate questioni connesse all'insegnamento della matematica, dai primi studii delle scuole secondarie sino all'insegnamento superiore, sia nei corsi delle Facoltà matematiche e di Scienze, sia in quelli più modesti, ma non meno importanti, delle scuole d'ingegneria.

A questi illustri maestri, qui riuniti oggi per l'ultima seduta generale, io porgo il mio riverente saluto. A loro è dovuto l'omaggio di tutti coloro che si interessano del progresso degli studii e lo considerano come la condizione più necessaria di ogni progresso economico.

Le matematiche sono lo strumento indispensabile per tutte le investigazioni che hanno per oggetto lo studio dei fenomeni naturali e degli stessi fenomeni economici. Il loro campo si estende ogni giorno di più, seguendo il progresso che le scienze d'osservazione vanno continuamente facendo. L'insegnamento delle matematiche deve quindi assumere una crescente importanza nelle scuole secondarie come nelle superiori, e trasformarsi con una continuata adattazione ai nuovi bisogni dell'umana società. Tale è il vostro difficile compito, o signori, tale nella più larga interpretazione il programma che dovete svolgere ; ma all'altezza e alle

difficoltà del programma sono pari la vostra scienza e l'elevatezza dei vostri intelletti.

Le difficoltà che il vostro compito presenta crescono quando si passa dall'insegnamento medio al superiore; poichè, mentre l'insegnamento medio ha, quando non è fine a se stesso, un carattere generale, l'insegnamento superiore deve assumere indirizzi diversi secondo l'obbiettivo cui mira, d'onde un continuo contrasto nell'apprezzamento dei metodi più convenienti per conciliare la necessità di una solida coltura scientifica fondamentale con quella della maggior possibile estensione e profondità dei corsi pratici. Questo contrasto esiste specialmente nelle scuole d'ingegneria, le quali, pur mirando a tante e così diverse specialità, le arti meccaniche, l'idraulica, le costruzioni, l'elettrotecnica, le industrie chimiche, le ferrovie, devono pure prepararvi coloro che si avviano con un serio fondamento matematico. Ora, sulla natura, sui limiti di questo fondamento esistono ancora, almeno da noi, delle divergenze; ed è appunto di questo argomento, cui non manca nè l'attualità, nè l'urgenza, che io, antico insegnante del Politecnico dal 1864, quando fu fondato dall'illustre Brioschi, intendo intrattenervi per brevi istanti.

Due diverse tendenze esistono già nell'insegnamento medio per quanto riguarda il loro indirizzo; e ad esse si informa l'insegnamento matematico. È compito speciale della Commissione internazionale per l'insegnamento matematico quello di determinare l'indirizzo che gli si deve dare; anzi esso ha formato l'argomento principale delle vostre sedute di ieri. L'antico insegnamento classico, fondato sul latino e sul greco, ha dovuto a poco modificarsi, pur conservando il suo carattere fondamentale, per mettersi in maggiore accordo colle necessità della vita presente; ma è battuto vigorosamente in breccia dallo spirito di modernità che tutta questa vita invade e pur troppo, poco si potrà conservare in avvenire di quel magnifico complesso di studii classici, che ha costituito la base dell'educazione di tante generazioni e tanto ha contribuito ad elevare lo spirito e a formare il carattere. Ancora però, cogli attuali programmi, l'insegnamento matematico nei nostri licei è tale da bastare all'ammissione al biennio preparatorio del Politecnico di Milano; anzi la mia lunga esperienza di 47 anni mi ha dimostrato che la media degli allievi provenienti dai licei possiede in generale una più larga preparazione mentale agli insegnamenti scientifici del biennio, rispetto a quella dimostrata dagli allievi degli Istituti tecnici, pur dando prova di una minore preparazione agli esercizi grafici. Ma qualunque sia il giudizio che voi vi farete, o signori, di questa mia osservazione, voi avete una troppo riconosciuta competenza nella questione dell'insegnamento matematico delle Scuole medie, perchè io non deferisca sin d'ora al vostro definitivo giudizio.

Assai più difficile è la questione dell'indirizzo che l'insegnamento matematico dovrebbe seguire, quando, dopo aver lasciata la scuola secondaria si apre agli studiosi l'adito agli istituti superiori. La questione non presenta difficoltà quando si tratta di giovani aspiranti all'insegnamento, pei quali le Facoltà universitarie offrono la più completa preparazione; ma non è più tale quando si devono preparare giovani avviati all'ingegneria nei suoi diversi rami.

L'ingegneria è antica quasi quanto il mondo; essa ebbe per progenitori l'ignoto artefice che gettò su un ruscello il primo ponte, e l'ignoto inventore della ruota idraulica cantata da Antiparo. Ma il primo istituto organico per gli studii di ingegneria fu la celebre *Ecole centrale des arts et manufactures* creata da Monge in piena rivoluzione francese, tanto illustrata più tardi da Poncelet; i politecnici tedeschi dove lessero quegli altri capi-scuola che furono Redtenbacher e Zeuner, vennero assai più tardi. In Italia l'insegnamento moderno d'ingegneria fu, ciò che è poco noto, tentato e inaugurato la prima volta a Pavia, nella Facoltà matematica dell'Università, coi corsi di meccanica industriale e di tecnologia, istituiti dal governo austriaco in via di prova nel 1856; io anzi, mentre facevo la laurea, fui assistente del corso di meccanica, ciò che decise senz'altro della mia carriera. Poco più tardi, l'insegnamento professionale fu stabilito ufficialmente in Italia colla scuola d'applicazione degli ingegneri a Torino e coll'Istituto tecnico superiore di Milano, fondato da Brioschi nel 1863, cui fecero seguito le varie e forse troppo numerose scuole d'applicazione per gli ingegneri sorte in parecchie città universitarie d'Italia. Sino al 1906, l'Istituto di Milano fu il solo che funzionasse come scuola completa e autonoma d'ingegneria con cinque anni di studii reclutando i suoi allievi nei licei e negli istituti tecnici; poi una legge del 1906 creò a Torino, e un'altra del 1908 creò a Padova dei veri Politecnici indipendenti dall'Università e un'istituzione analoga si fondava a Napoli. Prima del 1906 la preparazione nelle Scuole d'ingegneria si faceva, salvo a Milano, nelle Università, nel primo biennio delle Facoltà matematiche, con corsi comuni agli studenti della Facoltà; e così si fa tutt'ora, fuorchè a Milano, Torino e Padova. Nell'Istituto milanese, invece, si ammettono bensì i giovani provenienti dal biennio universitario, ma il biennio preparatorio, benchè modellato su quello universitario, ne diversifica non tanto per l'estensione e la natura degli insegnamenti matematici, quanto per lo sviluppo maggiore dato alle altre materie scientifiche e al disegno.

Ora che esistono in Italia tre Scuole, nelle quali i giovani provenienti dai Licei e dagli Istituti tecnici sono avviati in cinque anni di corso all'ingegneria, mentre tutte le altre scuole si valgono dei corsi universitari per un biennio preparatorio in tre

anni di applicazione, sorge e si fa sempre più viva la questione: quali devono essere questi studi preparatorii? Devono essi comprendere, per quanto riguarda l'insegnamento matematico, degli studii teorici press'apoco eguali e con eguale indirizzo di quelli che servono agli iscritti alla facoltà matematica, oppure devono essere impartiti con intendimenti e indirizzo speciali per i corsi d'applicazione del successivo triennio, cioè limitati al puro necessario per quei corsi, scartando qualunque intendimento scientifico superiore, che non trovi la sua immediata applicazione alla pratica ordinaria dell'ingegnere?

Ecco il problema, sul quale non è ancora avvenuto l'accordo. I fautori del secondo sistema reputano dannoso ingombrare e affaticare la mente dei futuri ingegneri con un eccesso di teorie, delle quali la grande maggioranza degli allievi non avrà forse mai bisogno nell'esercizio della loro professione. Gli altri invece sostengono che convenga elevare più che sia possibile la coltura scientifica degli allievi e mettere nelle loro mani i più sottili mezzi d'investigazione per la risoluzione dei nuovi problemi che l'esercizio dell'ingegneria può presentare. Più si svolge l'umana attività, da cinquant'anni in poi, più difficili, più vasti, più elevati diventano i problemi che l'ingegnere deve risolvere. Gli studi moderni sulla costituzione dei corpi, sulle trasformazioni del loro stato, pei fenomeni elettrici, richiedono il sussidio e le risorse di una solida preparazione matematica. Non sarà probabilmente la grande maggioranza degli allievi che si troverà nel caso di valersene; ma una buona scuola non deve solo mirare alla maggioranza e adattare ad essa il livello dell'insegnamento, bensì deve tener conto delle menti più elette e dar loro almeno una forte preparazione intellettuale, un largo indirizzo scientifico, che li metta in grado di guardare in viso anche i problemi che si elevano al disopra della pratica comune. Bisogna dar le ali ai migliori; perchè, elevandosi sopra il modesto orizzonte della pratica professionale, possono accrescere colle risorse della loro mente il patrimonio scientifico e la fama del loro paese.

Certo non si può pretendere, nè sarebbe necessario, di dare ai giovani ingegneri una coltura matematica pari a quella che la Facoltà impartisce ai suoi allievi; basterà invece abolire o ridurre al minimo alcuni corsi che hanno importanza soltanto per la coltura matematica, e intensificare quelli di evidente necessità, cioè il calcolo differenziale e integrale, la geometria analitica e la meccanica razionale, includendo in queste materie a guisa di introduzione i pochi capitoli di algebra complementare necessarii per la risoluzione delle equazioni, la matematica finanziaria e qualche altra applicazione, e le nozioni di geometria projettiva eventualmente richieste per il corso di geometria descrittiva e per l'impiego della statica grafica nei corsi di meccanica e di

costruzioni. Tutta questa preparazione matematica dovrebbe trovar posto nel biennio preparatorio, lasciando sgombri i tre anni successivi pei corsi di scienze applicate.

Così dovrebbe, a mio avviso, essere organizzato il primo biennio nei Politecnici; quanto alle scuole d'applicazione che hanno sede in città dotate di Università, nulla toglie, dato l'indirizzo che io credo migliore, che pei corsi di matematica del primo biennio si utilizzino quelli del biennio della Facoltà, quando i corsi universitarii sieno predisposti in modo da servire agli allievi ingegneri sino al limite conveniente, salvo completarli od estenderli per gli studenti della Facoltà.

A questi principii, salvo le varianti dipendenti piuttosto da questioni di personale che dall'indirizzo dell'insegnamento, si informa l'ordinamento del Politecnico di Milano. E quanto al suo indirizzo scientifico, basta rammentare che il Politecnico ha avuto come insegnanti due illustri matematici come Brioschi e Cremona, che a questi son succeduti i loro allievi, i quali hanno fedelmente custodito le tradizioni dei loro maestri, che ebbe nel suo corpo insegnante degli scienziati come Schiaparelli e Celoria, e che anche oggi il corso di meccanica razionale, il quale fra breve tornerà a far parte del biennio preparatorio, è affidato a un matematico la cui fama vi è nota.

Tale è, o Signori, il sistema che io credo il più adatto a mantenere alto il prestigio e sicura l'efficacia di una scuola di ingegneri. Procedere altrimenti, dare all'insegnamento matematico un indirizzo più specializzato e ristretto non riuscirebbe, secondo me, che ad abbassare il livello, già troppo basso, per necessità di cose, dell'insegnamento professionale. Noi abbiamo bisogno di tecnici che mirino in alto; per riuscire a raggiungere questo obbiettivo, una riforma è opportuna, anzi più che opportuna, necessaria ed urgente.

Ogni giorno crescono e si differenziano fra loro le materie dell'insegnamento professionale. La meccanica, la chimica, le costruzioni, le tecnologie richiedono corsi diversi sempre più specializzati; una nuova materia, formidabile per contenuto e per varietà di applicazioni, l'elettrotecnica, è venuta ad accrescere il già gonfio programma di una Scuola d'ingegneria. Sono cresciuti al doppio, al triplo i corsi e di altrettanto gli esami. Gli studenti sono soggetti ad una ginnastica mentale faticosissima, senza riposo, che toglie alle loro menti ogni elaterio. Così non si può più andar avanti, senza che si trovi un rimedio, il più pronto possibile.

Ora, a questo stato di cose che impensierisce, non c'è, a parere mio e anche di molti autorevoli miei colleghi, che un solo rimedio: determinare in cadauna scuola d'ingegneria un programma minimo, contenente tutte le materie fondamentali indispensabili

per un ingegnere, qualunque sia la specialità alla quale egli dovrà o potrà dedicarsi entrando in carriera; e poi lasciar scegliere a ciascuno allievo, secondo le sue tendenze, o le sue attitudini, o secondo le opportunità di collocamento che la pratica gli assicura o gli offre, quei corsi di ordine secondario, complementari o speciali che sieno, che egli ritenga convenienti. Per questi corsi, che avrebbe l'obbligo di seguire in più dei corsi generali obbligatorii per tutti, egli dovrebbe rispondere dell'esito secondo le norme ordinarie dell'Istituto. Un simile sistema, che trova il suo riscontro in alcune Università e Scuole superiori americane, può sollevare obbiezioni, può incontrare ostacoli negli stessi organismi governativi, contrari per massima alle differenziazioni di istituti e di programmi; ma io credo sia il solo che offra la possibilità di risolvere una difficoltà, non ancora apparente agli occhi di tutti, ma non meno per questo grave e reale.

Onorevoli Colleghi,

Io ho abusato della vostra cortesia, entrando in particolari che forse esorbitano dalla sfera dell'alta missione a voi affidata. Ma io ho inteso di approfittare di questa favorevole occasione, offerta dal Congresso che avete voluto tenere nella nostra città e nella sede del Politecnico, per esporvi alcune considerazioni, le quali, se fossero onorate dal vostro suffragio, acquisterebbero certo una efficacia incomparabilmente maggiore di quella che personalmente potrei lusingarmi di dar loro. E sperando che ne farete oggetto dei vostri studii, vi ringrazio di nuovo, a nome dei miei Colleghi, dell'onore che avete voluto fare a Milano e al Politecnico milanese.

En Résumé, voici les grandes lignes du discours de M. le prof. Colombo :

Les Mathématiques étant l'instrument indispensable à l'étude des phénomènes naturels et économiques, leur champ s'agrandissant de plus en plus, suivant en cela le progrès des sciences d'observation, leur enseignement doit prendre une importance croissante, aussi bien dans les écoles moyennes que dans les écoles supérieures.

La tâche, ardue il est vrai, de la Commission est de trouver les meilleures méthodes à suivre afin d'adapter cet enseignement aux besoins nouveaux. Si la difficulté existe déjà pour les écoles moyennes, elle est encore plus grande pour les écoles supérieures, puisque d'un enseignement général on passe à un enseignement qui doit tenir compte des buts particuliers que l'on veut atteindre. Il est nécessaire d'unir alors à une solide culture scien-

tifique fondamentale une culture utilitaire visant la direction future que prendront les études, et ceci spécialement dans les écoles d'ingénieurs.

Pour ce qui concerne l'enseignement moyen, l'expérience de 47 années de M. Colombo tend à montrer que l'enseignement des lycées, c'est-à-dire classique, est une aussi bonne si ce n'est meilleure préparation aux écoles techniques supérieures que l'enseignement des instituts techniques.

Après une brève incursion sur le terrain historique, M. le prof. Colombo pose la question : Quelles doivent être les études préparatoires aux futurs ingénieurs ? il y répond en émettant le vœu suivant :

Durant les deux premières années passées à l'école d'ingénieurs, l'étudiant devrait être astreint à suivre les cours d'un programme minimum formant un enseignement général théorique, où, toutefois, les cours d'une importance exclusivement didactique céderaient le pas au cours d'une évidente nécessité pour les applications pratiques.

A côté de ces branches imposées à tous, de nombreux cours spéciaux permettraient à chacun des élèves de choisir la direction dans laquelle il voudra se spécialiser pendant le reste du temps qu'il passera à l'école.

Conférence de M. Federigo Enriques

Professeur à l'Université de Bologne.

Mathématiques et Théorie de la connaissance.

M. le Professeur Enriques a fait, en français, une remarquable conférence dont il a bien voulu nous fournir lui-même le résumé.

M. Federigo Enriques remercie d'abord le Comité central de l'honneur qu'il lui a fait en l'invitant à parler dans la séance publique du Congrès. Il se réjouit qu'on ait proposé de parler des rapports entre les mathématiques et la théorie de la connaissance. Cette proposition est une preuve de l'intérêt croissant des mathématiciens pour la philosophie ; elle permet d'espérer qu'on est prêt à renouer les liens de la pensée philosophique et de la pensée mathématique, rompus par le mouvement romantique du dernier siècle.

C'est surtout dans le domaine de l'histoire qu'il convient de mettre en lumière ces liens profonds qui, faute de connaissances mathématiques, restent cachés à ceux qui poursuivent l'histoire de la philosophie d'après la conception de Hegel, en tâchant d'isoler la pensée philosophique de l'enveloppe scientifique qui

l'accompagne d'une façon presque constante chez les philosophes du passé, et d'expliquer le mouvement des idées par une dialectique interne, faisant abstraction du progrès de la connaissance. Ce qui amène souvent à une interprétation incompréhensible des doctrines, et notamment de celles qui constituent le développement de l'idéalisme.

M. Enriques retrace à grands traits l'histoire de l'idéalisme en prenant pour point de départ les théories mathématiques de l'école de Pythagore qui s'arrêtent à une conception atomistique de l'espace et du temps. Il rappelle la critique des Eléates et notamment de Zénon, qui — d'après Paul Tannery — vise justement à détruire cette conception atomistique ; par là les arguments obscurs de Zénon (tel que celui d'Achille et de la tortue) se trouvent parfaitement expliqués.

Après avoir rappelé la construction de la théorie générale des rapports irrationnels (par Eudoxe), M. Enriques met en lumière l'importance que prenait le développement de la Géométrie rationnelle à l'époque de Platon. D'après G. Milhaud et G. Vailati, l'idéalisme platonicien doit être expliqué en ayant devant l'esprit les formes mathématiques qui constituent pour Platon l'idéal de la science. On est amené par là à rapprocher la conception que Platon se faisait de la science de celle des modernes ; mais il faut aussi tenir compte des différences, en pensant aux matériaux dont était formée la science grecque et en rappelant les applications de la doctrine de Platon essayées par son successeur Speusippe. On reconnaît alors que la théorie des idées de Platon exprime la conception qu'il existe une *classification naturelle* des objets, chaque classe répondant à un concept simple bien déterminé (type ou idée). L'idéal de la science pour Platon c'est la déduction rationnelle des espèces par la méthode dialectique. En prenant comme idée celle du Bien ou de l'ordre de l'univers, Platon introduit un principe qui, comme celui de raison suffisante, doit permettre de choisir les espèces réelles parmi celles qui seraient logiquement possibles. A cette même idée du Bien se rattachent aussi les intuitions esthétiques et religieuses de la philosophie platonicienne.

D'ailleurs, l'idée de la dialectique est suggérée à Platon par la Géométrie où la déduction des formes possibles se fait justement par une analyse rationnelle. De même l'idée platonicienne est un invariant qui se révèle à la raison en se dégageant des choses sensibles par une idéalisation. Etant calquée sur la Géométrie, la science de Platon est statique ; elle est incapable d'expliquer le mouvement et le devenir. C'est ce qui explique la réforme essayée par Aristote ; et cependant Aristote n'a pas réussi à franchir les bornes de l'idéalisme platonicien (cf. l'interprétation de M. Werner). Mais en niant la réalité des genres, pour s'arrêter aux espèces,

il a méconnu l'importance de la dialectique comme conception rationnelle de la science; et d'autre part, concevant la forme (ou le type de l'espèce) comme la cause finale du développement des êtres vivants, il s'est rapproché — à vrai dire — de l'expérience, mais il a engagé l'explication scientifique dans une voie inféconde.

C'est contre cette sorte d'explications scolastiques que sont dirigées les attaques des philosophes de la Renaissance : Bacon, Galilée, Huyghens se réclament également de Platon contre Aristote, et tout en s'aidant des nominalistes, visent à constituer un nouveau réalisme qui touche de près à la conception platonicienne de la science.

Mais tandis que Bacon veut réaliser les qualités sensibles en posant sous une nouvelle forme le problème des alchimistes, Galilée est le véritable fondateur de la science et de la philosophie modernes.

Dans le « Saggiatore » Galilée établit la distinction entre les qualités que Locke appellera plus tard qualités primaires et qualités secondaires ; il nie que les formes telles que la couleur ou la saveur aient une existence réelle et il réduit la réalité aux rapports d'espace et de temps, de force, etc.

D'ailleurs Galilée, comme Platon, cherche au delà des choses sensibles des invariants rationnels simples et rigoureux, mais la conception de ceux-ci est empruntée à la Dynamique plutôt qu'à la Géométrie. Ce sont donc des rapports de succession ou de causalité qui forment le but de la recherche scientifique; et par là l'explication du devenir qui avait arrêté la philosophie grecque devient possible.

C'est précisément dans la voie ouverte par Galilée que la conception de la science se développe chez Descartes et Leibniz. Mais on fait un pas en avant dans la conception du rationalisme en demandant que la connaissance scientifique se développe entièrement par la déduction rationnelle. Par l'argument ontologique ou par celui de causalité, Descartes prétend démontrer le premier principe, c'est-à-dire Dieu. Leibniz croit que le principe de raison suffisante permettra de déduire (de l'idée de Dieu) la science entière et en particulier la Mécanique, en choisissant parmi les rapports de cause qu'on conçoit comme logiquement possibles ceux qui correspondent à la réalité.

L'idée même de ce principe — auquel se mêlent ensuite des éléments religieux — a été suggérée à Leibniz par quelques propositions de la Mécanique où — étant supposée une certaine représentation géométrique des causes et des effets — on parvient à démontrer les effets par le principe de symétrie, en posant que le lien qui rattache les effets aux causes est représenté par une fonction univoque.

M. Enriques passe ensuite à la construction de Newton, faisant

ressortir que la conception rationnelle de la science se trouve ici établie seulement en partie : on se trouve en présence d'un compromis entre le rationalisme et l'expérience, c'est le rationalisme expérimental.

Mais les principes mêmes de la Métaphysique de Galilée, de Descartes et de Leibniz sont attaqués plus profondément par la critique gnoséologique issue de Berkeley et de Kant. Berkeley d'abord, dans sa théorie de la vision, nie la réalité des qualités primaires en s'efforçant de réduire les notions d'espace à des qualités subjectives ; il est amené ainsi à des conclusions purement idéalistes.

Kant suit une autre voie, mais il s'attache également à l'espace et au temps, qui formaient le fond de la réalité cartésienne ; par sa révolution copernicienne, il veut établir que ces idées ne recouvrent aucunement une réalité profonde, mais seulement des données subjectives, que ce sont des formes ou des intuitions engendrées par l'esprit humain et superposées par lui aux données des sens. Par là il en viendrait aussi à un pur idéalisme, s'il n'avait laissé subsister par delà la sensation, le noumène, conception qui, en vérité, se trouve suspendue dans le vide et dont fera justice la critique post-kantienne, à commencer par Salomon Maimon.

Maintenant que faut-il dire de la position actuelle du problème gnoséologique ? Kant n'a fait que poser un problème et la solution qu'il en a donnée ne saurait être acceptée aujourd'hui. Dans sa construction, les formes de l'intuition paraissent sortir de l'esprit comme Minerve tout armée du cerveau de Jupiter. Ce sera le thème de la gnoséologie subséquente d'analyser les éléments dont résultent ces produits complexes. Cependant ce n'est pas chez les philosophes romantiques qu'on trouvera des développements concernant ces problèmes. Le romantisme, en s'égarant dans les nuages mystiques, n'a fait qu'éloigner les conditions d'un véritable progrès de la pensée.

Mais, pendant que la philosophie se perdait ainsi hors des voies de la science, un résultat de haut intérêt philosophique était obtenu sur le terrain même des mathématiques, j'entends la construction de la Géométrie non-euclidienne. Par elle il devenait évident que certains éléments empiriques se mêlent à l'intuition de l'espace. Et c'est ainsi qu'on en fut amené à reprendre l'analyse gnoséologique dans l'esprit de Berkeley et de la psychologie associationiste anglaise, en posant le problème physio-psychologique de la genèse des conceptions géométriques. On sait ce que Helmholtz a fait dans cette direction.

D'un autre côté la Géométrie non-euclidienne provoquait toute une floraison de recherches sur les principes de la Géométrie. Enfin tous les concepts fondamentaux des Mathématiques ainsi que les

théories qui en développent les rapports ont été soumis à une critique logique rigoureuse. Et de ce travail est sorti, en première ligne, un résultat important pour la philosophie, c'est-à-dire le renouvellement de la logique elle-même, un peu pétrifiée dans les schémas d'Aristote.

Le problème gnoséologique proprement dit se pose aujourd'hui sur un terrain scientifique positif et deux courants d'idées semblent se trouver en présence : l'école logique d'un côté et l'école psychologique de l'autre côté.

M. Enriques appartient lui-même à cette seconde école où il s'agit d'expliquer les axiomes, en démêlant ce qu'ils renferment d'expérimental et en réduisant l'*à priori* à la pure fonction logique de l'esprit. Mais, sans insister sur ses propres vues, il conclut que — quelque idée que l'on ait au sujet de la solution — le problème gnoséologique ne saurait être traité aujourd'hui (pas plus d'ailleurs qu'à aucun autre moment de l'histoire de la pensée) qu'en se plaçant sur le terrain de la critique issue du développement des Mathématiques.

VII. — SÉANCE DE CLOTURE AU MOTTERONE

La journée du jeudi 21 septembre a été entièrement consacrée à une excursion au Lac Majeur, au Motterone, puis à l'Isola Bella, organisée avec beaucoup de soin par le Comité de Milan, avec le gracieux concours de la Compagnie de Navigation, qui avait mis un bateau spécial à la disposition du Congrès. Malgré le temps peu favorable, cette excursion laissera un très bon souvenir à tous les participants. Son principal but n'était-il pas de permettre aux congressistes d'entrer en relations personnelles mieux qu'on ne peut le faire pendant ou après la sortie de longues séances ? Sous ce rapport la réussite fut complète.

Au dessert, M. le Prof. Baroni, conseiller communal, ouvre la série des discours en parlant au nom de la Commune de Milan.

M. G. Jung, professeur à l'Ecole polytechnique de Milan, membre de l'Institut Lombard, remercie les délégués de la Commission internationale de l'enseignement mathématique d'avoir choisi Milan pour y tenir son premier Congrès et affirme que, tout en parlant pour son compte, il est certain d'interpréter aussi les sentiments de ses collègues de l'*Istituto Lombardo* et de la Rédaction des *Annali di Matematica*.

Reconnaissant l'importance et la complexité du problème dont la Commission s'occupe avec autant d'activité que de compétence, M. Jung fait les vœux les plus sincères pour que les efforts des

délégués soient couronnés de succès. Il souhaite que le problème de l'enseignement mathématique pénètre dans la conscience des corps enseignants et des classes dirigeantes de tout pays et, plus encore, qu'il puisse intéresser les gouvernements auxquels, en définitive, appartient la tutelle d'un si grand intérêt public; ils profiteront des études et des conseils médités de la Commission internationale, et seront un jour en mesure, il faut l'espérer, de le résoudre pour le mieux.

M. Jung regrette l'absence du président de la Commission, l'illustre Félix Klein, qui a dû renoncer à l'excursion au Motterone pour aller à la réunion de Carlsruhe, et propose de lui envoyer là un télégramme collectif de sympathie et de haute considération [1]. Il termine en adressant ses meilleurs souhaits au vice-président Sir Greenhill, au secrétaire-général M. Fehr et à tous les délégués et congressistes, et il exprime l'espoir qu'ils garderont toujours un bon souvenir de Milan et de l'Italie.

M. C.-A. Laisant regrette l'absence de M. A. de Saint-Germain, qui eût exprimé en meilleurs termes, mais pas avec plus de sincérité, nos sentiments de reconnaissance vis-à-vis des organisateurs de cette réunion de Milan, qui nous ont ménagé une hospitalité si franchement cordiale. Le Comité local, le personnel de l'Ecole polytechnique à tous les degrés, les autorités municipales, provinciales et gouvernementales, les administrations de transport collaboratrices des organisateurs, ont droit à tous nos remerciements. Nous n'avons qualité pour les exprimer, nous Français, qu'au nom de notre pays; mais ce faisant nous sommes certains de traduire fidèlement la pensée unanime de nos collègues de toutes les nations.

Cette institution si utile, si heureuse des Congrès internationaux de mathématiciens, qui nous vaut d'être ici réunis et qui est si féconde au point de vue des progrès de la Science, nous ne saurions oublier sans ingratitude les noms de ceux qui en furent les initiateurs. C'est l'*Intermédiaire des Mathématiciens* qui en propagea l'idée aux cours des années 1894-1896; mais cette idée elle-même appartenait à deux hommes qui l'avaient conçue presque simultanément : MM. Georges Cantor, le créateur de la Théorie des ensembles, et Emile Lemoine, à qui nous devons tant de travaux intéressants et originaux, surtout en Géométrie. Bien des bonnes volontés s'associèrent à leur initiative, et dès 1897 le premier Congrès se tenait à Zurich. Mais n'oublions jamais les deux noms que je viens de citer.

Dans un ordre d'idées analogue, bien qu'il s'agisse de faits plus récents, on doit également, pour ne pas manquer à l'équité,

[1] Il va sans dire que la proposition de M. Jung fut acceptée par acclamation et le télégramme fut immédiatement lancé à destination.

savoir à qui revient la priorité de l'idée d'une Commission internationale de l'Enseignement mathématique, votée par le Congrès de Rome. C'est mon ami et collaborateur M. H. Fehr qui prit, dans la revue *L'Enseignement mathématique*, l'initiative d'une enquête sur les questions d'enseignement, sur les programmes, les méthodes et les desiderata dans les différents pays. M. D.-E. Smith, de New-York, fut l'un de ceux qui s'attachèrent avec le plus de ferveur à cette pensée. Grâce à son activité, à sa persistante et inlassable ténacité, il a fait triompher à Rome la proposition qui a eu pour résultat la création de notre Commission actuelle.

Vous le voyez, conclut M. Laisant, les quatre noms que je viens de rappeler à votre reconnaissance sont ceux d'un Allemand, d'un Français, d'un Suisse et d'un Américain ; c'est une terre italienne qui nous trouve réunis pour poursuivre notre œuvre. En levant mon verre à l'avenir de la Science internationale, en portant la santé de nos collègues italiens et en les remerciant encore, je suis sûr d'être l'interprète de votre pensée unanime.

M. Castelnuovo porte un toast au nom de la délégation italienne. Il a d'ailleurs des liens très étroits avec la Commission; il en est presque le parrain, car il a assisté à sa naissance en 1908, au Congrès de Rome, dont il était le secrétaire-général. Il se réjouit aujourd'hui de revoir son filleul si florissant, grâce aux soins des trois nourrices auxquelles l'enfant a été confié. L'enfant va quitter l'Italie demain, mais M. Castelnuovo espère qu'il se souviendra toujours du pays où il a pris naissance; s'il y revient plus tard, il doit s'attendre à y trouver toujours le même accueil affectueux avec lequel il a été reçu ces derniers jours. Les appuis que l'enfant a trouvés chez les différentes nations ont créé de nouveaux liens entre les peuples ; ce résultat suffirait pour lui assurer les sympathies les plus vives de l'Italie.

Sir G. Greenhill, parlant au nom du Comité central, tient à exprimer les remerciements les plus chaleureux du Comité à tous ceux qui ont travaillé à la réussite de ce Congrès. Ces remerciements s'adressent en particulier aux nombreux collaborateurs des Sous-commissions nationales dont les travaux ont été présentés à Milan ou sont encore en préparation. C'est grâce à ces concours précieux et dévoués que la Commission pourra présenter au Congrès de Cambridge une remarquable collection de documents publiés sur son initiative.

Enfin, M. Sayno, président du Comité local, remercie les orateurs des paroles aimables qu'ils ont prononcées à l'égard de l'Italie et prononce la clôture du Congrès.

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris ; Prix décernés.

L'Académie décerne les prix suivants :

GÉOMÉTRIE. — *Prix Francoeur* (1000 fr.). — M. Emile LEMOINE.

MÉCANIQUE. — *Prix Monthyon* (700 fr.). — M. JOUGUET, professeur à l'Ecole des mines et répétiteur à l'Ecole polytechnique : travaux relatifs à la thermodynamique et à la mécanique chimique. — Récompense à M. DUCHÈNE, capitaine du génie, pour son ouvrage intitulé : « L'aéroplane étudié et calculé par les mathématiques élémentaires.

Prix Poncelet (2000 fr.). — M. RATEAU.

ASTRONOMIE. — *Prix Lalande* (540 fr.). — M. Lewis Boss, directeur du département d'astronomie méridienne à l'Institution Carnégie, de Washington : Catalogue général de 6,188 étoiles, préparé à l'observatoire Dudley à Albany.

Prix Valz (460 fr.). — M. G. RAMBAUD, attaché à l'observatoire d'Alger ; travaux relatifs à la détermination des étoiles de culmination lunaire et à l'observation des comètes.

Prix G. de Pontécoulant (700 fr.) — M. L. SCHULOF, travaux relatifs principalement à la théorie des comètes et part effective prise à l'achèvement des Tables de la lune, fondées sur la théorie de Delaunay.

Prix Damoisau (2000 fr.). -- Question posée : « Théorie de la planète Eros, basée sur toutes les observations connues ». — Le Prix est partagé entre MM. MILLOSEWITCH, WITT, LAGARDE.

PRIX GÉNÉRAUX. — *Prix Petit d'Ormoy* (Sciences mathématiques) (10,000 fr.). — M. Jules TANNERY, de son vivant membre de l'Académie et sous-directeur de l'Ecole normale supérieure, pour l'ensemble de ses travaux.

PRIX JEAN REYNAUD (10,000 fr.). — Ce prix, qui est décerné tous les cinq ans à l'œuvre d'un savant éminent, a été attribué à M. Emile PICARD, professeur à la Sorbonne et à l'Ecole Centrale. C'est un des rares prix qui puissent être décernés à des membres de l'Institut ; il a été obtenu précédemment par MM. LIPPMANN, Henri POINCARÉ et le regretté Pierre CURIE.

Congrès des mathématiciens scandinaves.

Copenhague, août 1911.

Le 2e Congrès des mathématiciens scandinaves a eu lieu à Copenhague du 28 au 31 août 1911, sous la présidence de M. le Prof. Niels Nielsen. Les conférences et communications, au nombre de 23, ont été réparties sur sept séances et suivies par une centaine de participants.

Voici la liste des travaux présentés :

Professor Zeuthen : *Om Grundlæggelsen af den exakte Mathematik.*

Professor Niels Nielsen : *Om analytiske funktioners udvikling i række efter hypergeometriske funktioner.*

Professor Oseen : *Om integralekvationernas betydelse för hydrodynamiken.*

Professor Bjerknes : *Grafisk algebra og grafisk differential- og integral-regning.*

Cand. mag. O. A. Smith : *En Sætning om homogene lineære Differentialligninger af 2den Orden, hvis Koefficienter er 2den Grads Polynomier.*

Ingeniör J. L. W. V. Jensen : *Undersögelser over Ligningernes Teori.* I.

Hjelmslev : *Nye Undersögelser over Geometriens Grundlag.*

Professor Heegaard : *Et Problem i Analysis situs.*

Ingeniör J. L. W. V. Jensen : *Undersögelser over Ligningernes Teori.* II.

Dr. Malmqvist : *Om ändligt mångtydiga integraler till algebraiska differentialekvationer af första ordningen.*

Dr. J. Mollerup : *Den lineære homogene Integrallignings Lösning ved v. Koch'ske Determinanter.*

Professor Charlier : *Den analytiska lösningen av banbestämningsproblemet.*

Professor Juel : *Om algebraiske og ikke algebraiske Flader.*

Docent Pleijel : *Om telegrafistekvationen.*

Docent Bohr : *Om de Værdier, den Riemannske Funktion $\zeta(\sigma + it)$ antager i Halvplanen $\sigma > 1$.*

Professor Brodén : *Om ett axiomsystem för den euklidiska geometrien.*

Mag. sc. E. Schou : *Nogle Klasser af harmoniske Funktioner med tre Variable.*

Professor Bjerknes : *Kraftfelt-fænomener i kontinuerlige materielle medier.*

Professor Lindelöf : *Om den danske Sprogforsker Karl Werners mathematiske Undersögelser*

Docent Block : *Lineära partiella differentialekvationer med multipla karakteristiker.*

Lektor Mattson : *Om en klass hela funktioner af irregulär tillväxt.*

Professor Neovius : *Om nögle af Riemann upaaagtede Minimalflader.*

Docent Johansson : *Om konvergensen af de i teorin för de automorfa funktionerna uppträdande Poincaré'ska Θ-serierna.*

Congrès des mathématiciens allemands.

Réunion de Carlsruhe, septembre 1911.

La réunion des mathématiciens allemands *(Deutsche Mathematiker-Vereinigung)* a eu lieu cette année à Carlsruhe, du 24 au

28 septembre, sous la présidence de M. le prof. SCHUR (Strasbourg). Les communications, au nombre de 22, ont été réparties sur cinq séances présidées successivement par MM. HEUN (Carlsruhe), SCHUR, KLEIN (Göttingen), WEBER (Strasbourg), STUDY (Bonn) et MÜLLER (Vienne).

En voici le texte :

1. CARATHÉODORY (Breslau), *Ueber die Abbildung des Randes bei der konformen Abbildung eines allgemeinen Gebietes.*

2. O. BLUMENTHAL (Aachen), *Meromorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher.*

3. G. FABER (Stuttgart), *Ueber Interpolation.*

4. L.-G. DU PASQUIER (Neuenburg), *Ueber komplexe Tettarionen.*

5. L. LICHTENSTEIN (Berlin), *Ueber das Poissonsche Integral und das Verhalten analytischer Funktionen am Rande des Konvergenzkreises.*

6. L. SCHLESINGER (Giessen), *Ueber Gauss' Jugendarbeiten zum arithmetisch-geometrischen Mittel.*

7. K. HEUN (Karlsruhe), *Ansätze zur Erweiterung der klassischen Mechanik.* (Referat).

8. P. VORONETZ (Kiew), *Ueber die Bewegungsgleichungen des starren Körpers.*

9. R. v. MISES (Strassburg), *Ueber die Schwingungsprobleme und den Sommerfeldschen Turbulenzansatz.*

10. G. HAMEL (Brünn), *Ueber Seilsteifigkeit.*

11. V. VARICAK (Agram), *Ueber die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie.*

12. E. PAPPERITZ (Freiberg), *Vorführung vervollkommneter kinodiaphragmatischer Projektionsapparate für geometrische Darstellungen.*

13. H. WIENER (Darmstadt), *Bestimmung einer Wurzel einer Gleichung durch eine konvergente (oder divergente) Reihe.*

14. E. SALKOWSKI (Charlottenburg), *Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum.*

15. C. JUEL (Kopenhagen), *Ueber die Geraden, welche auf einer analytischen, aber nicht algebraischen Fläche dritter Ordnung liegen.*

16. F. KLEIN (Göttingen), E. BROUWER (Amsterdam) und P. KOEBE (Leipzig), *Referat über automorphe Funktionen und Uniformisierung.*

17. E. HILB (Würzburg), *Zusammenhang zwischen Fundamentalbereichen und linearen Differentialgleichungen.*

18. L. BIBERBACH (Königsberg), *Bemerkungen über automorphe Funktionen.*

19. J. WELLSLEIN (Strassburg), *Ueber die Bewegung im Raume des Relativitätsprinzips.*

20. L. HEFFTER (Freiburg), *Zur Einführung der vierdimensionalen Welt Minkowskis.*

21. F. BERNSTEIN (Göttingen), *Ueber das Lagrangesche Problem der mittleren Bewegung in der Theorie der sekulären Störungen.*

22. H. WIENER (Darmstadt), *Verführung und Erklärungen neuer Modelle.*

La *séance administrative* a eu lieu le jeudi 28 septembre. Elle a été consacrée aux rapports des différentes commissions, puis à l'élection de deux nouveaux membres du comité, en remplace-

ment de MM. Engel et Schur, sortant de charge. La Société a nommé MM. Rohn (Leipzig) et Sommerfeld (Munich). La comité a appelé M. v. Dyck (Munich) aux fonctions de président, pour un an, à partir du 1er octobre 1911.

Le nombre des membres de la Société se monte à 765.

La prochaine réunion aura lieu à *Münster i. W.* en septembre 1912.

Société italienne pour l'avancement des Sciences.

Congrès de Rome : octobre 1911

La Société italienne pour l'avancement des Sciences a tenu sa réunion annuelle à Rome du 12 au 18 octobre 1911. En raison de la célébration du Cinquantenaire de l'indépendance italienne, on a eu soin d'annoncer une série de rapports retraçant le développement, pendant cette période, des différentes branches de la Science, en ayant surtout égard à l'Italie. Voici ceux qui se rapportent aux mathématiques et à la physique : Astronomie, par G. Bianchi ; Géodésie, par V. Reina ; Théorie des Fonctions et Equations intégrales, par G. Lauricella ; Géométrie, par U. Amaldi ; Physique mathématique, par F. Levi-Civita ; Electrotrologie, par M.-O. Corbino.

Parmi les *Conférences générales*, il y a lieu de signaler les suivantes : G. Castelnuovo : L'évolution des mesures d'espace et de temps. — A. Righi : La nouvelle Physique. — G. Vacca : La Science dans l'Extrême Orient.

Quelques *communications spéciales* ont été présentées à la Section de Mathématiques : G. Andreoli : Sur l'Algèbre de la logique et sur quelques transcendantes. — R. Giacomelli : Note historique et critique sur les principes de la Méecanique

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. F. London est nommé professeur ordinaire à l'Université de Bonn.

M. H. Böhm a été admis en qualité de privat-docent à l'Université de Munich.

Angleterre. — Une exposition concernant l'enseignement mathématique en Grande-Bretagne va être organisée par la *Mathematical Association* pour la section d'Enseignement du prochain Congrès international de mathématiciens (Cambrige, 1912). Elle comprendra, entre autres, des travaux mathématiques d'élèves des divers types d'écoles, ainsi que les modèles et diagrammes en usage.

M. H. Lamb (Manchester), Sir J. Larmor (Cambridge) et Sir J.-J. Thomson (Cambridge) ont été nommés docteurs honoraires de l'Université de St-Andrews (Ecosse).

Autriche. — M. Ph. Furtwängler est nommé professeur ordinaire à l'Université de Vienne.

Belgique. — Sont nommés, en remplacement de M. J. Neuberg, professeur émérite à l'Université de Liège, MM. Deruyts (Analyse) et E. Fairon (Géométrie, Algèbre, Méthodologie).

— M. Th. Dedonder est chargé d'un cours de Physique mathématique à l'Université libre de Bruxelles.

Etats-Unis. — M. C. Gillespie est nommé professeur extraordinaire à l'Université Cornell.

M. H.-E. Jordan est nommé professeur extraordinaire à l'Université du Kansas.

M. H.-N. Mott est nommé professeur extraordinaire à l'Université du Wisconsin.

M. J.-N. Van de Vries est nommé professeur extraordinaire du Kansas.

Russie. — Un premier *Congrès russe des professeurs de Mathématiques* aura lieu à St-Pétersbourg du 9 au 16 janvier 1912.

Une nouvelle revue. — Il vient d'être fondée à Varsovie une revue scientifique intitulée *Wektor* (« Le Vecteur »), consacrée aux sciences mathématiques et physiques en général et plus spécialement aux questions d'ordre méthodique et didactique. Destinée surtout aux instituteurs, elle s'adresse aussi à tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques, à la physique et à l'astronomie, sans avoir le temps d'étudier les travaux spéciaux.

Parmi les articles de ce premier numéro, signalons celui de M. Biagobrzeski donnant un exposé élémentaire mais clair et critique du principe de relativité, si important en physique moderne et dans ses applications, et celui de M. Zarzecki sur l'induction dans l'enseignement élémentaire des mathématiques. Le fascicule contient en outre deux autres articles originaux, plusieurs notes diverses, de la bibliographie et problèmes à résoudre.

Suède. — M. Mittag-Leffler est nommé docteur honoraire de l'Université St-Andrews (Ecosse).

Nécrologie.

M. E. Vandermensbrugge, professeur émérite de Physique mathématique, est décédé à Gand à l'âge de 76 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1911-1912 (suite[1]).

ALLEMAGNE

Heidelberg; *Universität.* — Koenigsberger : Th. der Differentialgleichungen, 2; Analyt Mechanik, 4. — M. Cantor : Differential- und Integralrechnung, 4 ; Math. Unter- u. Oberseminar; Uebungen dazu, 1 ; Elementare Arithmetik, Zahlentheorie und Algebra, 2. — Koehler : Analytische Geometrie des Raumes, 4. — Boehm : Einleitung in die höhere Mathematik (Infinitesimalrechnung und mathematische Behandlung der Naturwissenschaft, 4); Ellipt. Funktionen und verwandte Gebiete der Funktionentheorie, 3. — Bopp : Nichteuklidische Geometrie, 2. — Wolf : Elemente der Astronomie (und astronomische Geographie), 3. — Kopff : Sphärische Astronomie II.

AUTRICHE

Wien ; *K. K. Universität* — Escherich : Differential- und Integralrechnung, 5 ; Uebgn., 1 ; Proseminar, 1 ; Seminar, 2. — Wirtinger : Th. der Funktionen einer kompl. Veränderlichen, 5 ; Uebgn., 1 ; Mathem. Seminar, 1 ; Mathem. Proseminar ; Uebungen in der graphischen Behandlung elementarer Funktionen, I. — Kohn : Analyt. Geometrie, 4 ; Uebgn., 1 ; Differentialgeometrie, II. — Tauber : Versicherungsmathematik, 4 ; Mathem. Statistik, 2. — Blaschke : Einführung in die mathem. Statistik, I, 3. — Hanni : Das Dualitätsgesetz der Geometrie und seine Bedeutung in der Physik, 2. — Schrutka : Differenzen- und Interpolationsrechnung, 2. — Hepperger : Bahnbestimmung der Planeten u. Kometen, 4. — Schram : Astron. Chronologie, I. — Hasenöhrl : Potentialtheorie, 5 ; Proseminar für theor. Physik, 1 ; Seminar für theoretische Physik, 1. — Frank : Die Anwendung der Integralgleichungen in der mathem. Physik (mit einer Einführung in die Theorie der Integralgleichungen), 3. — Hess : Ionen und Elektronen, I.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE (suite)

Harvard University (Cambridge, Mass.). Cours annoncés pour l'année 1911-1912. — Prof. W. E. Byerly : Introduction to modern geometry and modern algebra, 3 h. ; Trigonometric series, introduction to spherical harmonics, the potential function, 3 h. with Prof. B. O. Peirce. — Prof. B. O. Peirce : Hydromechanics, 2 h., first half-year. — Prof. W. F. Osgood :

[1] Voir les numéros du 15 juillet et du 15 septembre 1911.

Advanced calculus, 3 h.; Theory of functions, 3 h. — Prof. M. Bôcher : Vector analysis, 3 h., first half-year; Finite differences and difference equations, 3 h., second half-year. — Prof. C. L. Bouton : The elementary theory of differential equations, 3 h., first half-year; Differential equations and Lie's theory, 3 h. — Prof. J. L. Coolidge : Probability, 3 h.; Line geometry, 3 h. — Dr. D. Jackson : Infinite series and products, 3 h., first half-year; Advanced algebra, 3 h., second half-year; The theory of numbers including the theory of ideals, 3 h.

L'université Harvard annonce en outre pour l'année universitaire 1911-1912, d'octobre à décembre, des cours du Prof. G. A. Bliss, de l'Université de Chicago, de février à juin des cours du Prof. Max Mason, de l'Université de Wisconsin. Outre des cours élémentaires ils donneront les cours supérieurs suivants : Prof. Bliss : Differential geometry of curves and surfaces, 3 h.; Partial differential equations, 3 h. — Prof. Mason : Dynamics of rigid and elastic bodies, 3 h.; The electron and the electro-magnetic field, 3 h.

FRANCE

Paris; *Faculté des Sciences.* Premier semestre (à partir du 3 nov.). — Géométrie sup. 2 h., M. G. Darboux traitera des Principes généraux de la Géométrie infinit.; il étudiera en particulier la théorie des formes quadratiques de différentielles et les applications du calcul des variations. — Des travaux pratiques afférents au Certificat de Géométrie supérieure seront dirigés par M. Roubaudi, chef des travaux graphiques, les jeudis à 2 heures. Calcul différentiel et Calcul intégral, 2 h., M. Goursat, professeur, traitera des opérations du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Eléments de la Théorie des Fonctions analytiques. — Théorie des Fonctions, 1 h., M. Emile Borel, professeur, traitera des Fonctions elliptiques. — Mécanique rationnelle, 2 h., M. Cl. Guichard, chargé du cours, traitera des lois générales de l'Equilibre et du Mouvement. A partir du 1er janvier, l'enseignement sera donné par M. Paul Appell, professeur de mécanique rationnelle. — Mathématiques préparatoires, 2 h., M. Cartan, chargé du cours, et M. Montel (voir aux conférences) exposeront la première partie du cours de Mathématiques générales. — Astronomie mathématique et Mécanique céleste, 2 h., M. H. Poincaré, professeur, traitera de la Théorie du potentiel newtonien et de ses applications à l'étude de la figure des planètes. — Physique mathématique et Calcul des probabilités, 2 h., M. Boussinesq, professeur, exposera la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. — Mécanique physique et expérimentale, 2 h., M. G. Kœnigs, professeur, traitera des moteurs thermiques. Les travaux pratiques auront lieu sous la direction de M. le professeur Kœnigs, le mardi, à 4 heures. — Théorie des nombres, 2 h., M. Cahen, chargé du cours, traitera de l'Analyse indéterminée du second degré à deux inconnues, des formes quadratiques binaires et des Nombres algébriques du second degré. — Physique céleste, 2 h., M. P. Puiseux, professeur adjoint, chargé du cours, traitera des étoiles et des nébuleuses. — Aviation (fondation de M. Basil Zaharoff), 2 h., M. Marchis, professeur, traitera, le mardi, de l'Aéronautique en générel et, le vendredi, il étudiera l'Hélice au point de vue nautique et aérien. — Physique, 2 h., M. Bouty, professeur, Electromagnétisme, Electrolyse, Décharges électriques.

Cours libres. — M. Bachelier fera un cours libre sur le Calcul des probabilités et ses applications.

Conférences. — M. Lebesgue : Calcul différentiel et intégral, 2 h. — Cl. Guichard, maître de conférences : Géométrie supérieure, 1 h. ; Mécanique rationnelle, 2 h. — Cartan : Travaux pratiques de Mathématiques générales, 1 h. — Montel, chargé de conférences, fera des conférences sur l'Algèbre, en vue du Certificat de Mathématiques préparatoires à l'étude des Sciences physiques, 2 h. — Servant, chef des travaux, chargé de conférences de Mécanique physique, étudiera les principes de la statique graphique et de la résistance des matériaux, 1 heure.

Ecole normale supérieure. — M. Vessiot : Calcul différentiel et intégral (1er et 2me semestre). — E. Borel : Théorie des fonctions (1er et 2me semestres). — J. Hadamard : Mathématiques (2me semestre).

Faculté des Sciences. Second semestre (à partir du 1er mars). — Analyse supérieure, E. Picard : Série de Fourier et de ses généralisations. — Calcul différentiel et Calcul intégral, Goursat : Equations différentielles ; Equations aux dérivées partielles. — Mécanique rationnelle, Appell : Lois générales du Mouvement des systèmes ; Mécanique analytique ; Hydrostatique et Hydrodynamique. — Mathématiques générales, Cartan : Analyse et mécanique. — Astronomie physique, Andoyer : Programme du Certificat d'astronomie approfondie. Théorie des nombres, Analyse indéterminée du second degré à deux inconnues, des formes quadratiques binaires et des nombres algébriques du second degré. — Physique mathématique, Boussinesq : Propagation du mouvement autour d'un centre d'ébranlements dans un solide homogène, isotrope, mécanique des barres ou tiges élastiques. — Mécanique physique et expérimentale, Kœnigs : Des moteurs thermiques. — Aviation, M. Marchis : Visites-conférences dans les établissements aéronautiques.

Collège de France. — Cours publics à partir du 1er décembre 1911. — Mécanique analytique et mécanique céleste, J. Hadamard : Les Equations aux dérivées partielles caractéristiques réelles et le principe de Huyghens. 2 h. — Mathématiques, C. Jordan, suppléant M. Humbert : Les Groupes fuchsiens et automophes. 2 h. — Physique générale et mathématique, M. Brillouin : La Théorie moléculaire des fluides et des solides, Influence de l'Anisotropie des molécules, 2 h. — M. Langevin : La propagation des Ondes électromagnétiques à travers la matière, application aux phénomènes électro et magnéto-optiques et à la biréfringence cristalline, 2 h. — Cours de la fondation Claude Peccot.

BIBLIOGRAPHIE

R. Fueter. — **Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation** und ihr Einfluss auf die Entwicklung der Zahlentheorie. (Bericht zur Feier des 100. Geburtstags Eduard Kummers der deutschen Mathematikervereinigung erstattet). — 1 fasc. in 8°, 46 p., 1 M. 50; B. G. Teubner, Leipzig.

La répartition des idéaux en classes est liée très étroitement au problème d'analyse : Etant donné un corps algébrique k, déterminer toutes les fonc-

tions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... $\varphi_\nu(z)$ de la variable z, qui sont racines d'équations abéliennes dans k, lorsque z parcourt tous les nombres d'un certain sous-corps de k. Les corps supérieurs que fournit la résolution de ce problème sont très importants pour l'établissement des lois de réciprocité, celles-ci n'exprimant autre chose que la loi de décomposition des idéaux premiers dans les corps abéliens relatifs à k. Ce problème ainsi que le problème corrélatif : les fonctions $\varphi_1(z)$, ... $\varphi_\nu(z)$ donnent-elles toutes les équations abéliennes relatives à k, n'est résolu que pour quelques corps, corps des nombres rationnels, corps quadratique imaginaire, etc. Les fonctions φ relatives à ces corps sont la fonction exponentielle, l'invariant $J(z)$ de la théorie des fonctions elliptiques modulaires et certaines fonctions fournies par la théorie des fonctions modulaires à 2 variables. A défaut de la résolution complète de ce problème, Hilbert a entrepris d'établir l'existence des équations abéliennes relatives par une voie purement arithmétique, en établissant directement l'existence du corps des classes du corps k. Ce corps K est défini par les propriétés : 1. K est abélien relatif par rapport à k ; son groupe relatif est holoédrique isomorphe avec le groupe des classes de k ; 2. son discriminant relatif est égal à 1. L'existence de ce corps K, démontrée par Hilbert dans le cas où le corps k est imaginaire ainsi que tous ses conjugués et le nombre des classes égal à 2, a été établie pour un corps k-quelconque par Furtwängler. Ce dernier en partant de sa théorie du corps des classes a également réussi à obtenir les lois de réciprocité.

C'est à l'exposé de toutes ces recherches qu'est consacré le rapport de M. Fueter. Il peut donc être considéré comme faisant suite au « Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlen » de Hilbert dont il se rapproche par sa bibliographie très complète. A défaut des démonstrations la présence de nombreux exemples éclaire très heureusement l'énoncé des théorèmes. Voici d'ailleurs la table des matières de l'Ouvrage.

Index bibliographique. Introduction. Chap. I. Principes de la répartition des nombres algébriques et des idéaux. Chap. II. Le problème d'analyse. Chap. III. Les lois de réciprocité. Chap. IV. Le système complet des équations abéliennes. Chap. V. Le calcul du nombre des classes. Chap. VI. Construction arithmétique du corps des classes. Chap. VII. Applications.

M. Plancherel (Fribourg).

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik** für die IV. und V. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. — 1 vol. cart. in-8°, 299 p., 4 K. 20 h.

R. Suppantschitsch. — **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für die VI. bis VIII. Klasse der Gymnasien und Realgymnasien. — 1 vol. cart. in-8°, 303 p. Tempsky, Vienne.

Nous avons déjà signalé[1] les belles qualités des manuels de M. Suppantschitsch ; nous les retrouvons dans les deux volumes par lesquels le professeur autrichien termine son cours d'arithmétique et d'algèbre élémentaire.

L'« Arithmétique », destinée aux IVe et V^e^ classes des gymnases, contient en même temps des notions assez complètes d'algèbre. En effet, l'auteur expose dans ce premier livre : 1. Les opérations sur les nombres entiers ; 2. Les nombres positifs et négatifs, les polynômes ; 3. La divisibilité, les diviseurs et multiples des nombres et des polynômes ; 4. Les fractions ordi-

[1] *L'Ens. math.*, T. XII, 1910, p. 78 et 348.

naires et décimales ; 5. Les équations du premier degré à une et plusieurs inconnues ; 6. Les puissances et racines.

Dans les deux derniers chapitres la notion de fonction joue un rôle prépondérant ; la théorie des proportions et les règles de trois sont expliquées dans le V[e] chapitre dont les dernières pages sont consacrées aux équations indéterminées du premier degré à deux inconnues ; le lecteur y trouvera l'interprétation géométrique de ces problèmes, intéressants sans doute, mais que divers pédagogues voudraient, à tort croyons-nous, éliminer complètement du programme de l'enseignement secondaire.

Le deuxième volume : « Arithmétique et Algèbre » commence par la théorie des logarithmes : ce chapitre contient la représentation graphique des fonctions $y = 10^x$ et $y = \log x$. Les équations du second degré forment l'objet du chapitre suivant où nous trouvons la résolution géométrique de quelques systèmes d'équations.

Le troisième chapitre consacré aux progressions et aux intérêts composés fournit à l'auteur l'occasion d'insister sur la méthode de l'induction complète et d'exposer quelques principes de l'interpolation. Le quatrième chapitre a pour titre : « Limites, convergence, continuité, fonctions dérivées ». On sait ce que ces notions présentent de difficultés pour l'élève et pour le maître ; M. Suppantschitsch a résolu avec rigueur et avec une clarté remarquable ce problème pédagogique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés à la formule du binôme pour les exposants entiers et aux notions fondamentales du calcul des probabilités.

Une importante collection de problèmes est jointe à chacun de ces deux volumes que nous ne saurions trop recommander aux professeurs de l'enseignement secondaire. A. Lalive (La Chaux-de-Fonds).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Mathematical Monthly (The), published under the joint auspices of the University of Chicago and the University of Illinois, edited by B. F. Finkel, E. Slaught & G. A. Miller. Vol. XVIII, 1911.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles. — 35[e] année.

Fasc. 3 et 4. — R.-P.-H. Bosmans : L'Arithmétique de Simon Steven. — M. Lecat : Sur la multiplication des déterminants permanents. — J.-E. Gœdseels : Simplifications de la méthode la plus approximative et de l'approximation minima ; applications.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Science matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XIII, 1911. — Rosenberg & Sellier, Torino.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle Scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno X. Roma, 1911.

Bulletin de la Société française de Philosophie. Armand Colin, Paris.

11e année, n° 3. — Le réalisme analytique, Thèse de M. B. Russell ; discussion : MM. Berthelot, Dufumier, Lalande, Milhaud.

Escuela Mexicana (La). Organo de la Direccion general de Educacion primaria. Vol. VIII, 1911.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 36e année, 1911-1912. — Librairie Vuibert, Paris.

Intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Em. Lemoine, Ed. Maillet, A. Maluski et A. Boulanger. — Tome XVIII, 1911. — Gauthier-Villars, Paris.

Mathematical Gazette (The), edited by W.-J. Greenstreet. — Vol. VI. George Bell & Sons, Londres.

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 8. Jahrgang, 1911. — Kommissionsverlag, B. G. Teubner, Leipzig.

Mathésis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 3e série, Tome XI, 1911. — Hoste, Gand ; Gauthier-Villars, Paris.

Mathematics Teacher (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by the Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W.-H. Metzler, Syracuse University. N. Y. Vol. III. 1910-1911.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Revue publiée par la Société scientifique d'Amsterdam et dirigée par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et P.-H. Schoute. 2e série, IX, 1911. — Delsman & Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par C. Juel et V. Trier. Série A et série B ; 22e année ; 1911. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Pädagogisches Archiv. Monatsschrift für Erziehung. Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von J. Ruska. 53. Jahrg. 1911. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario. Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Série 3, vol. VIII. — Raffaele Giusti, Livorno.

Prace Matematyczno-Fizycne, dirigé par S. Dickstein. Tome XXI, Varsovie.

Revue de l'Enseignement des Sciences (La). 5e année, 1911. — Librairie Le Soudier, Paris.

Revue de Mathématiques spéciales, dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 22e année, 1911-1912. — Librairie Vuibert, Paris.

Revue de Métaphysique et de Morale, publiée par Xavier Léon. — Librairie Armand Colin, Paris.

19e année, 1911, no 4 (no exceptionnel). — IVe Congrès international de Philosophie, Bologne, avril 1911.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, P.-H. Schoute, J. Cardinaal, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. — Tome XIX, 2e partie, octobre 1910-avril 1911. — Delsman en Nolthenius. Amsterdam, 1911.

School Science and Mathematics. A Journal for Science and Mathematics Teachers in Secondary Schools. Vol. XI. Smith & Turton, Chicago.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von A. Thaer. — XVII. Jahrgang, 1911. — Otto Salle, Berlin.

Wiadomosci Matematyczne, directeur : S. Dickstein. Tome XV, Varsovie.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome XI. — Delsmann en Nolthenius, Amsterdam.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactie van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint · — VIII. Jaargang, 1911. — P. Visser, Haarlem.

2. Livres nouveaux :

H. Andoyer. — **Nouvelles Tables trigonométriques fondamentales** (Logarithmes). — 1 vol. in-4o, 601 p. ; 30 fr. ; A. Hermann & fils, Paris.

G. Arnoux. — **Essai de Geométrie analytique modulaire à deux dimensions.** — 1 vol. in-8o, XII-160 p., avec 40 fig. ; 6 fr. ; Gauthiers-Villars, Paris.

W.-G. Borchardt and A.-D. Perrott. — **Geometry for Schools.** — Part I. Stages I. and II. — 1 vol, in-16, 52-III p. : 1 s. — Part II. Stage III. (Section I.). — 1 vol. in-16, 162-IV p. ; 1 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

H. Broggi. — **Versicherungsmathematik.** (Deutsche Ausgabe.) — 1 vol. in-8o. VIII-360 p. ; relié 8 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

O.-D. Chwolson. — **Traité de Physique** ; Tome III. fasc. 3 : Propriétés des vapeurs. Equilibre des substances en contact. — 1 vol. Gr. in-8o de VI-260 p. ; 9 fr. ; A Hermann & fils, Paris.

A. Flamant. — **Mécanique générale,** Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. 2me édition revue et augmentée. (Collection de l'Encyclopédie des Travaux publics fondée par M. C. Lechelas). — 1 vol. Gr. in-8o, 620 p. ; 20 fr. ; Librairie Béranger Paris.

R. Guimaræs. — **Les Mathématiques en Portugal.** Appendice II. — 1 vol. in-8o, 107 p. ; Imprimerie de l'Université, Coïmbre.

H.-B. Heywood et M. Frechet. — **L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique,** avec une Préface de M. J. Hadamard. — 1 vol. in-8o, 165 p.; 5 fr. ; A. Hermann & fils, Paris.

E. Jahnke. — **Die Mathematik an Hochschulen für besondere Fachgebiete.** — 1 fasc. in-8o, VI-56 p. ; M. 1,80 : B. G. Teubner, Leipzig.

Tr. Lalesco. — **Introduction à la théorie des équations intégrales,** avec une Préface de M. E. Picard. — 1 vol. in-8o, 152 p. ; 4 fr. ; A. Hermann et fils, Paris.

E. Lebon. — **Gabriel Lippmann,** Biographie, Bibliographie analytique des écrits. — 1 vol. in-8°, 70 p. ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Eloi Lussan. — **Essai de Démonstration générale du Théorème de Fermat.** — 1 fasc. in-8°, 11 p. ; 1 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Hans von Mangoldt. — **Einführung in die höhere Mathematik** für Studierende und zum Selbststudium. — 1 vol. in-8°, 477 p. avec 121 fig. ; 13 fr. ; S. Hirzel, Leipzig.

H. Poincaré. — **Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques** professées à la Sorbonne. — 1 vol. in-8°, 294 p. ; 12 fr. ; A. Hermann & fils Paris.

F. Prym und G. Rost. **Theorie der Prym'schen Funktionen erster Ordnung** im Anschluss an die Schöpfungen Riemann's. — 1 vol. in 4°, XI-300 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Walter Ritz. — **Œuvres** publiées par la Société suisse de Physique. — 1 vol. in-8°, 541 p. ; Gauthier-Villars, Paris.

H. Stahl. — **Abriss einer Theorie der algebraischen Funktionen** einer Veränderlichen in neuer Fassung. — Nachgelassene Schrift in Verbindung mit Dr. E. Löffler, herausgegeben von M. Nœther. — 1 fasc. in-8°, 103 p. ; 5 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Study. — **Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie.** Erstes Heft : *Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen,* mit 9 fig. — 1 vol. in-8°, 126 p. : M. 4,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Thær, N. Geuther, A. Böttger. — **Der mathematische Unterricht in den Gymnasien und Realanstalten der Hansestädte Mecklenburgs und Oldenburgs.** — 1 fasc. in-8°, VI-93 p. ; 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig,

H.-E. Timerding. — **Die kaufmännischen Aufgaben in mathematischen Unterricht der höheren Schulen.** — 1 fasc. in-8°, 45 p. ; M. 1,60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Turrière. — **Sur les Congruences de normales** qui appartiennent à un complexe donné. (Thèse présentée à la Sorbonne). — 1 fasc. in-4°, 87 p. ; Toulouse, librairie Privat.

C. Vörös. — **Analitika Geometrio absoluta.** — Una Volumo : La Ebeno Bolyai-a, 134p. ; in-8°, 4 Sm. — Dua Volumo : La Spaco Bolyai-a, 199 p. ; 4 Sm. ; Ludoviko Kokai, Budapest.

J. Wirz. — **Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen sowie die Ausbildung der Lehramtskandidaten in Elsass-Lothringen.** — 1 fasc. in-8°, VI-58 p. ; M. 1,80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Zwicky. — **Stereometrie.** — 1 vol. in-8°, 72 p. 1 fr. 60. A Francke, Bern.

Encyclopédies des Sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — Tome I, vol. 4, fasc. 4 : *Statistique ;* exposé, d'après l'article allemand de L. von Bortkiewicz, par F. Oltramare. — *Technique de l'assurance sur la vie ;* exposé, d'après l'article allemand de G. Bohlmann, par H. Poterin du Motel. — *Economie mathématique ;* exposé par V. Pareto. — Teubner, Leipzig et Gauthier-Villars, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Congrès internationaux et Sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire ou annonce des principaux périodiques.

2, *Publications non périodiques.*

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.